



三导丛书

# 自动控制原理

(第四版)

## 导教 · 导学 · 导考

*DAOJIAO DAOXUE DAOKAO*

刘慧英 主编

- 重点内容提要
- 知识结构图
- 考点及典型题选解
- 课后习题全解

西北工业大学出版社

□策划编辑/刘彦信

□责任编辑/王俊轩

□封面设计/扬帆

## 三 导 丛 书

- ✦ 高等数学 同济·第四版) 导教·导学·导考(上册)(第2版)
- ✦ 高等数学 同济·第四版) 导教·导学·导考(下册)(第2版)
- ✦ 复变函数(西交大·第四版, 积分变换(南工·第三版) 导教·导学·导考(第2版)
- ✦ 概率论与数理统计(浙大·第三版) 导教·导学·导考(第2版)
- ✦ 线性代数 同济·第三版) 导教·导学·导考(第2版)
- ✦ 数学分析 复旦·第二版) 导教·导学·导考
- ✦ 数值分析(第四版) 导教·导学·导考
- ✦ 大学物理学 第二版) 导教·导学·导考
- ✦ 普通物理学(第五版) 导教·导学·导考
- ✦ 物理学教程, 第四版, 改编版) 导教·导学·导考
- ✦ 理论力学 西工大版·哈工大·第六版) 导教·导学·导考(上册)
- ✦ 理论力学(西工大版·哈工大·第六版) 导教·导学·导考(下册)
- ✦ 材料力学(浙大·第三版) 导教·导学·导考(上册)
- ✦ 材料力学(浙大·第三版) 导教·导学·导考(下册)
- ✦ 电工学·电工技术(第五版) 导教·导学·导考
- ✦ 电工学·电子技术(第五版) 导教·导学·导考
- ✦ C程序设计(第二版) 导教·导学·导考
- ✦ 数字信号处理 导教·导学·导考
- ✦ 微型计算机原理及应用 导教·导学·导考
- ✦ 数字电路与逻辑设计(第三版) 导教·导学·导考
- ✦ 电子技术基础(模拟部分)(华中理工·第四版) 导教·导学·导考
- ✦ 自动控制原理(第四版) 导教·导学·导考

ISBN 7-5612-1660-2



ISBN 7-5612-1660-2/TP · 346

定价: 18.00元

三 导 丛 书

# 自动控制原理

(第四版)

## 导教 · 导学 · 导考

刘慧英 主编

刘慧英 卢京潮 袁冬莉 编  
程咏梅 赵 忠 贾秋玲

西北工业大学出版社

**【内容简介】** 本书共 10 章。1~8 章介绍经典控制理论的内容；9、10 章介绍现代控制理论的有关内容。全书由重点内容提要、知识结构图、考点及典型题选解，以及与胡寿松主编的《自动控制原理》(第四版)配套的各章课后习题与解答等组成。

本书可作为工科自动化、信息技术、机电一体化、仪表及测试技术等专业的本科生以及自学者学习自动控制原理课程的参考书和考研与课程考试指导书。

## 图书在版编目(CIP)数据

自动控制原理 导教·导学·导考/刘慧英主编. —西安:西北工业大学出版社, 2003. 9

(三导丛书)

ISBN 7 - 5612 - 1660 - 2

I. 自… II. 刘… III. 自动控制理论—高等学校—教学参考资料 IV. TP13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 045165 号

出版发行:西北工业大学出版社

通信地址:西安市友谊西路 127 号 邮编:710072 电话:029-8493841

网 址: [www.nwpup.com](http://www.nwpup.com)

印刷者:陕西天元印务有限公司

开 本:850 mm×1 168 mm 1/32

印 张:13.125

字 数:446 千字

版 次:2003 年 11 月第 1 版 2003 年 11 月第 1 次印刷

印 数:1~8 000 册

定 价:18.00 元

## 前 言

---

为了适应自动控制理论课程的教学需要,应西北工业大学出版社的约请,特编写了本书,供学习自动控制理论课程的读者和教师参考。

本书主要内容是全解了胡寿松主编的《自动控制原理》(第四版)中的各章课后习题,并系统全面地总结了自动控制理论的主要内容。全书共10章,经典控制理论,由1~8章组成。其中1~6章介绍以传递函数为基础的线性系统的分析和设计方法,给出了经典控制理论中的三种基本分析方法(时域法、根轨迹法和频域法)以及线性系统的频率设计方法;第7章介绍离散系统的分析与设计方法;第8章主要介绍描述函数法和相平面法两种常用的非线性系统分析方法。第9章介绍线性系统的状态空间分析与综合,给出了系统可控性与可观测性判据、李亚普诺夫稳定性分析及反馈结构和状态观测器的设计等问题。第10章介绍最优控制的基本原理、方法以及应用。每章包括重点内容提要、知识结构图、考点及典型题选解和课后习题全解等。在书后的考研真题中还附有近三年的西北工业大学研究生入学试题及参考答案。本书对

于使用原教材以及学习该课程的读者来说是一部知识内容全面、实用性强的教学与学习指导书。它有利于帮助读者了解课程的知识结构,掌握课程学习的主要内容,对培养读者的思维能力和创新能力,树立理论联系实际的科学观点,提高综合分析问题和解决问题的能力等,都有着较好的帮助作用。

参加本书编写的作者都是西北工业大学自动控制系的教师,他们多年来一直工作在教学和科研第一线,从事自动控制原理课程的教学工作,具有丰富的教学和实践经验。各章的编写者是卢京潮(1, 3章)、袁冬莉(4, 6章)、程咏梅(7章)、赵忠(9章)、贾秋玲(10章)、刘慧英(2, 5, 8章以及全书的统稿)。此外,在本书的编写过程中,戴春蕾、李丽锦、徐晓东等参加了第8章和第9章习题的解答、绘图和书稿的整理等工作。

在本书的编写和出版过程中得到了西北工业大学自动化学院教学督导组的老教师们和负责教学管理工作的栾云风副院长的支持和帮助,在此深致谢忱。

由于作者水平所限,书中难免会有错误和不妥之处,恳请读者指正。

**编 者**

2003年6月

# 目 录

前言 .....	1
第 1 章 自动控制的一般概念 .....	1
1.1 重点内容提要 .....	1
1.1.1 基本概念 .....	1
1.1.2 基本控制方式 .....	1
1.1.3 反馈控制系统的组成 .....	2
1.1.4 控制系统的分类 .....	2
1.1.5 对控制系统的基本要求 .....	2
1.2 知识结构图 .....	3
1.3 考点及典型题选解 .....	3
1.3.1 典型题 .....	3
1.3.2 典型题解析 .....	7
1.4 课后习题全解 .....	10
第 2 章 控制系统的数学模型 .....	20
2.1 重点内容提要 .....	20
2.1.1 微分方程 .....	20
2.1.2 传递函数 .....	21
2.1.3 结构图 .....	23
2.1.4 信号流图 .....	25
2.1.5 梅森增益公式 .....	25

2.1.6 控制系统的传递函数	25
2.2 知识结构图	26
2.3 考点及典型题选解	27
2.3.1 典型题	27
2.3.2 典型题解析	30
2.4 课后习题全解	33
<b>第3章 线性系统的时域分析法</b>	<b>68</b>
3.1 重点内容提要	68
3.1.1 稳定性	68
3.1.2 稳态误差计算	68
3.1.3 系统动态性能指标计算	70
3.2 知识结构图	71
3.3 考点及典型题选解	71
3.3.1 典型题	72
3.3.2 典型题解析	74
3.4 课后习题全解	79
<b>第4章 线性系统的根轨迹法</b>	<b>97</b>
4.1 重点内容提要	97
4.1.1 绘制根轨迹的基本条件	97
4.1.2 绘制根轨迹的基本法则	98
4.1.3 根轨迹与系统性能的关系	100
4.2 知识结构图	101
4.3 考点及典型题选解	101
4.3.1 典型题	102
4.3.2 典型题解析	103
4.4 课后习题全解	105
<b>第5章 线性系统的频域分析法</b>	<b>134</b>
5.1 重点内容提要	134
5.1.1 频率特性	134



5.1.2	频率特性的几何表示 .....	134
5.1.3	频率特性的绘制 .....	134
5.1.4	稳定判据与稳定裕度 .....	136
5.1.5	频域性能指标与时域动态性能指标的关系 ..	138
5.1.6	三频段与系统性能的关系 .....	139
5.2	知识结构图 .....	141
5.3	考点及典型题选解 .....	141
5.3.1	典型题 .....	141
5.3.2	典型题解析 .....	145
5.4	课后习题全解 .....	148
<b>第6章</b>	<b>线性系统的校正方法</b> .....	<b>168</b>
6.1	重点内容提要 .....	168
6.1.1	校正方式 .....	168
6.1.2	常用校正装置及特性 .....	169
6.1.3	串联校正装置的设计步骤 .....	171
6.1.4	控制系统的性能指标 .....	172
6.1.5	三频段理论在系统校正中的应用 .....	173
6.2	知识结构图 .....	173
6.3	考点及典型题选解 .....	174
6.3.1	典型题 .....	174
6.3.2	典型题解析 .....	176
6.4	课后习题全解 .....	178
<b>第7章</b>	<b>线性离散系统的分析与校正</b> .....	<b>217</b>
7.1	重点内容提要 .....	217
7.1.1	离散系统的基本概念 .....	217
7.1.2	信号采样与保持的数学描述 .....	217
7.1.3	$z$ 变换理论 .....	218
7.1.4	离散系统的数学模型 .....	220
7.1.5	离散系统的稳定性与稳态误差 .....	223

7.1.6	离散系统的动态性能分析 .....	227
7.1.7	离散系统设计——最少拍系统设计 .....	229
7.2	知识结构图 .....	230
7.3	考点及典型题选解 .....	231
7.3.1	典型题 .....	231
7.3.2	典型题解析 .....	233
7.4	课后习题全解 .....	237
<b>第8章</b>	<b>非线性控制系统分析</b> .....	<b>259</b>
8.1	重点内容提要 .....	259
8.1.1	非线性控制系统概述 .....	259
8.1.2	描述函数法 .....	260
8.1.3	相平面法 .....	263
8.2	知识结构图 .....	266
8.3	考点及典型题选解 .....	266
8.3.1	典型题 .....	267
8.3.2	典型题解析 .....	270
8.4	课后习题全解 .....	276
<b>第9章</b>	<b>线性系统的状态空间分析与综合</b> .....	<b>313</b>
9.1	重点内容提要 .....	313
9.1.1	线性系统的状态空间描述 .....	313
9.1.2	线性系统的可控性与可观测性 .....	315
9.1.3	线性定常系统的线性变换 .....	317
9.1.4	线性定常系统的反馈结构及状态观测器 .....	317
9.1.5	李亚普诺夫稳定性分析 .....	318
9.2	知识结构图 .....	320
9.3	考点及典型题选解 .....	321
9.3.1	典型题 .....	322
9.3.2	典型题解析 .....	324
9.4	课后习题全解 .....	327

<b>第 10 章 动态系统的最优控制方法</b>	359
10.1 重点内容提要	359
10.1.1 基本概念	359
10.1.2 基本原理	361
10.2 知识结构图	365
10.3 考点及典型题选解	365
10.3.1 典型题	365
10.3.2 典型题解析	367
10.4 课后习题全解	372
<b>附录 I 考研真题</b>	397
一、2001 年西北工业大学硕士研究生入学考试自动控制原理 试题	397
二、2002 年西北工业大学硕士研究生入学考试自动控制原理 试题	400
三、2003 年西北工业大学硕士研究生入学考试自动控制原理 试题	403
<b>附录 II 考研真题简要解答</b>	406
一、2001 年西北工业大学硕士研究生入学考试自动控制原理 试题简要解答	406
二、2002 年西北工业大学硕士研究生入学考试自动控制原理 试题简要解答	407
三、2003 年西北工业大学硕士研究生入学考试自动控制原理 试题简要解答	408
<b>参考文献</b>	410

# 第 1 章 自动控制的一般概念

---

## 1.1 重点内容提要

### 1.1.1 基本概念

#### 1. 常用术语

(1) 自动控制 在没有人直接参与的情况下,利用控制装置,使被控对象的被控量自动按指定规律变化。

(2) 自动控制系统 能自动对被控对象的被控量(或工作状态)进行控制的系统。

(3) 被控对象 指工作状态需要给以控制的机械、装置或过程。

(4) 被控量 描述被控对象工作状态的物理量,也是系统的输出量。

(5) 给定量 也称输入量,表征被控量的希望运行规律。

(6) 扰动量 也称干扰量,是引起被控量偏离预定运行规律的量。

#### 2. 控制系统的任务

减小或消除扰动量的影响,使被控对象的被控量始终按给定量确定的运行规律去变化。

#### 3. 负反馈控制原理

将系统的输出信号引回输入端,与给定输入信号相比较,利用所得的偏差信号产生控制作用调节被控对象,达到减小偏差或消除偏差的目的。

负反馈控制原理是闭环控制(负反馈控制)系统的本质机理。

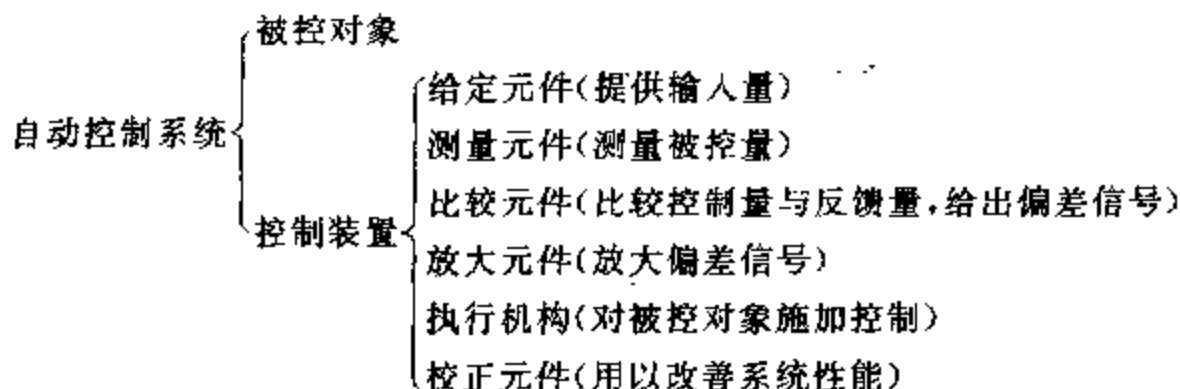
### 1.1.2 基本控制方式

开环控制 输出量对系统控制作用不产生影响的系统。

闭环控制 输出量对系统控制作用产生直接影响的系统。

复合控制 既有顺馈控制又有反馈联系的系统。

### 1.1.3 反馈控制系统的组成



### 1.1.4 控制系统的分类

#### 1. 按给定输入的形式

- { 恒值控制系统
- { 随动系统
- { 程序控制系统

#### 2. 按系统是否满足叠加原理

- { 线性系统
- { 非线性系统

#### 3. 按系统参数是否随时间变化

- { 定常系统
- { 时变系统

#### 4. 按信号传递是否连续

- { 连续系统
- { 离散系统

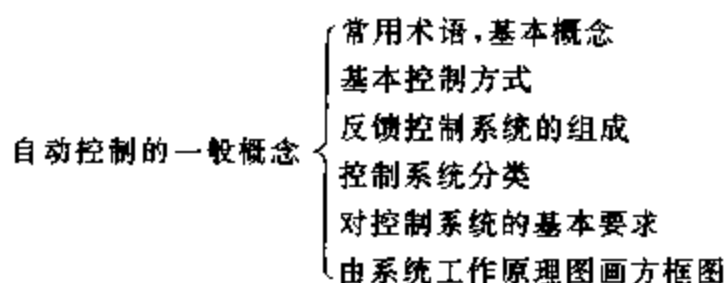
### 1.1.5 对控制系统的基本要求

**稳:**基本要求。系统稳定是系统正常工作的必要条件。

**准:**稳态要求。要求系统稳态控制精度高,稳态误差要小。

**快:**动态要求。要求系统快速平稳地完成过渡过程,超调量要小,调节时间要短。

## 1.2 知识结构图



## 1.3 考点及典型题选解

本章所涉及的自动控制方面的基本概念, 是以后课程学习的基础, 有关内容在诸如问答、填空和选择类型的考题中常会涉及。在掌握基本概念的基础上, 还应熟悉线性定常系统微分方程的特点, 并通过练习, 掌握由系统工作原理图画方框图的方法。

### 1.3.1 典型题

1. 根据图 1.3.1 所示的电动机速度控制系统工作原理图

(1) 将 a, b 与 c, d 用线连接成负反馈系统;

(2) 画出系统方框图。

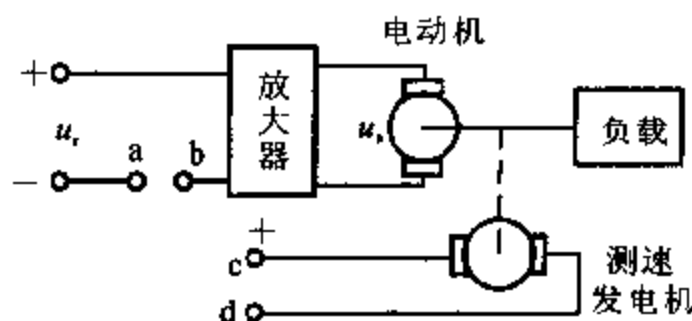


图 1.3.1 速度控制系统原理图

2. 图 1.3.2 是控制导弹发射架方位的电位器式随动系统原理图。图中电位器  $P_1, P_2$  并联后跨接到同一电源  $E_0$  的两端, 其滑臂分别与输入轴和输出轴相连接, 以组成方位角的给定装置和反馈装置。输入轴由手轮操纵; 输出轴则由直流电动机经减速器后带动, 电动机采用电枢控制方式工作。

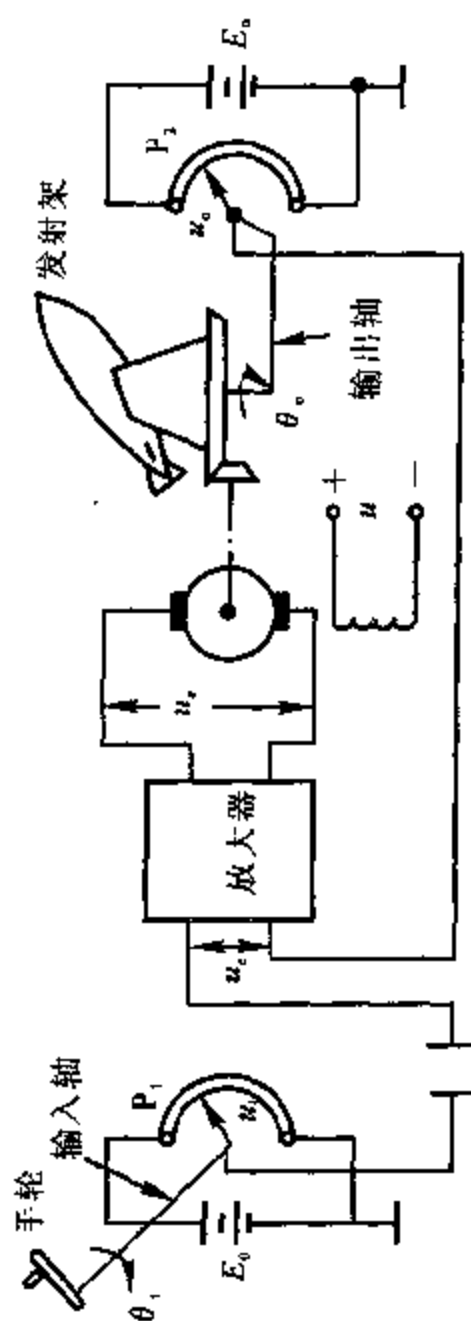


图 1.3.2 导弹发射架方位角控制系统原理图

试分析系统的工作原理,指出系统的被控对象、被控量和给定量,画出系统的方框图。

3. 工作台位置液压控制系统如图 1.3.3 所示,系统可以使工作台按照控制电位器给定的规律变化。要求:

- (1) 指出系统的被控对象,被控量和给定量,画出系统方框图。
- (2) 说明控制系统中控制装置各组成部分。

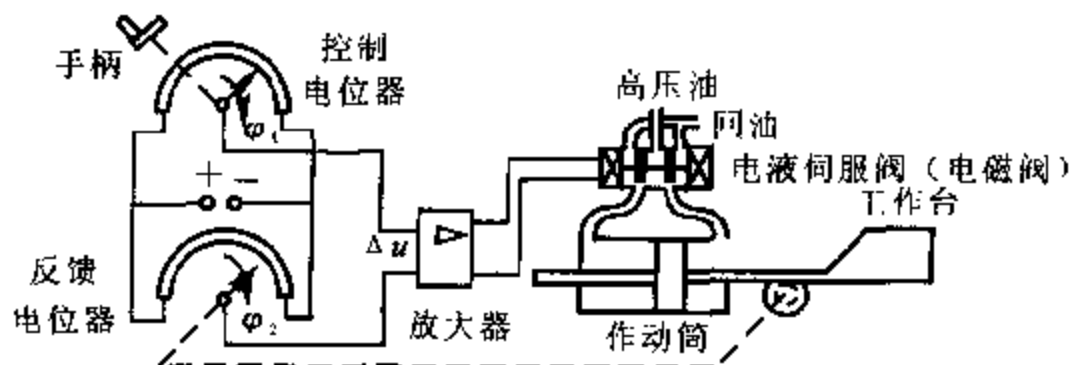


图 1.3.3 工作台液压伺服系统工作原理图

4. 摄像机角位置自动跟踪系统如图 1.3.4 所示。当光点显示器对准某个方向时,摄像机会自动跟踪并对准这个方向。试分析系统的工作原理,指出被控对象、被控量和给定量,画出系统方框图。

5. 图 1.3.5(a),(b) 均为调速系统。

(1) 分别画出图(a),图(b)对应系统的方框图,给出图(a)正确的反馈连线方式。

(2) 在恒值输入条件下,图(a),图(b)中哪个是有差系统,哪个是无差系统,说明其道理。

6. 试判别以下方程描述系统的类型(线性或非线性,定常或时变,动态或静态)。

$$(1) \dot{c}(t) + \cos \omega t c(t) = r(t)$$

$$(2) \ddot{c}(t) + e^{-t} \dot{c}(t) + 2\dot{c}(t) \cdot c(t) = t\dot{r}(t) + r(t)$$

$$(3) \ddot{c}(t) - 2\dot{c}(t) + 4c(t) = 2\dot{r}(t)$$

$$(4) \ddot{c}(t) + \dot{c}(t) + 5c(t) + \int_0^t c(t) dt = 3r(t), \quad c(t) = 0 \quad (t \leq 0)$$

$$(5) c(t) = r^2(t)$$

$$(6) \ddot{c}(t) + 4c(t) = \begin{cases} 4r(t), & 0 \leq t < 1 \\ r(t), & t \geq 1 \end{cases}$$



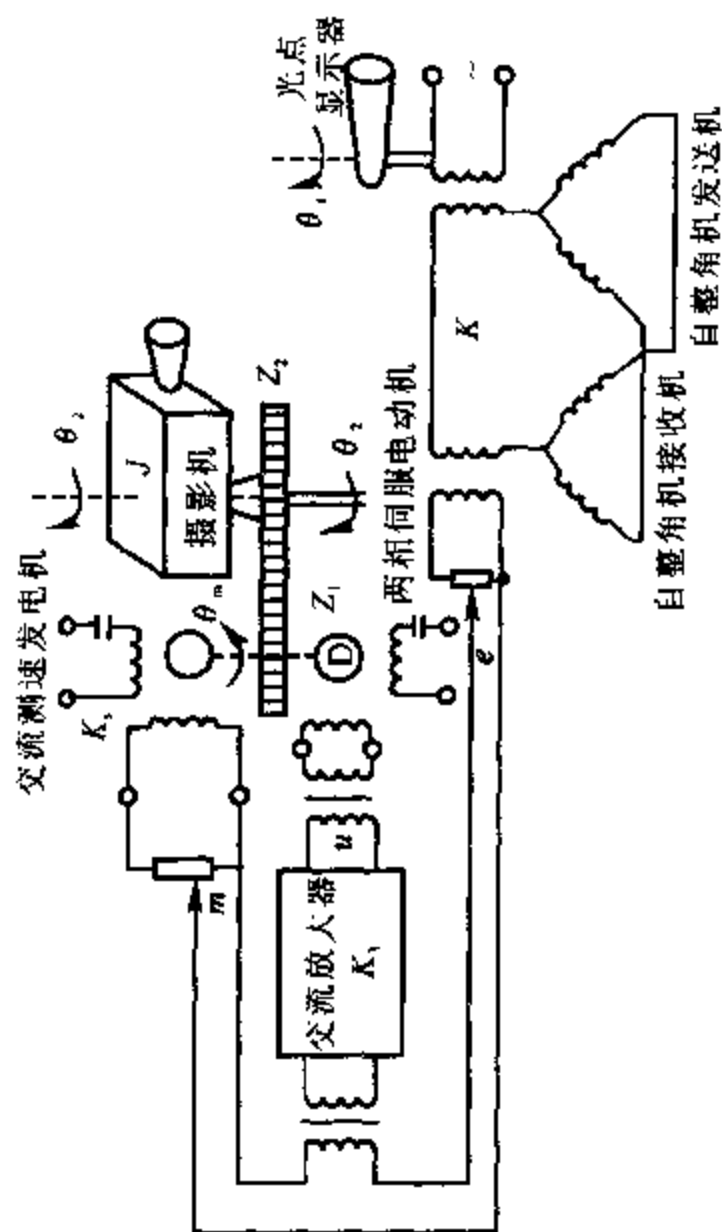


图 1.3.4 摄像机电角位置随动系统原理图

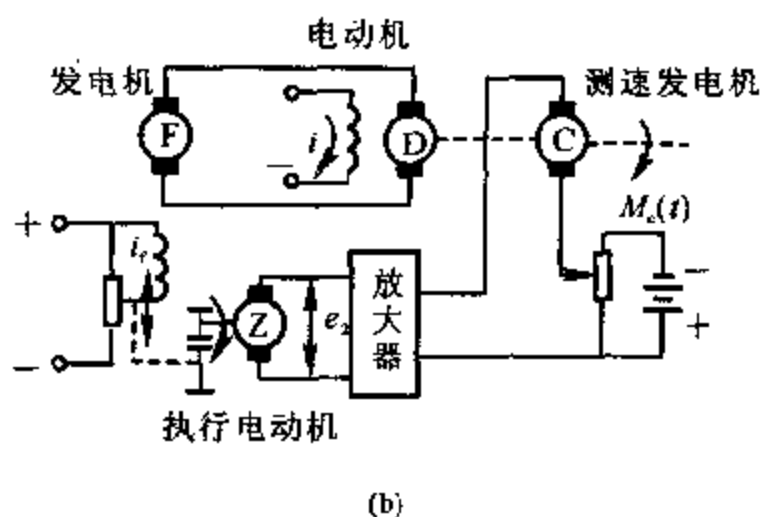
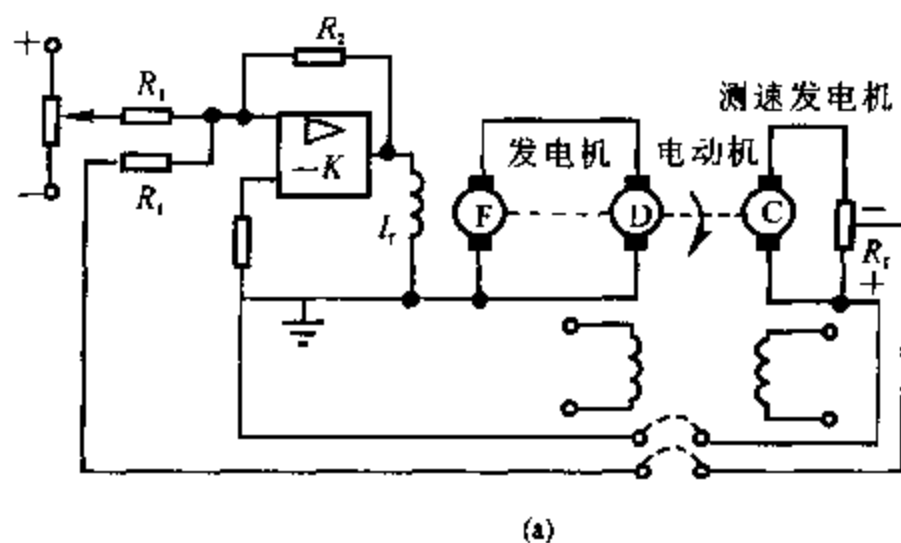
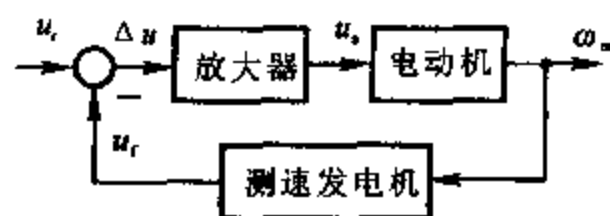


图 1.3.5 调速系统工作原理图

### 1.3.2 典型题解析

1. (1) 负反馈连接方式为:  $a \leftrightarrow d, b \leftrightarrow c$ ;
- (2) 系统方框图如图解 1.3.1 所示。

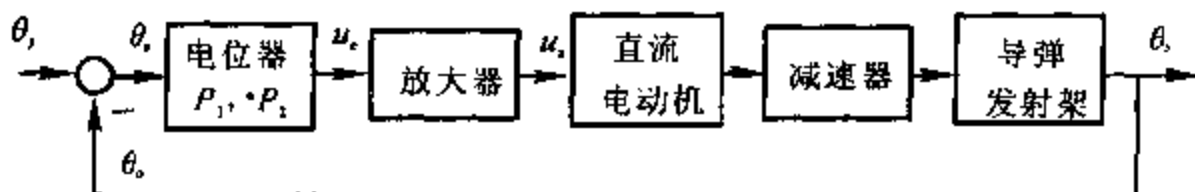


图解 1.3.1 速度控制系统方框图

2. 当导弹发射架的方位角与输入轴方位角一致时, 系统处于相对静止状态。

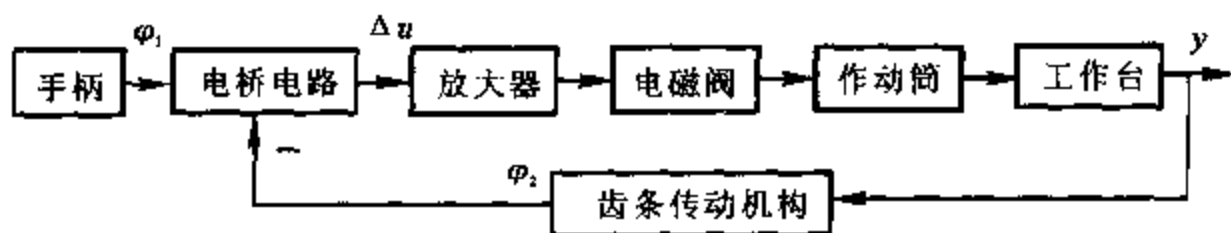
当摇动手轮使电位器  $P_1$  的滑臂转过一个输入角  $\theta_i$  的瞬间, 由于输出轴的转角  $\theta_o \neq \theta_i$ , 于是出现一个误差角  $\theta_e = \theta_i - \theta_o$ , 该误差角通过电位器  $P_1, P_2$  转换成偏差电压  $u_e = u_i - u_o$ ,  $u_e$  经放大后驱动电动机转动, 在带动导弹发射架转动的同时, 通过输出轴带动电位器  $P_2$  的滑臂转过一定的角度  $\theta_o$ , 直至  $\theta_o = \theta_i$  时,  $u_i = u_o$ , 偏差电压  $u_e = 0$ , 电动机停止转动。这时, 导弹发射架停留在相应的方位角上。只要  $\theta_i \neq \theta_o$ , 偏差就会产生调节作用, 控制的结果是消除偏差  $\theta_e$ , 使输出量  $\theta_o$  严格地跟随输入量  $\theta_i$  而变化。

系统方框图如图解 1.3.2 所示。



图解 1.3.2 导弹发射架方位控制系统框图

3. (1) 控制系统的功能是使工作台随控制电位器给定规律移动, 所以被控对象是工作台, 被控量是工作台的位移, 给定量是控制电位器滑臂的转角(表征工作台的希望位置)。系统方框图如图解 1.3.3 所示。



图解 1.3.3 工作台液压伺服系统方框图

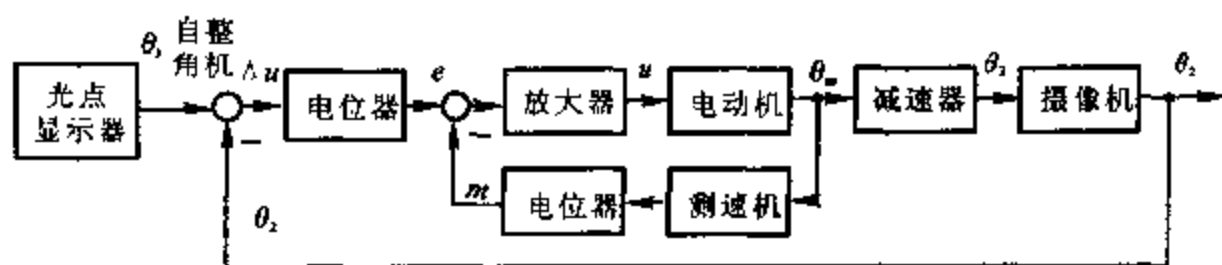
(2) 控制装置各组成部分及其作用如下:

手柄是给定元件, 给出表征工作台希望位置的转角信号  $\varphi_1$ 。齿条齿轮传动机构完成测量元件的功能。由控制电位器、反馈电位器组成的电桥电路完成  $\varphi_1$  和  $\varphi_2$  (表征工作台实际位置) 的比较, 给出偏差电压  $\Delta u$ 。放大器是放大元件, 电磁阀、作动筒组成执行机构, 推动工作台移动。

4. 控制系统的任务是使摄像机自动跟踪光点显示器指示的方向。

当摄像机方向角与光点显示器指示的方向一致时,  $\theta_2 = \theta_1$ , 自整角机输出  $e = 0$ , 交流放大器输出电压  $u = 0$ , 电动机静止, 摄像机保持原来的协调方向。当光点显示器转过一个角度,  $\theta_2 \neq \theta_1$  时, 自整角机输出与失谐角  $\Delta\theta = \theta_1 - \theta_2$  成比例的电压信号(其大小、极性反映了失谐角的幅值和方向), 经电位器后转变成  $e$ , 经放大器放大后驱动伺服电动机旋转, 并通过减速器带动摄像机, 跟踪光点显示器的指向, 使偏差减小, 直到摄像机与光点显示器指向重新达到一致时为止。测速发电机测量电动机转速, 进行速度反馈, 用以改善系统性能。

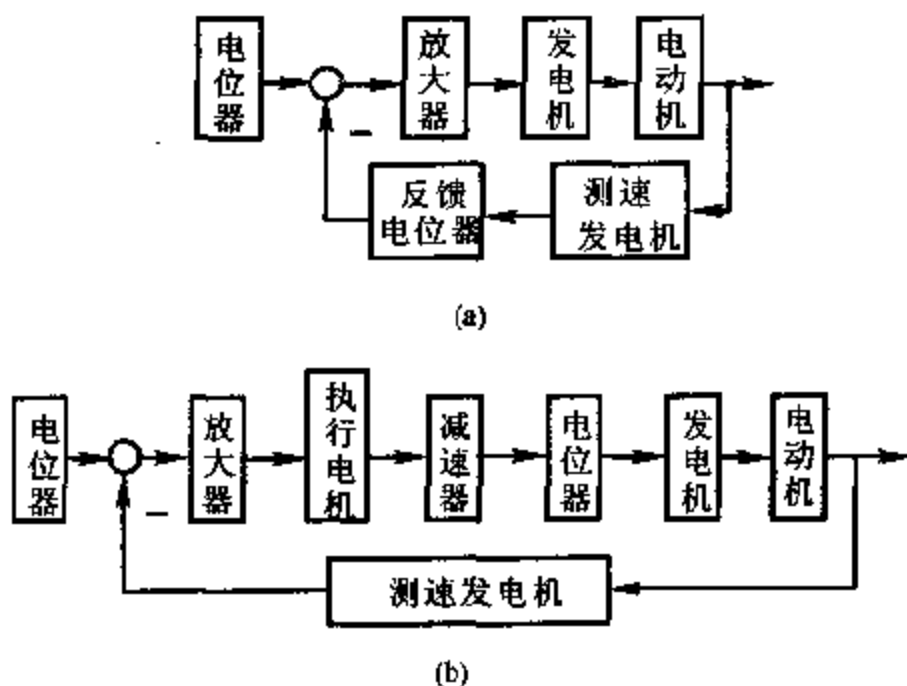
系统中, 摄像机是被控对象, 摄像机的方向角  $\theta_2$  是被控量, 给定量是光点显示器指示的方向角  $\theta_1$ 。系统方框图如图解 1.3.4 所示。



图解 1.3.4 摄像机角位置随动系统方框图

5. (1) 系统方框图如图解 1.3.5 所示。

图 1.3.5(a) 正确的反馈连接方式如图 1.3.5(a) 中虚线所示。



图解 1.3.5 系统方框图

(2) 图 1.3.5(a) 中的系统是有差系统, 图 1.3.5(b) 中的系统是无差系统。

图 1.3.5(a) 中, 当给定恒值电压信号, 系统运行达到稳态时, 电动机转速的恒定是以发电机提供恒定电压为条件的, 对应发电机励磁绕组中电流一定是恒定值。这意味着放大器前端电压是非零的常值。因此, 常值偏差电压存在是系统稳定工作的前提, 故系统有差。

图 1.3.5(b) 中, 在给定系统恒定电压, 电动机恒定转动时, 对应发电机励磁绕组中的励磁电流恒定, 这意味着执行电动机处于停转状态, 放大器前端电压必然为 0, 故系统无差。

6. (1) 线性时变动态系统;
- (2) 非线性时变动态系统;
- (3) 线性定常动态系统;
- (4) 线性定常动态系统;
- (5) 非线性定常静态系统;
- (6) 线性时变动态系统。

## 1.4 课后习题全解

1.4.1 图 1.4.18<sup>\*</sup> 是液位自动控制系统原理示意图。在任何情况下, 希望液面高度  $c$  维持不变, 试说明系统工作原理并画出系统方框图。

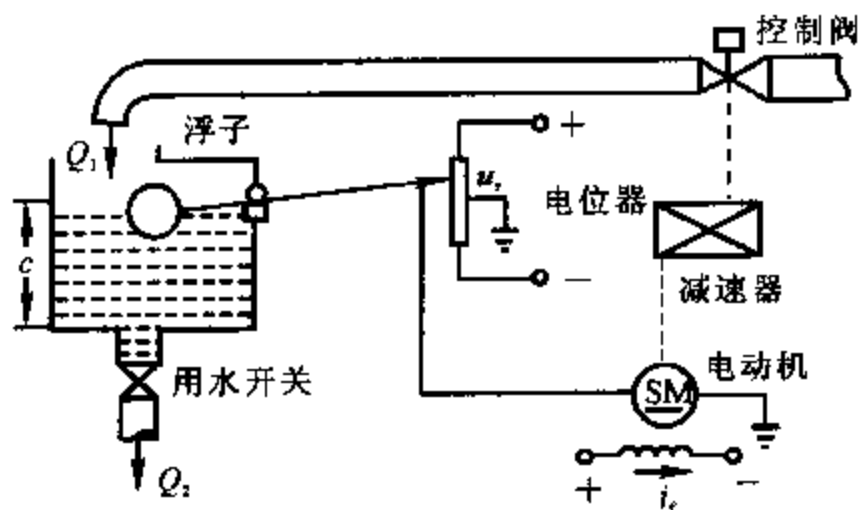


图 1.4.18 液位自动控制系统

\* 本书课后习题全解中的“图号”与《自动控制原理》(科学·第四版)相对应, 以便于读者查阅。

**解** 系统的控制任务是保持液面高度不变。水箱是被控对象,水箱液位是被控量,电位器设定电压  $u_r$  (表征液位的希望值  $c^*$ ) 是给定量。

当电位器电刷位于中点位置(对应  $u_r$ ) 时,电动机不动,控制阀门有一定的开度,使水箱中流入水量与流出水量相等,从而液面保持在希望高度  $c^*$  上。一旦流出水量发生变化(相当于扰动),例如当流出水量减小时,液面升高,浮子位置也相应升高,通过杠杆作用使电位器电刷从中点位置下移,从而给电动机提供一定的控制电压,驱动电动机通过减速器减小阀门开度,使进入水箱的液体流量减少。这时,水箱液面下降,浮子位置相应下降,直到电位器电刷回到中点位置为止,系统重新处于平衡状态,液面恢复给定高度。反之,当流出水量在平衡状态基础上增大时,水箱液位下降,系统会自动增大阀门开度,加大流入水量,使液位升到给定高度  $c^*$ 。

系统方框图如图解 1.4.1 所示。

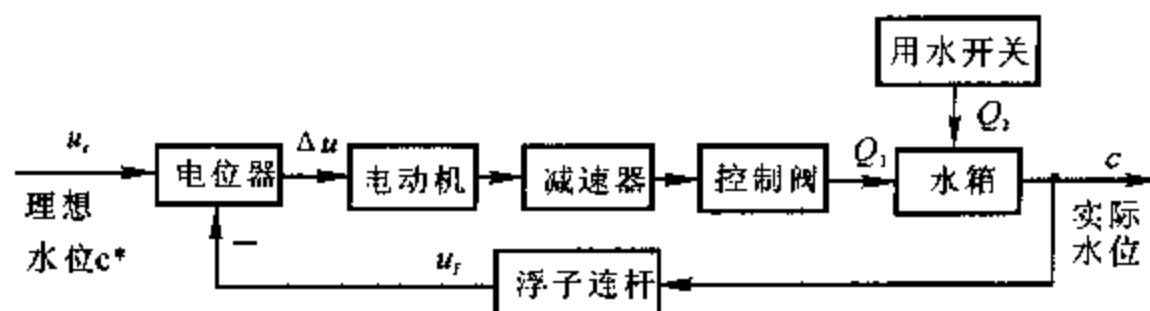


图 解 1.4.1 液位自动控制系统方框图

**1.4.2** 图 1.4.19 是仓库大门自动控制系统原理示意图。试说明系统自动控制大门开闭的工作原理并画出系统方框图。

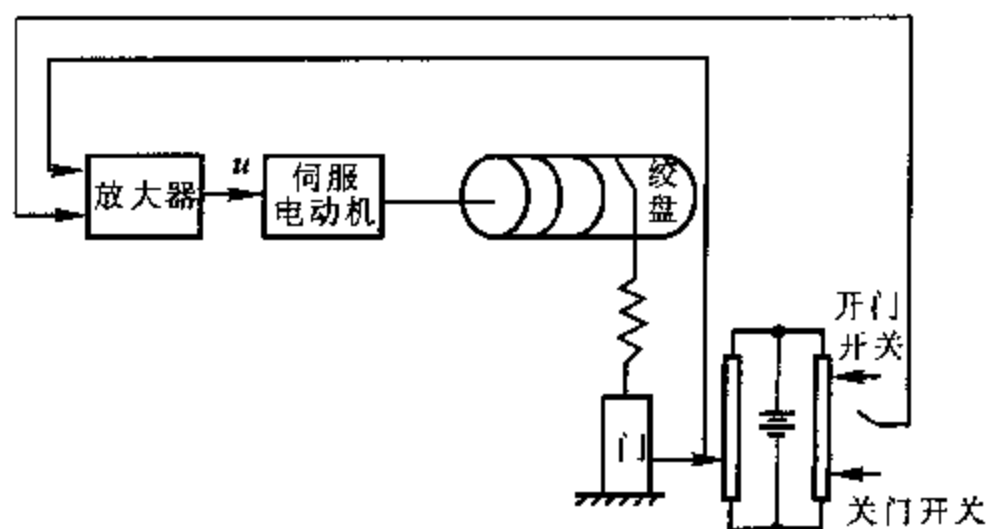


图 1.4.19 仓库大门自动开闭控制系统

**解** 当合上开门开关时,电桥会测量出开门位置与大门实际位置间对应的偏差电压,偏差电压经放大器放大后,驱动伺服电动机带动绞盘转动,将大门向上提起。与此同时,和大门连在一起的电刷也向上移动,直到桥式测量电路达到平衡,电动机停止转动,大门达到开启位置。反之,当合上关门开关时,电动机带动绞盘使大门关闭,从而可以实现大门远距离开闭自动控制。系统方框图如图解 1.4.2 所示。

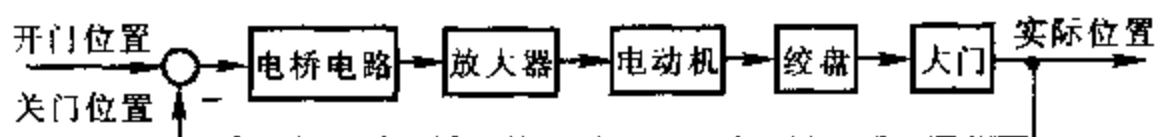


图 1.4.2 仓库大门控制系统方框图

**1.4.3** 图 1.4.20(a) 和(b) 均为自动调压系统。设空载时,图(a) 与图(b) 发电机端电压均为 110 V。试问带上负载后,图(a) 与图(b) 中哪个系统能保持 110 V 电压不变?哪个系统的电压会稍低于 110 V?为什么?

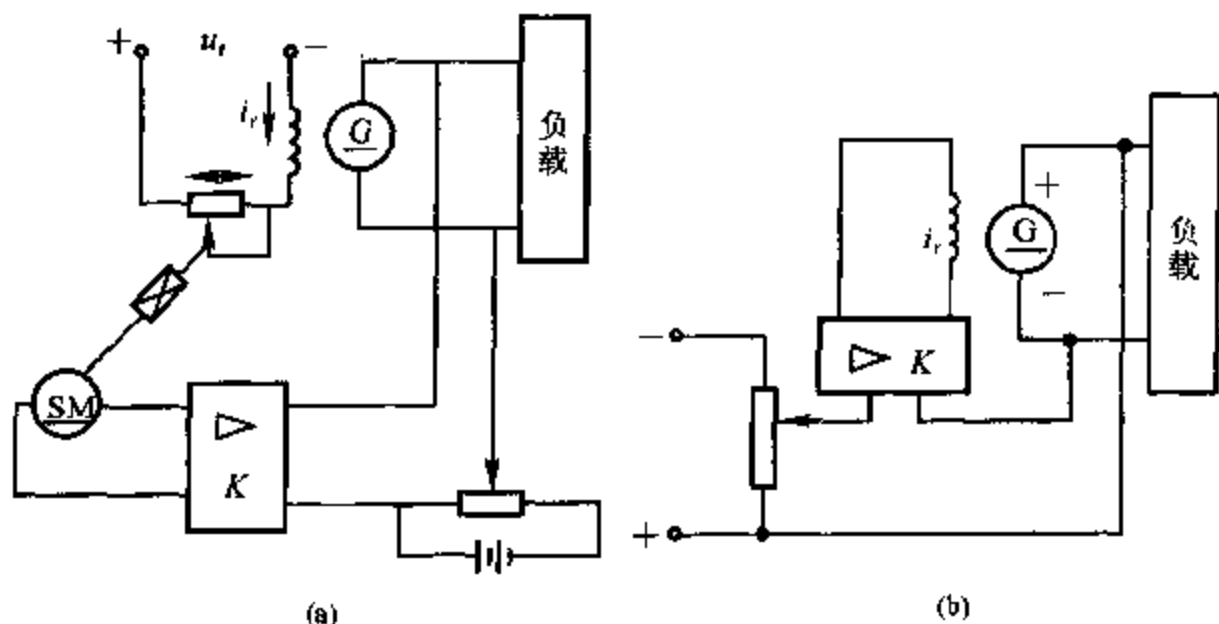


图 1.4.20 自动调压系统

**解** 带上负载后,由于负载的影响,图(a) 与图(b) 中的发电机端电压开始时都要下降,但图(a) 中所示系统的电压能恢复到 110 V,而图(b) 中的系统却不能。理由如下:

对图(a) 所示系统,当输出电压  $u$  低于给定电压时,其偏差电压经放大器  $K$ ,使电机  $SM$  转动,经减速器带动电刷减小发电机  $G$  的激磁回路电阻,使发电

机的励磁电流  $i_f$  增大,提高发电机的端电压,从而使偏差电压减小,直至偏差电压为零时,电机才停止转动。因此,图(a)系统能保持 110 V 电压不变。

对图(b)所示系统,当输出电压  $u$  低于给定电压时,其偏差电压经放大器  $K$ ,直接使发电机励磁电流  $i_f$  增大,提高发电机的端电压,使发电机  $G$  的端电压回升,偏差电压减小,但是偏差电压始终不可能等于零,因为当偏差电压为零时,  $i_f = 0$ ,发电机就不能工作。偏差电压的存在是图(b)系统正常工作的前提条件。即图(b)中系统的输出电压会低于 110 V。

1.4.4 图 1.4.21 为水温控制系统示意图。冷水在热交换器中由通入的蒸汽加热,从而得到一定温度的热水。冷水流量变化用流量计测量。试绘制系统方框图,并说明为了保持热水温度为期望值,系统是如何工作的?系统的被控对象和控制装置各是什么?

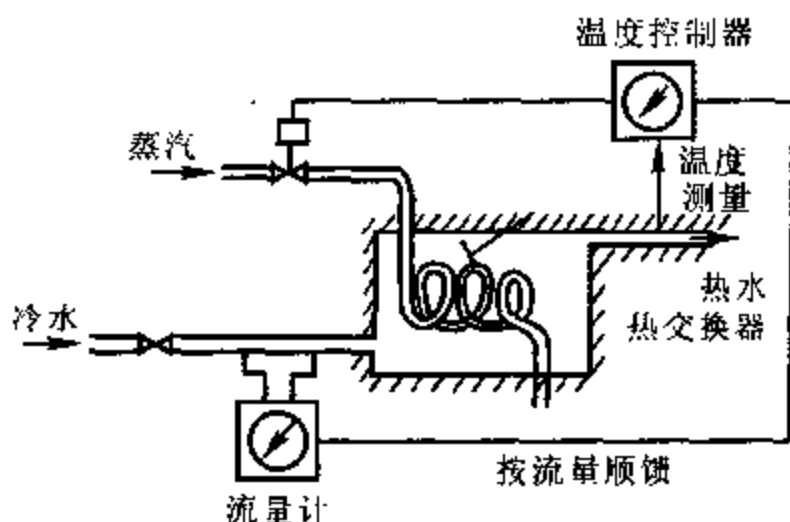


图 1.4.21 水温控制系统原理图

**解** 工作原理:温度传感器不断测量交换器出口处的实际水温,并在温度控制器中与给定温度相比较,若低于给定温度,其偏差值使蒸汽阀门开大,进入热交换器的蒸汽量加大,热水温度升高,直至偏差为零。如果由于某种原因,冷水流量加大,则流量值由流量计测得,通过温度控制器,开大阀门,使蒸汽量增加,提前进行控制,实现按冷水流量进行反馈补偿,保证热交换器出口的水温波动不大。

系统中,热交换器是被控对象,控制装置由控制器(完成比较、运算功能),阀门(执行机构),温度传感器和流量计(测量元件)组成。实际热水温度为被控量,给定量(希望温度)在控制器中设定;冷水流量是干扰量。

系统方框图如图解 1.4.4 所示,这是一个按干扰补偿的复合控制系统。



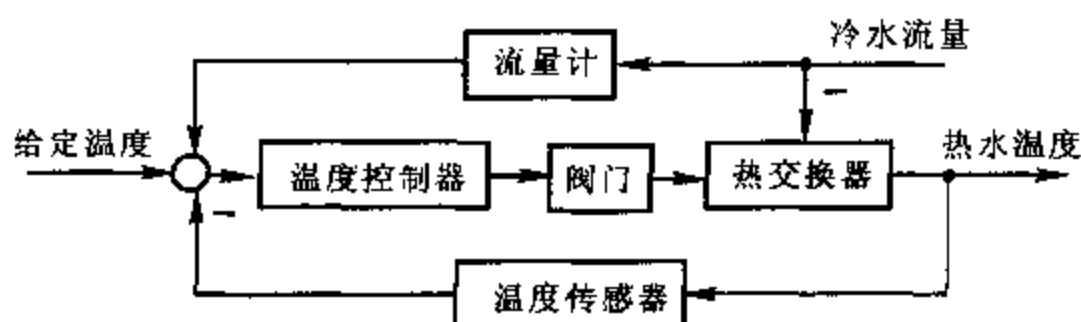


图 解 1.4.4 水温控制系统方框图

**1.4.5** 图 1.4.22 是电炉温度控制系统原理示意图。试分析系统保持电炉温度恒定的工作过程,指出系统的被控对象、被控量以及各部件的作用,最后画出系统方框图。

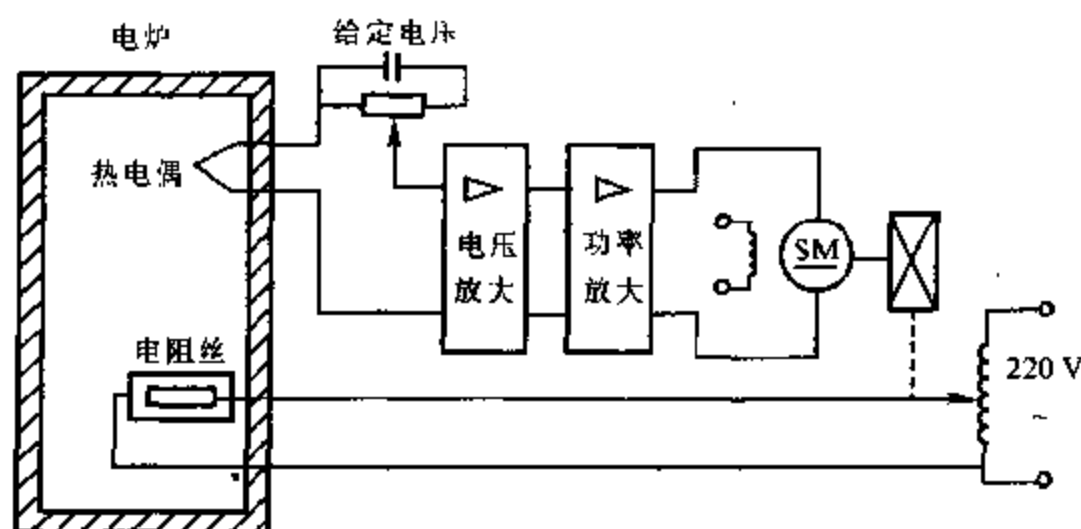


图 1.4.22 电炉温度控制系统原理图

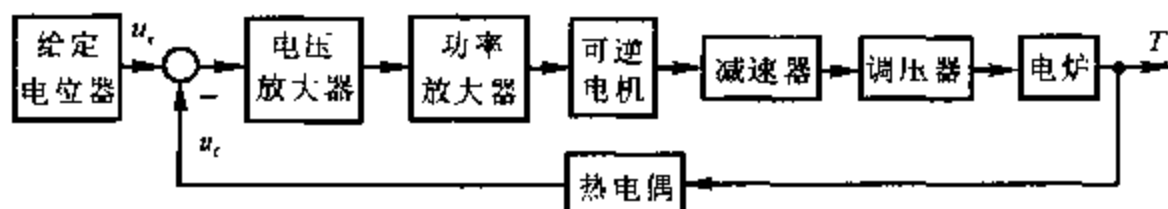
**解** 加热炉采用电加热的方式运行,电阻丝产生的热量与调压器电压平方成正比,电压增高,炉温就上升。调压器电压由其滑动触点位置所控制,滑臂则由伺服电动机驱动。炉子的实际温度用热电偶测量,输出电压作为反馈电压与给定电压进行比较,得出的偏差电压经电压放大器、功率放大器放大后,驱动电动机调节调压器的电压。

在正常情况下,炉温等于期望值  $T$ ,热电偶的输出电压等于给定电压。此时偏差为零,电动机不动,调压器的滑动触点停留在某个合适的位置上。这时,炉子散失的热量正好等于从加热器获取的热量,形成稳定的热平衡状态,温度保持恒定。

当炉温由于某种原因突然下降(例如炉门打开造成热量流失)时,热电偶输出电压下降,与给定电压比较后出现正偏差,经电压放大器、功率放大器放大后,驱动电动机使调压器电压升高,炉温回升,直至温度值等于期望值为止。当炉温受扰动后高于希望温度时,调节的过程正好相反。最终达到稳定时,系统温度可以保持在要求的温度值上。

系统中,加热炉是被控对象,炉温是被控量,给定量是给定电位器设定的电压(表征炉温的希望值)。给定电位计是给定元件,电压放大器、功率放大器共同完成放大元件的功能,电动机、减速器和调压器组成执行机构,热电偶是测量元件。

系统方框图如图解 1.4.5 所示。



图解 1.4.5 电炉温度控制系统方框图

1.4.6 图 1.4.23 是自整角机随动系统原理示意图。系统的功能是使接收自整角机 TR 的转子角位移  $\theta_r$  与发送自整角机 TX 的转子角位移  $\theta_s$  始终保持一致。试说明系统是如何工作的,并指出被控对象、被控量以及控制装置各部件的作用并画出系统方框图。

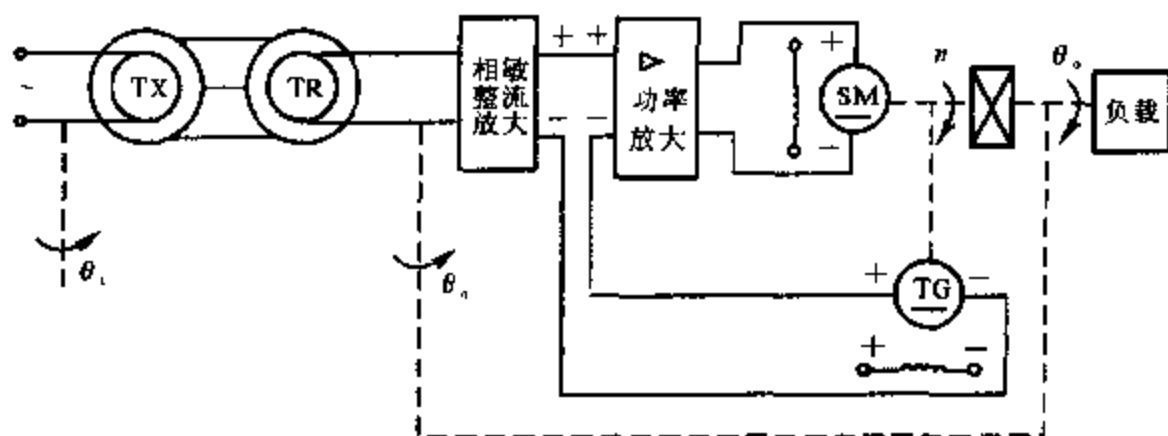


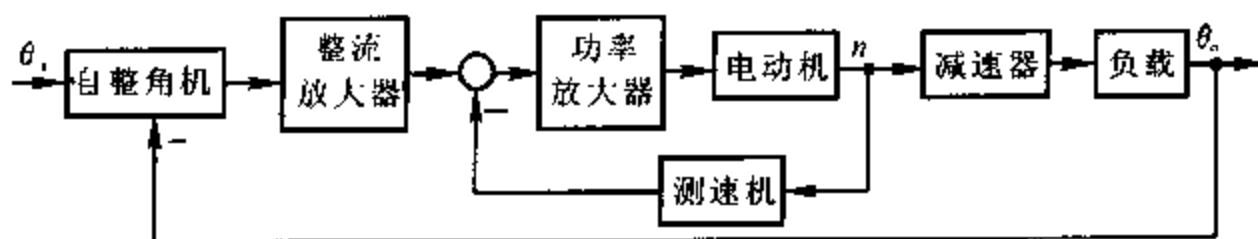
图 1.4.23 自整角机随动系统原理图

**解** 当负载(与接收自整角机 TR 的转子固联)的角位置  $\theta_o$  与发送机 TX 转子的输入角位置  $\theta_s$  一致时,系统处于相对静止状态,自整角机输出电压(即

偏差电压) 为 0, 放大器输出为 0, 电动机不动, 系统保持在平衡状态。当  $\theta_i$  改变时,  $\theta_i$  与  $\theta_o$  失谐, 自整角接收机输出与失谐角成比例的偏差电压, 该偏差电压经整流放大器、功率放大器放大后驱动电动机转动, 带动减速器改变负载的角位置  $\theta_o$ , 使之跟随  $\theta_i$  变化, 直到与  $\theta_i$  一致, 系统达到新的平衡状态时为止。系统中采用测速发电机 TG 作为校正元件, 构成内环反馈, 用于改善系统动态特性。

该系统为随动系统。被控对象是负载; 被控量为负载角位置  $\theta_o$ ; 给定量是发送自整角机 TX 转子的角位置  $\theta_i$ 。自整角机完成测量、比较元件的功能, 整流放大器、功率放大器共同完成放大元件的功能, 电动机 SM 和减速器组成执行机构, 测速发电机 TG 是校正元件。

系统方框图如图解 1.4.6 所示。



图解 1.4.6 自整角机随动系统方框图

1.4.7 在按扰动控制的开环控制系统中, 为什么说一种补偿装置只能补偿一种与之相应的扰动因素? 对于图 1.4.6 按扰动控制的速度控制系统, 当电动机的激磁电压变化时, 转速如何变化? 该补偿装置能否补偿这个转速的变化?

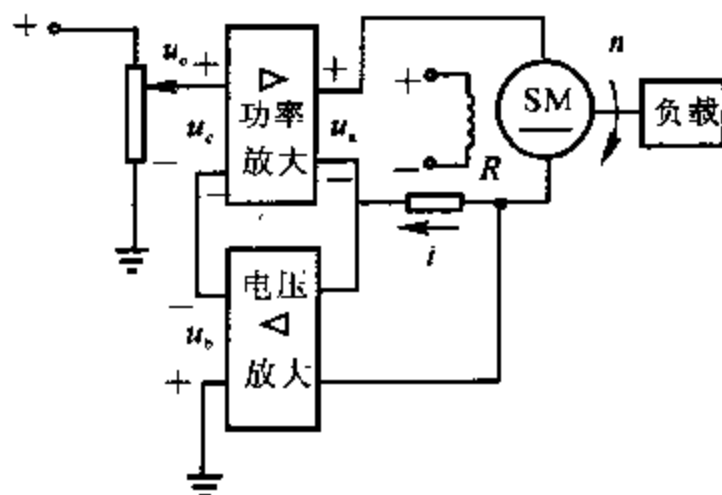


图 1.4.6 按扰动控制的速度控制系统

解 一种补偿装置只能对它所能测量或感应到的扰动因素进行补偿。

图 1.4.6 所示是按电机电枢电流进行补偿的速度控制系统, 当电枢回路电压不

变而电机激磁电压减小时,转速也会减小,但此时反馈电阻上的电流 $i$ 不变,所以,图中补偿装置不能补偿由于激磁电压变化所造成的影响。

**1.4.8** 图 1.4.24 为谷物湿度控制系统示意图。在谷物磨粉的生产过程中,有一个出粉最多的湿度,因此磨粉之前要给谷物加水以得到给定的湿度。图中,谷物用传送装置按一定流量通过加水点,加水量由自动阀门控制。加水过程中,谷物流量、加水前谷物湿度以及水压都是对谷物湿度控制的扰动作用。为了提高控制精度,系统中采用了谷物湿度的顺馈控制,试画出系统方框图。

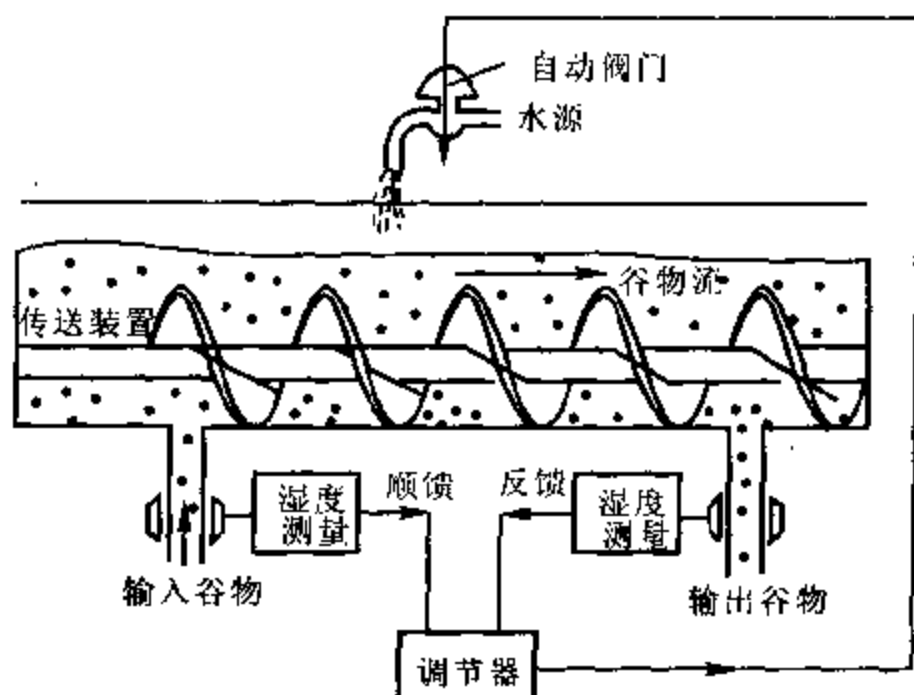
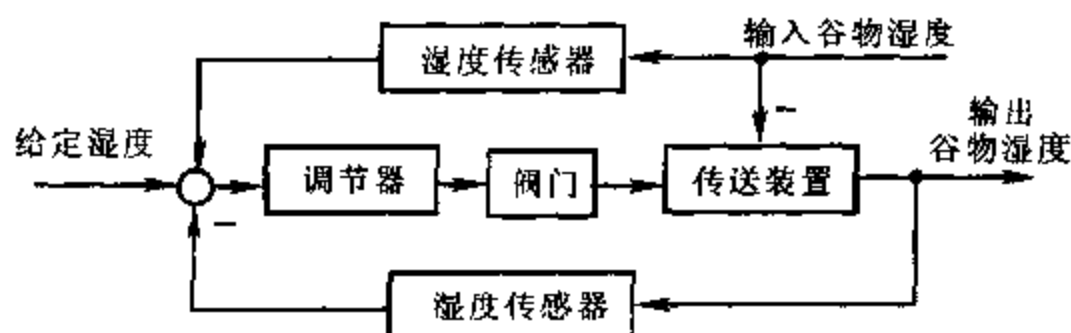


图 1.4.24 谷物湿度控制系统

**解** 系统中,传送装置是被控对象;输出谷物湿度是被控量;希望的谷物湿度是给定量。系统方框图如图解 1.4.8 所示。这是一个按干扰补偿的复合控制系统。



图解 1.4.8 谷物湿度控制系统方框图

**1.4.9** 图 1.4.25 为数字计算机控制的机床刀具进给系统。要求将工件的加工编制成程序预先存入数字计算机,加工时,步进电机按照计算机给出的信息工作,完成加工任务。试说明该系统的工作原理。

**解** 该系统是开环程序控制系统,被控对象为刀具,被控量为刀具位置,给定量是程序设定的刀具位置。计算机按编制的程序调节输出脉冲频率,通过脉冲分配与功率放大装置控制步进电机的转动,从而带动刀具按预定的轨迹进刀,完成加工任务。

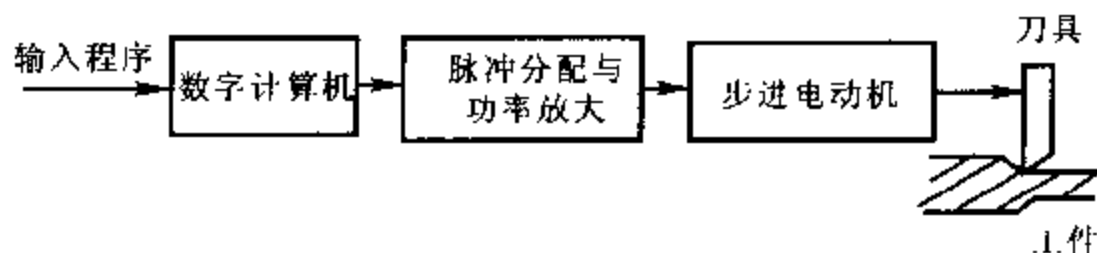


图 1.4.25 机床刀具进给系统

**1.4.10** 下列各式是描述系统的微分方程,其中  $c(t)$  为输出量,  $r(t)$  为输入量,试判断哪些是线性定常或时变系统,哪些是非线性系统?

$$(1) c(t) = 5 + r^2(t) + t \frac{d^2 r(t)}{dt^2}$$

$$(2) \frac{d^3 c(t)}{dt^3} + 3 \frac{d^2 c(t)}{dt^2} + 6 \frac{dc(t)}{dt} + 8c(t) = r(t)$$

$$(3) t \frac{dc(t)}{dt} + c(t) = r(t) + 3 \frac{dr(t)}{dt}$$

$$(4) c(t) = r(t) \cos \omega t + 5$$

$$(5) c(t) = 3r(t) + 6 \frac{dr(t)}{dt} + 5 \int_{-\infty}^t r(\tau) d\tau$$

$$(6) c(t) = r^2(t)$$

$$(7) c(t) = \begin{cases} 0, & t < 6 \\ r(t), & t \geq 6 \end{cases}$$

**解** (1) 非线性时变动态系统;

(2) 线性定常动态系统;

(3) 线性时变动态系统;

(4) 非线性时变静态系统;

(5) 线性定常动态系统;

- 
- (6) 非线性定常静态系统;
  - (7) 线性时变静态系统。

## 第2章 控制系统的数学模型

### 2.1 重点内容提要

#### 2.1.1 微分方程

微分方程是描述各种事物最基本的数学工具,是各种数学描述方法的基础。

##### 1. 微分方程的一般形式

控制系统的微分方程是在时间域内描述动态系统性能的数学模型。线性定常系统或元件微分方程的一般形式为

$$a_n \frac{d^n c(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} c(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dc(t)}{dt} + a_0 c(t) = b_m \frac{d^m r(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} r(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{dr(t)}{dt} + b_0 r(t) \quad (1.1)$$

其中:  $a_n \neq 0$ , 且  $n \geq 1$ ,  $b_0 \neq 0$ ,  $m \geq 0$ , 通常  $n \geq m$ 。

上式左端是输出变量及其各阶导数对应的项,右端是输入变量及其各阶导数对应的项,各项的系数  $a_i$  ( $i = 0, 1, 2, \cdots, n$ ) 和  $b_j$  ( $j = 0, 1, 2, \cdots, m$ ) 均为实数。

##### 2. 建立微分方程的一般步骤

用解析法列写系统或元部件微分方程的一般步骤是:

- (1) 根据系统的具体工作情况,确定系统或元部件的输入、输出变量;
- (2) 从输入端开始,按照信号的传递顺序,依据各变量所遵循的物理(或化学)定律,列出各元部件的动态方程,一般为微分方程组;
- (3) 消去中间变量,写出关于输入、输出变量的微分方程;
- (4) 将微分方程标准化。即将与输入有关的各项放在等号的右侧,与输出有关的各项放在等号的左侧,并按降幂排列。最后将系数归化为具有一定物理意义的形式。

### 3. 非线性方程的线性化

严格来说,实际物理系统或元件都具有不同程度的非线性,所以输出变量与输入变量之间的函数关系应当用非线性动态方程描述。但非线性方程的性质一般比线性方程复杂得多,因此工程上常常在一定条件下将非线性方程近似转化为线性方程,这称为非线性方程的线性化。具体做法可参看参考文献[1]。

### 4. 线性微分方程求解

在给定输入变量形式及初始条件时,可以求得微分方程的解。线性微分方程的求解方法有经典法和拉氏变换法,也可以用计算机求解微分方程。

线性微分方程的解是一个特解与对应的齐次微分方程的解之和。其中齐次微分方程的解代表对象的自由运动,由微分方程的特征根决定。如果  $n$  阶微分方程的特征根是  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , 且没有重根,则函数  $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}$  称为该微分方程所描述的运动的模态,也叫振型。模态只取决于齐次微分方程,与系统的输入变量无关。每一种模态代表一种类型的运动形态,齐次微分方程的解则是它们的线性组合,即

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n e^{\lambda_n t}$$

式中的系数是由初始条件决定的一组常数。特征根  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  则称为各相应模态的极点。如果特征根中有重根,则模态会具有形如  $te^{\lambda}, t^2 e^{\lambda}, \dots$  的函数;如果特征根中有共轭复数,则共轭复模态可写成实函数模态  $e^{\alpha} \sin \beta t$  与  $e^{\alpha} \cos \beta t$  的形式,它们是一对共轭复模态的线性组合。

### 5. 线性系统的重要性质

线性系统满足叠加原理。它有两方面的含义:叠加性和奇次性。

## 2.1.2 传递函数

### 1. 定义

线性定常系统的传递函数是指在零初始条件下,系统输出量的拉氏变换与输入量的拉氏变换之比。所谓零初始条件是指:当  $t < 0$  时,系统的输入  $r(t)$ , 输出  $c(t)$  以及它们的各阶导数均为零。

对微分方程(1.1)的一般形式两端取拉氏变换,并根据定义可得系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_n s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$



## 2. 性质

- (1) 传递函数是以复变量  $s$  为自变量的有理真分式。
- (2) 传递函数只与系统本身的结构参数有关,与外作用的形式无关。
- (3) 传递函数与系统的微分方程之间有相通性,两者之间可以互相转换。
- (4) 传递函数是系统单位脉冲响应的拉氏变换。
- (5) 传递函数与  $s$  平面上一定的零、极点图相对应。

## 3. 局限性

传递函数是对动态系统的外部描述。因此它只适用于描述线性定常的单输入、单输出系统,只直接反映系统在零状态下的动态特性。

## 4. 表示形式

可将传递函数表示成两种标准形式

## (1) 零、极点形式(首 1 型)

$$G(s) = \frac{K^* \prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

式中  $K^*$  —— 根轨迹增益;

$z_j$  —— 系统的零点,  $j = 1, 2, \dots, m$ ;

$p_i$  —— 系统的极点,  $i = 1, 2, \dots, n$ 。

## (2) “典型环节”形式(尾 1 型)

$$G(s) = K \frac{\prod_{k=1}^{m_1} (\tau_k s + 1) \prod_{l=1}^{m_2} (\tau_l^2 s^2 + 2\zeta_l \tau_l s + 1)}{s^v \prod_{i=1}^{n_1} (T_i s + 1) \prod_{j=1}^{n_2} (T_j^2 s^2 + 2\zeta_j T_j s + 1)}$$

式中 每个因子都对应着物理上的一个环节,  $m = m_1 + m_2$  为系统的零点个数;  $n = v + n_1 + n_2$  为系统的极点个数;

$K$  —— 放大(比例)环节,  $K$  与  $K^*$  的关系为

$$K^* = K \frac{\prod_{k=1}^{m_1} \tau_k \prod_{l=1}^{m_2} \tau_l^2}{\prod_{i=1}^{n_1} T_i \prod_{j=1}^{n_2} T_j^2}$$

$\frac{1}{s}$  —— 积分环节;

$\frac{1}{Ts+1}$  —— 惯性(非周期)环节;

$\frac{1}{T^2s^2+2\zeta Ts+1}$  —— 振荡环节 ( $0 < \zeta < 1$ );

$\tau s+1$  —— 一阶微分环节;

$\tau^2s^2+2\zeta\tau s+1$  —— 二阶微分环节 ( $0 < \zeta < 1$ )。

### 2.1.3 结构图

#### 1. 组成

由信号线、环节方框、引出点和比较点等组成。基本定义如图 2.1.1 所示。

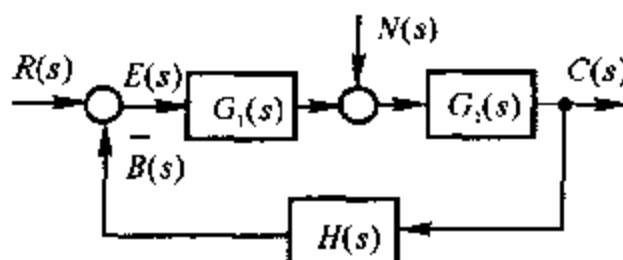


图 2.1.1 系统结构图

#### 2. 特点

- (1) 结构图具有概括性和抽象性,不一定表示某具体系统的物理结构;
- (2) 用结构图可以较直观地研究系统特性,分析各环节对系统性能的影响;
- (3) 同一系统的结构图形式不惟一,但其在输入、输出信号确定后,对应的系统传递函数是惟一的。

#### 3. 绘制

(1) 根据微分方程绘制。其步骤是:首先建立系统各元部件的微分方程;对各元部件的微分方程取拉氏变换,并画出其所对应的结构图;最后将各元部件的结构图按照信号传递顺序连接起来即为系统的结构图。

(2) 根据原理图绘制。其方法是:先将原理图画成方框图;再将方框图中的元部件名称换成相应的传递函数即得系统的结构图。需要说明的是应用这种方法绘制结构图的前提是:系统中各元部件的传递函数是已知的。

#### 4. 等效变换

有关结构图等效变换的一般规则见表 2.1。

表 2.1 结构图简化(等效变换)规则

变换方式	原方框图	等效方框图	等效运算关系
串联			$C(s) = G_1(s)G_2(s)R(s)$
并联			$C(s) = [G_1(s) \pm G_2(s)]R(s)$
反馈			$C(s) = \frac{G_1(s)R(s)}{1 \mp G_1(s)G_2(s)}$
比较点前移			$C(s) = R(s)G(s) \pm Q(s) = [R(s) \pm \frac{Q(s)}{G(s)}]G(s)$
比较点后移			$G(s) = [R(s) \pm Q(s)]G(s) = R(s)G(s) \pm Q(s)G(s)$
引出点前移			$C(s) = G_1(s)R(s)$
引出点后移			$R(s) = R(s)G(s) \frac{1}{G(s)}$ $C(s) = G(s)R(s)$
比较点与引出点之间的移动			$C(s) = R_1(s) - R_2(s)$

### 2.1.4 信号流图

信号流图是一种表达线性代数方程组结构的图形。它与结构图本质上没有什么区别,只是形式上不同。

信号流图中的有关术语:源节点、阱节点、混合节点、前向通路、回路和不接触回路。

### 2.1.5 梅森增益公式

应用梅森增益公式可以不经任何结构变换,直接求取系统从输入到输出的传递函数。此方法不仅适用于信号流图,同样适用于系统的结构图。

$$\text{即} \quad \Phi(s) = \frac{\sum_{k=1}^m P_k \Delta_k}{\Delta}$$

式中  $m$ ——前向通路总数;

$\Delta$ ——特征式,  $\Delta = 1 - \sum L_i + \sum L_i L_j - \sum L_i L_j L_k + \dots$ ;

$P_k$ ——从输入端到输出端第  $k$  条前向通路的传递函数;

$\Delta_k$ ——在  $\Delta$  中,将与第  $k$  条前向通路相接触的回路所在项除去后所余下的部分,称对应第  $k$  条前向通路的余子式。

$\Delta$ (特征式)中:

$\sum L_i$ ——所有不同回路的传递函数之和;

$\sum L_i L_j$ ——所有两两互不接触回路的传递函数乘积之和;

$\sum L_i L_j L_k$ ——所有三个互不接触回路的传递函数乘积之和。

### 2.1.6 控制系统的传递函数

在图 2.1.1 中:

(1) 系统的开环传递函数

$$G_R(s) = \frac{B(s)}{E(s)} = G_1(s)G_2(s)H(s)$$

(2) 输入信号作用下系统的闭环传递函数

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

(3) 输入信号作用下系统的误差传递函数

$$\Phi_e(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

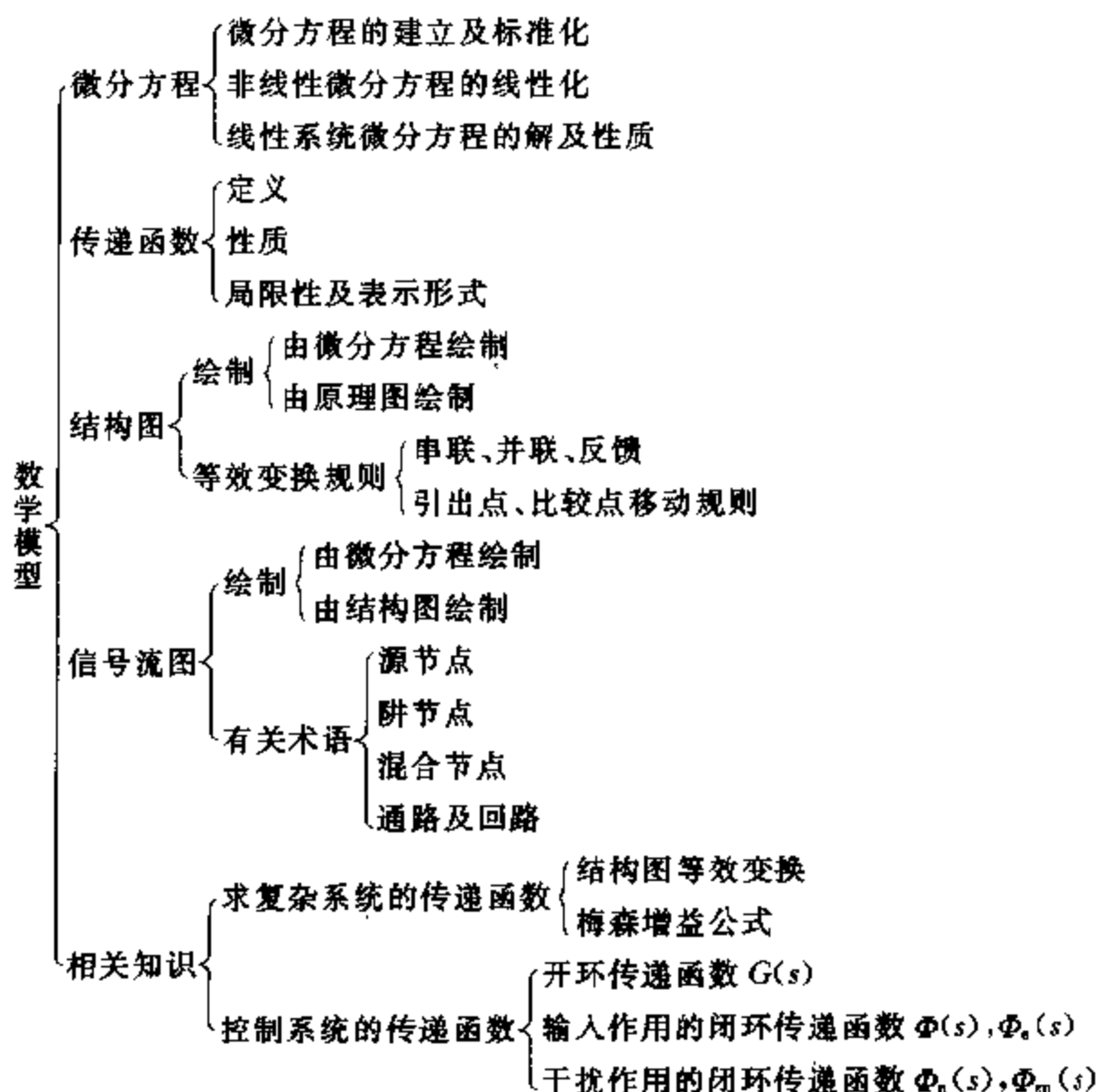
(4) 干扰信号作用下系统的闭环传递函数

$$\Phi_z(s) = \frac{C(s)}{N(s)} = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

(5) 干扰信号作用下系统的误差传递函数

$$\Phi_{ez}(s) = \frac{E(s)}{N(s)} = \frac{-G_2(s)H(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

## 2.2 知识结构图



## 2.3 考点及典型题选解

本章主要考点有建立控制系统的微分方程;传递函数的概念;结构图等变换及求复杂系统的传递函数。

### 2.3.1 典型题

1. 试建立图 2.3.1 所示各系统的微分方程。图中电压  $u_r$  和外力  $F(t)$  为输入量,电压  $u_c$  和位移  $y(t)$  为输出量。

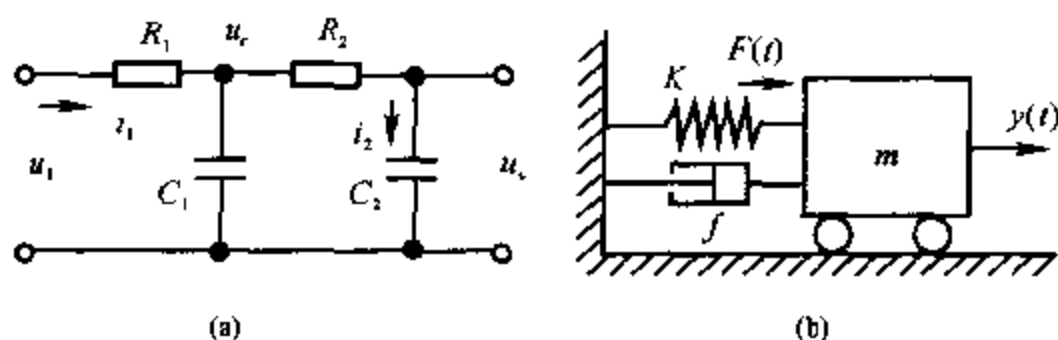


图 2.3.1 系统原理图

2. 一机械系统如图 2.3.2(a) 所示。 $F(t)$  为外作用力,  $y_1(t)$  和  $y_2(t)$  分别为质量  $m_1$  和  $m_2$  的输出位移。试求以  $F(t)$  为输入量,  $y_1(t)$  和  $y_2(t)$  分别为输出量的微分方程表达式。

3. 若某系统在阶跃输入作用  $r(t) = 1(t)$  时, 系统在零初始条件下的输出响应为

$$c(t) = 1 - 2e^{-2t} + e^{-t}$$

试求系统的传递函数和脉冲响应。

4. 试求图 2.3.3 所示各信号  $x(t)$  的像函数  $X(s)$ 。

5. 已知某控制系统由以下方程式组成, 试绘制出该系统的结构图并求出其传递函数  $Y(s)/R(s)$ 。

$$X_1(s) = G_1(s)R(s) - G_1(s)[G_7(s) - G_8(s)]Y(s)$$

$$X_2(s) = G_2(s)[X_1(s) - G_6(s)X_3(s)]$$

$$X_3(s) = [X_2(s) - G_5(s)Y(s)]G_3(s)$$

$$Y(s) = G_4(s) X_3(s)$$

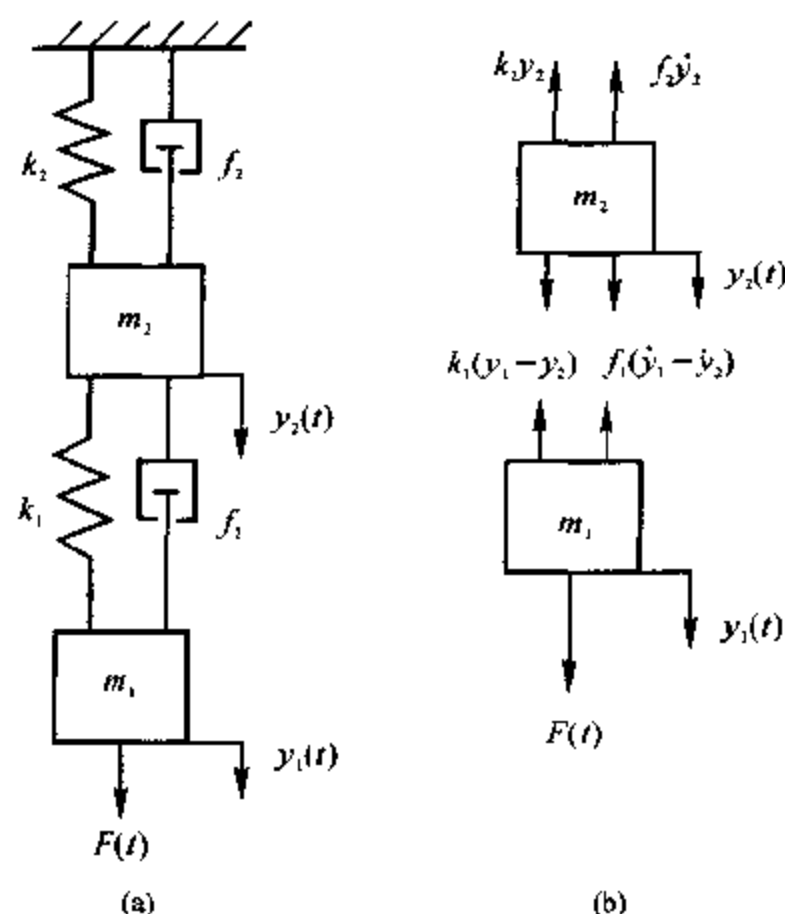


图 2.3.2 机械系统示意图及受力分析

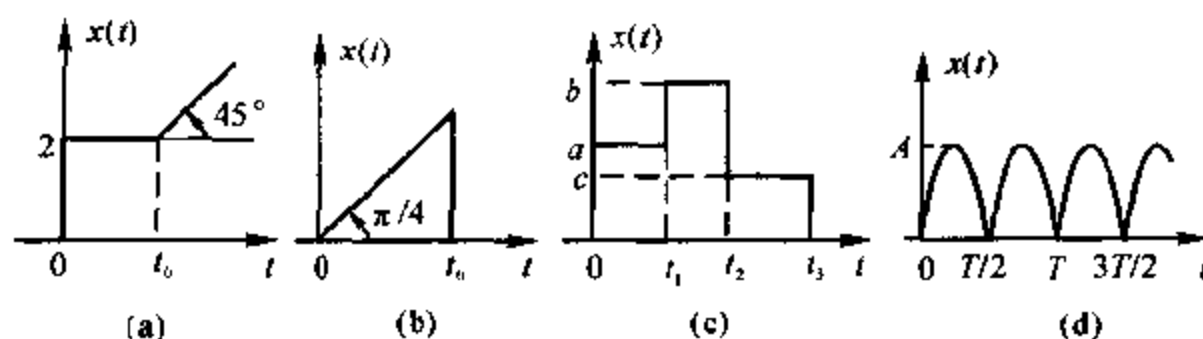


图 2.3.3 信号图

6. 图 2.3.4 所示为一直流位置随动系统的原理框图, 图中  $\theta_i$  为输入角度,  $\theta_o$  为输出角度; SM 为伺服电动机,  $T_L$  为负载转矩, TG 为测速发动机, TV 为电压传感器, TA 为电流传感器;  $\alpha$ ,  $\beta$  和  $\gamma$  分别为转速反馈系数、电流反馈系数和电压反馈系数;  $K_1$ ,  $K_w$ ,  $K_i$ ,  $K_v$  和  $K_s$ , 分别是前置放大器、速度放大器、电流放大器、电压放大器和功率放大器的放大系数, 减速器速比为  $1:\lambda$ 。

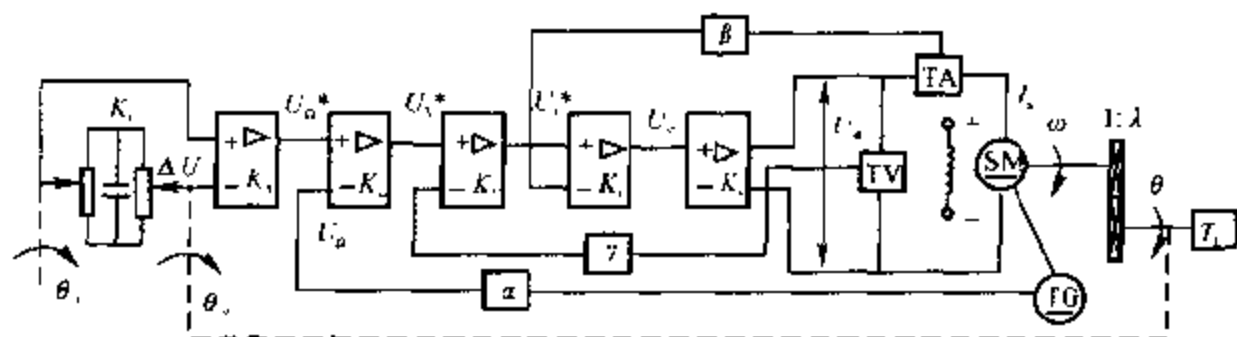


图 2.3.4 位置随动系统原理框图

(1) 试列写各部件的传递函数；

(2) 求出系统的闭环传递函数  $G(s) = \Theta_o(s)/\Theta_i(s)$ 。

7. 已知控制系统的结构图如图 2.3.5 所示。试利用结构图化简和梅森增益公式求系统的传递函数。

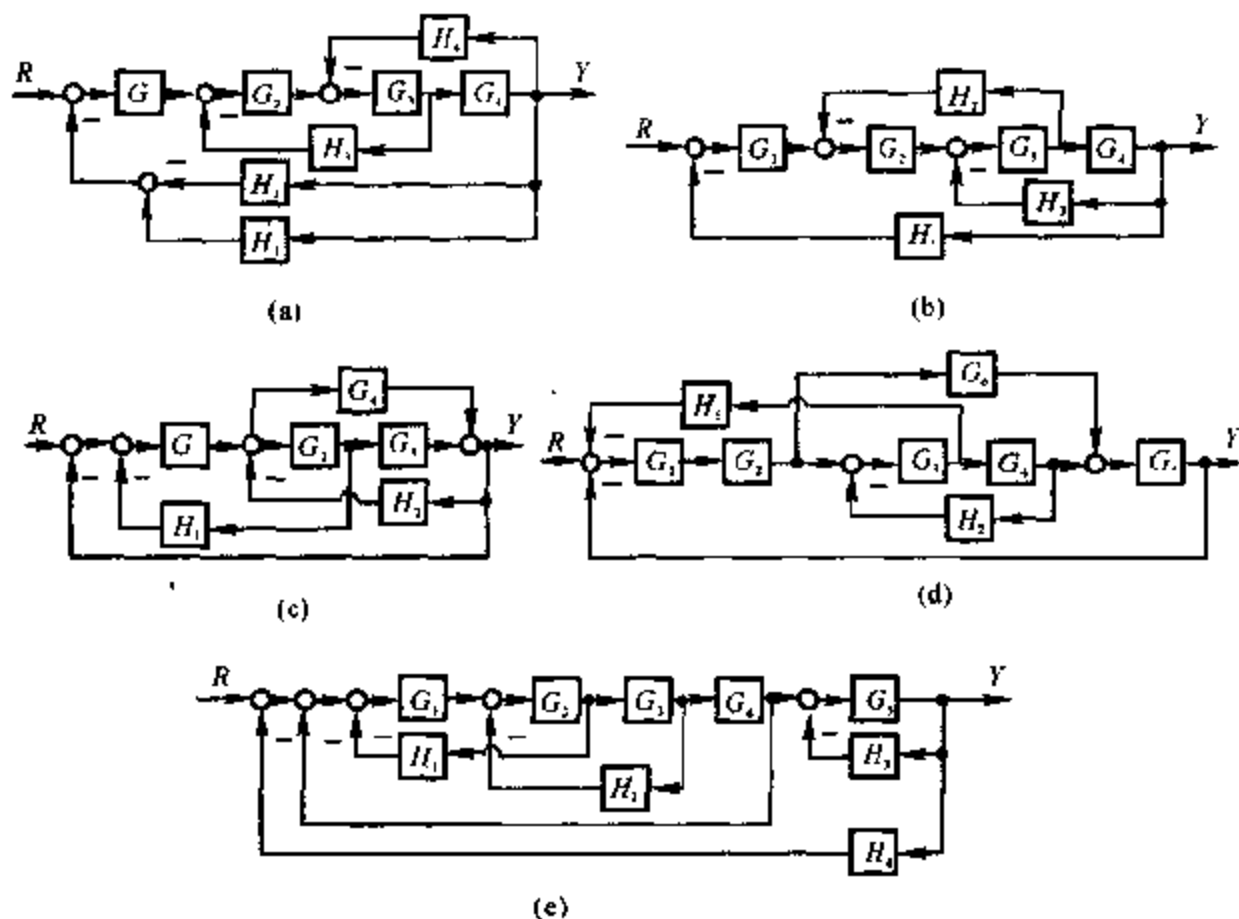


图 2.3.5 系统结构图



8. 已知系统结构图如图 2.3.6 所示, 初始条件为:  $c(0) = -1, \dot{c}(0) = 0$ 。试计算当  $r(t) = 1(t), n(t) = \delta(t)$  时系统的总输出  $c(t)$  和总偏差  $e(t)$ 。

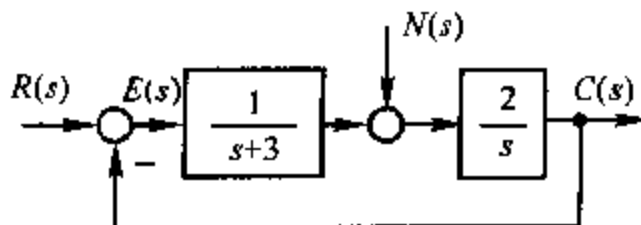


图 2.3.6 系统结构图

9. 已知系统结构图如图 2.3.7 所示, 图中  $N(s)$  为干扰量,  $R(s)$  为输入量。

(1) 求传递函数  $\frac{C(s)}{R(s)}$  和  $\frac{C(s)}{N(s)}$ ;

(2) 若要消除干扰对系统输出的影响 (即  $\frac{C(s)}{N(s)} = 0$ ), 试确定  $G_0(s)$  的表达式。

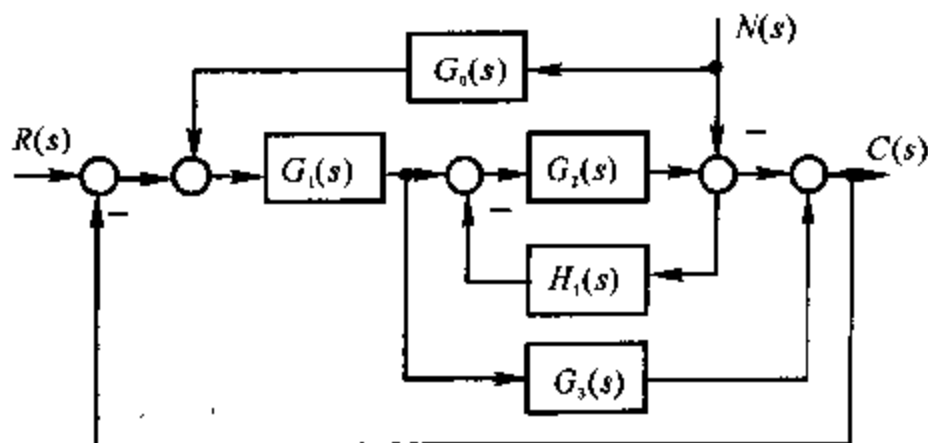


图 2.3.7 系统结构图

### 2.3.2 典型题解析

1. (a)  $R_1 C_1 R_2 C_2 \frac{d^2 u_c}{dt^2} + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2) \frac{du_c}{dt} + u_c = u,$

(b)  $\frac{m}{K} \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{f}{K} \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \frac{F(t)}{K}$

2. 质量  $m_1$  和  $m_2$  的受力情况如图 2.3.2(b) 所示, 由牛顿定律可写出

$$m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} + f_1 \frac{dy_1}{dt} + k_1 y_1 = f_1 \frac{dy_2}{dt} + k_1 y_2 + F(t)$$

$$m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} + (f_1 + f_2) \frac{dy_2}{dt} + (k_1 + k_2) y_2 = f_1 \frac{dy_1}{dt} + k_1 y_1 \quad \bullet$$

$$3. \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{3s+2}{(s+1)(s+2)}, \quad k(t) = 4e^{-2t} - e^{-t}$$

$$4. \text{图 2.3.3(a)} \quad X(s) = \frac{2}{s} + \frac{1}{s^2} e^{-t_0 s}$$

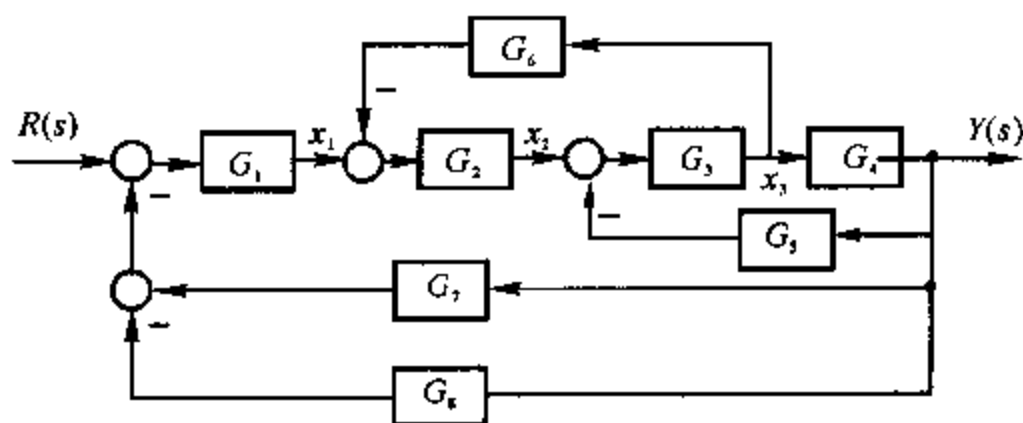
$$\text{图 2.3.3(b)} \quad X(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2} (1 - t_0 s) e^{-t_0 s}$$

$$\text{图 2.3.3(c)} \quad X(s) = \frac{1}{s} [a + (b-a)e^{-t_1 s} + (c-b)e^{-t_2 s} - ce^{-t_3 s}]$$

$$\begin{aligned} \text{图 2.3.3(d)} \quad X(s) &= \frac{A \times \frac{2\pi}{T}}{s^2 + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2} (1 + e^{-\frac{T}{2}s}) \frac{1}{1 - e^{-\frac{T}{2}s}} = \\ &= \frac{A \times \frac{2\pi}{T}}{s^2 + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2} \coth\left(\frac{T}{4}s\right) \end{aligned}$$

$$5. \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_1 G_2 G_3 G_4}{1 + G_2 G_3 G_6 + G_3 G_4 G_5 + G_1 G_2 G_3 G_4 G_7 - G_1 G_2 G_5 G_4 G_8}$$

画出系统的结构图如图解 2.3.5 所示。



图解 2.3.5 系统结构图

$$6. (1) \text{① 同位仪检测装置: } \frac{\Delta U(s)}{\Delta \Theta(s)} = K_t, \Delta \Theta(s) = \Theta_1(s) - \Theta_0(s)$$

$$\text{② 前置放大器: } \frac{U_0^*(s)}{\Delta U(s)} = K_1$$

③ 速度放大器:  $\frac{U_v^*(s)}{U_n^*(s) - U_n(s)} = K_u$

④ 电压放大器:  $\frac{U_i^*(s)}{U_v^*(s) - U_v(s)} = K_v$

⑤ 电流放大器:  $\frac{U_{ci}(s)}{U_i^*(s) - U_i(s)} = K_i$

⑥ 功率放大器:  $\frac{U_{ds}(s)}{U_{ci}(s)} = K_s$

⑦ 直流伺服电动机:  $\frac{\omega(s)}{I_a(s)} = \frac{R}{C_e T_m s}, T_m = \frac{J R}{C_e C_m}$

⑧ 减速机构:  $\frac{\theta_o(s)}{\omega(s)} = \frac{1}{\lambda s}$

⑨ 各检测单元:

速度检测单元:  $U_n(s)/\Omega(s) = \alpha$

电压检测单元:  $U_v(s)/U_d(s) = \gamma$

电流检测单元:  $U_i(s)/I_a(s) = \beta$

(2)  $G(s) = \frac{\Theta_o(s)}{\Theta_i(s)} = \frac{K_t K_i K_u K_s K_v K_i K_s R R_a (T_{ls} + 1)}{\Delta}$

其中  $\Delta = C_e T_m R R_a \lambda s^2 (T_{ls} + 1)(T_{ls} + 1) + C_e R^2 \lambda s (T_{ls} + 1) +$   
 $K_i K_s \beta C_e T_m R_a \lambda s^2 (T_{ls} + 1) +$   
 $K_v K_i K_s \gamma C_e T_m R_a^2 \lambda s^2 (T_{ls} + 1)^2 + K_v K_i K_s \gamma C_e R R_a \lambda s (T_{ls} + 1) +$   
 $K_u K_v K_i K_s \alpha R R_a \lambda s (T_{ls} + 1) + K_t K_i K_u K_s K_v K_i K_s R R_a (T_{ls} + 1)$

7. (a)  $G = \frac{G_1 G_2 G_3 G_4}{1 + G_2 G_3 H_3 + G_3 G_4 H_4 + G_1 G_2 G_3 G_4 H_1 - G_1 G_2 G_3 G_4 H_2}$

(b)  $G = \frac{G_1 G_2 G_3 G_4}{1 + G_1 G_2 G_3 G_4 H_1 + G_2 G_3 H_2 + G_3 G_4 H_3}$

(c)  $G = \frac{G_1 (G_2 G_3 + G_4)}{1 + G_1 G_2 H_1 + G_2 G_3 H_2 + G_1 G_2 G_3 + G_4 H_2 + G_1 G_4}$

(d)  $G = \frac{G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 + G_1 G_2 G_5 G_6 + G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 G_6 H_2}{\Delta}$ , 其中

$\Delta = 1 + G_1 G_2 G_3 H_1 + G_3 G_4 H_2 + G_1 G_3 G_3 G_4 G_5 + G_1 G_2 G_5 G_6 +$   
 $G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 G_6 H_2$

(e)  $G = \frac{G_1 G_2 G_3 G_4 G_5}{\Delta}$ , 其中

$\Delta = 1 + G_1 G_2 H_1 + G_2 G_3 H_2 + G_1 G_2 G_3 G_4 + G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 H_4 + G_5 H_3 +$

$$G_1 G_2 G_5 H_1 H_3 + G_2 G_2 G_5 H_2 H_3 + G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 H_3$$

$$8. C(t) = 1 - 5e^{-t} + 4e^{-2t}$$

$$e(t) = 5e^{-t} - 4e^{-2t}$$

$$9. (1) \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1 G_2 + G_1 G_1 (1 + G_2 H_2)}{1 + G_2 H_1 + G_1 G_2 + G_1 G_3 + G_1 G_2 G_3 H_1}$$

$$\frac{C(s)}{N(s)} = \frac{G_0 (G_1 G_2 + G_1 G_3 + G_1 G_2 G_3 H_1) - 1 - G_2 H_1}{1 + G_2 H_1 + G_1 G_2 + G_1 G_3 + G_1 G_2 G_3 H_1}$$

$$(2) G_0 = \frac{1 + G_2 H_1}{G_1 G_2 + G_1 G_3 + G_1 G_2 G_3 H_1}$$

## 2.4 课后习题全解

**2.4.1** 在图 1.4.18 的液位自动控制系统中,设容器横截面积为  $F$ ,希望液位为  $c_0$ 。若液位高度变化率与液体流量差  $\theta_1 - \theta_2$  成正比,试列写以液位为输出量的微分方程式。

**解** 设液位为  $c$  时,容器中液体的体积为  $V$ ,则有

$$V = cF$$

当  $\theta_1 = \theta_2$  时,液位为  $c_0$ ;当  $\theta_1 \neq \theta_2$  时,液位的高度  $c$  将发生变化,其变化率与液量差  $\theta_1 - \theta_2$  成正比时,依题意有

$$F \frac{dc}{dt} = \frac{dV}{dt} = \theta_1 - \theta_2$$

所以 
$$\frac{dc}{dt} = \frac{1}{F} (\theta_1 - \theta_2)$$

**2.4.2** 设机械系统如图 2.4.57 所示,其中  $x_1$  是输入位移,  $x_0$  是输出位移。试分别列写各系统的微分方程式。

**解** (a) 取隔离体进行受力分析,如图解 2.4.2(a) 所示。根据牛顿定律,在不考虑重力时,可得

$$f_1 \left( \frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_2}{dt} \right) - f_2 \frac{dx_0}{dt} = m \frac{d^2 x_0}{dt^2}$$

整理得 
$$m \frac{d^2 x_0}{dt^2} + (f_1 + f_2) \frac{dx_0}{dt} = f_1 \frac{dx_1}{dt}$$

(b) 在图 2.4.57 中取  $A, B$  两点为辅助点,并假设  $A$  点位移为  $x$ ,则  $A, B$  两点受力如图解 2.4.2(b) 所示,可得

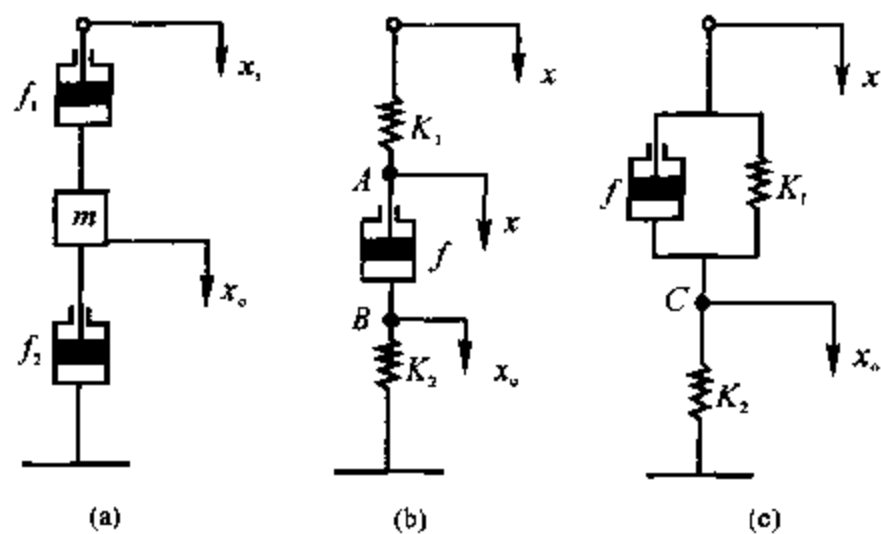
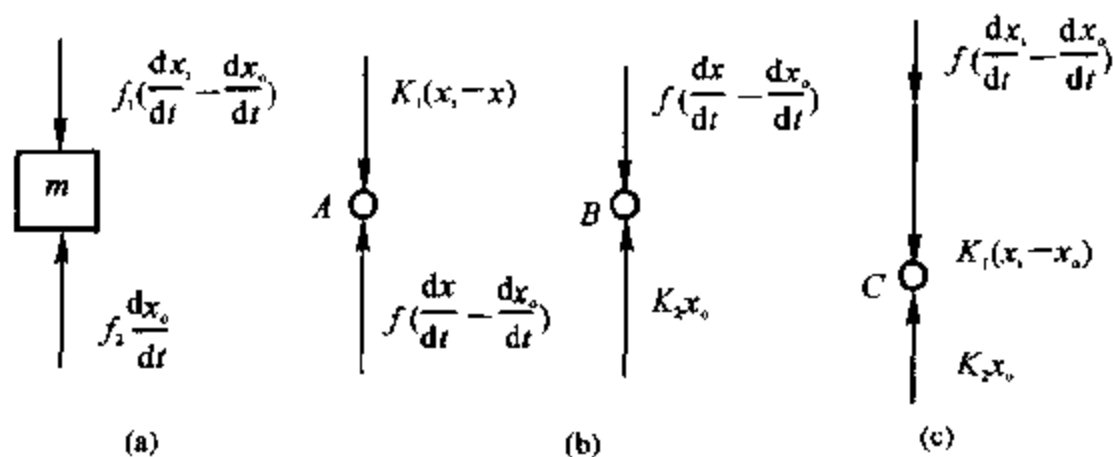


图 2.4.57 机械系统



图解 2.4.2

$$K_1(x_1 - x) = f\left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx_0}{dt}\right)$$

$$K_2x_0 = f\left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx_0}{dt}\right)$$

消去中间变量  $x$ , 整理得

$$f(K_1 + K_2) \frac{dx_0}{dt} + K_1 K_2 x_0 = K_1 f \frac{dx_1}{dt}$$

(c) 在图 2.4.57 中取 C 点为辅助点, 其受力如图解 2.4.2(c) 所示, 则有

$$K_1(x_1 - x_0) + f\left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_0}{dt}\right) = K_2x_0$$

整理得

$$f \frac{dx_o}{dt} + (K_1 + K_2)x_o = f \frac{dx_i}{dt} + K_1 x_i$$

2.4.3 试证明图 2.4.58(a) 的电网络与(b) 的机械系统有相同的数学模型。

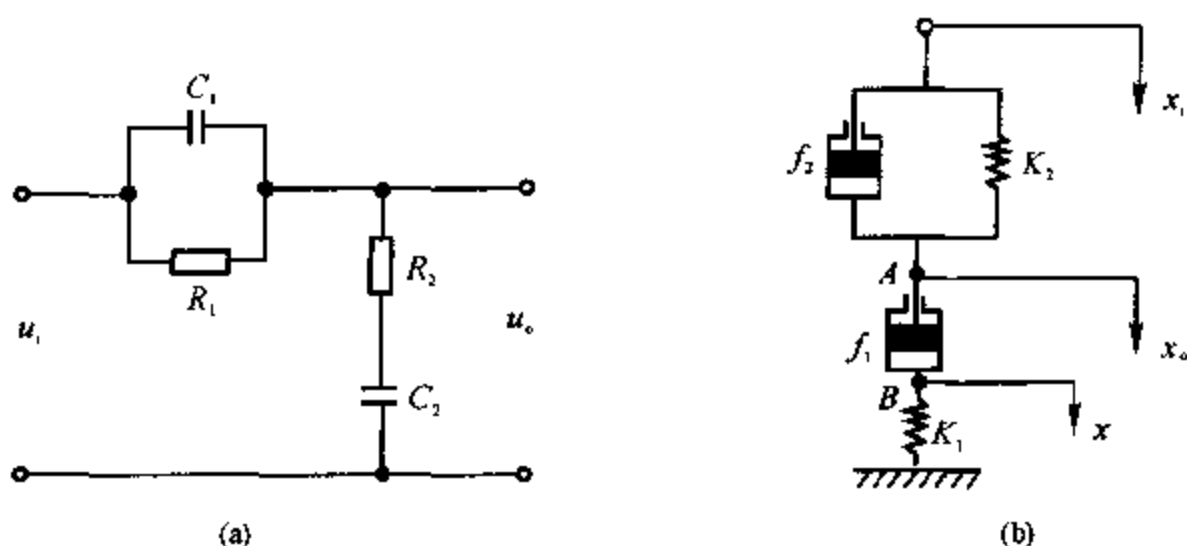


图 2.4.58 电网络与机械系统

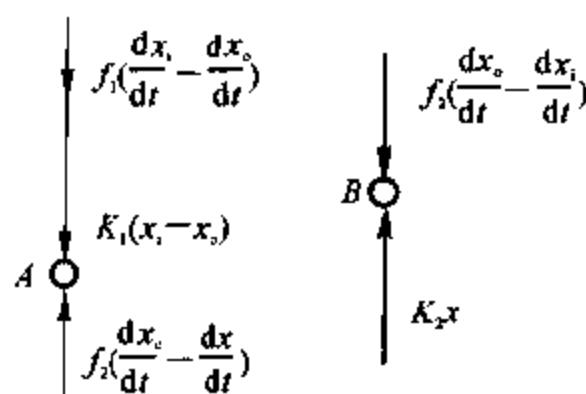
解 (a) 根据复数阻抗可得

$$\begin{aligned} \frac{u_o}{u_i} &= \frac{R_2 + \frac{1}{C_2 s}}{R_2 + \frac{1}{C_2 s} + \frac{R_1 \frac{1}{C_1 s}}{R_1 + \frac{1}{C_1 s}}} = \\ &= \frac{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2)s + 1}{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2)s + 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{即} \quad R_1 R_2 C_1 C_2 \frac{d^2 u_o}{dt^2} + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2) \frac{du_o}{dt} + u_o &= \\ R_1 R_2 C_1 C_2 \frac{d^2 u_i}{dt^2} + (R_1 C_1 + R_2 C_2) \frac{du_i}{dt} + u_i \end{aligned}$$

(b) 在图 2.4.58 中,取 A,B 两点进行受力分析,如图解 2.4.3 所示,可得

$$\begin{aligned} f_1 \left( \frac{dx_i}{dt} - \frac{dx_o}{dt} \right) + K_1 (x_i - x_o) &= f_2 \left( \frac{dx_o}{dt} - \frac{dx}{dt} \right) \\ f_2 \left( \frac{dx_o}{dt} - \frac{dx}{dt} \right) &= K_2 x \end{aligned}$$



图解 2.4.3

整理得

$$\frac{f_1 f_2}{K_1 K_2} \frac{d^2 x_0}{dt^2} + \left( \frac{f_2}{K_2} + \frac{f_2}{K_1} + \frac{f_1}{K_1} \right) \frac{dx_0}{dt} + x_0 =$$

$$\frac{f_1 f_2}{K_1 K_2} \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \left( \frac{f_1}{K_1} + \frac{f_2}{K_2} \right) \frac{dx_1}{dt} + x_1$$

经比较可以看出,电网络(a)和机械系统(b)两者参数的相似关系为

$$K_1 \sim \frac{1}{C_1}, \quad f_1 \sim R_1, \quad K_2 \sim \frac{1}{C_2}, \quad f_2 \sim R_2$$

2.4.4 试分别列写图 2.4.59 中各无源网络的微分方程式。

解 (a) 
$$\frac{u_o}{u_i} = \frac{R_2}{R_2 + \frac{R_1 \cdot 1/(Cs)}{R_1 + 1/(Cs)}} = \frac{R_1 R_2 Cs + R_2}{R_1 R_2 Cs + R_1 + R_2}$$

故 
$$R_1 R_2 C \frac{du_o}{dt} + (R_1 + R_2) u_o = R_1 R_2 C \frac{du_i}{dt} + R_2 u_i$$

(b) 由图 2.4.59(b) 可得

$$i_1 \frac{1}{C_1 s} = -i_1 R + i_2 R$$

$$u_i = i_2 R + (i_1 + i_2) \frac{1}{C_2 s}$$

$$u_o = i_1 R + (i_1 + i_2) \frac{1}{C_2 s}$$

联立并消去中间变量,整理得

$$\frac{u_o}{u_i} = \frac{R^2 C_1 C_2 s^2 + 2RC_1 s + 1}{R^2 C_1 C_2 s^2 + (C_2 + 2C_1)Rs + 1}$$

即 
$$R^2 C_1 C_2 \frac{d^2 u_o}{dt^2} + (C_2 + 2C_1) R \frac{du_o}{dt} + u_o =$$

$$R^2 C_1 C_2 \frac{d^2 u_i}{dt^2} + 2RC_1 \frac{du_i}{dt} - 2RC_1 \frac{du_i}{dt} + u_i$$

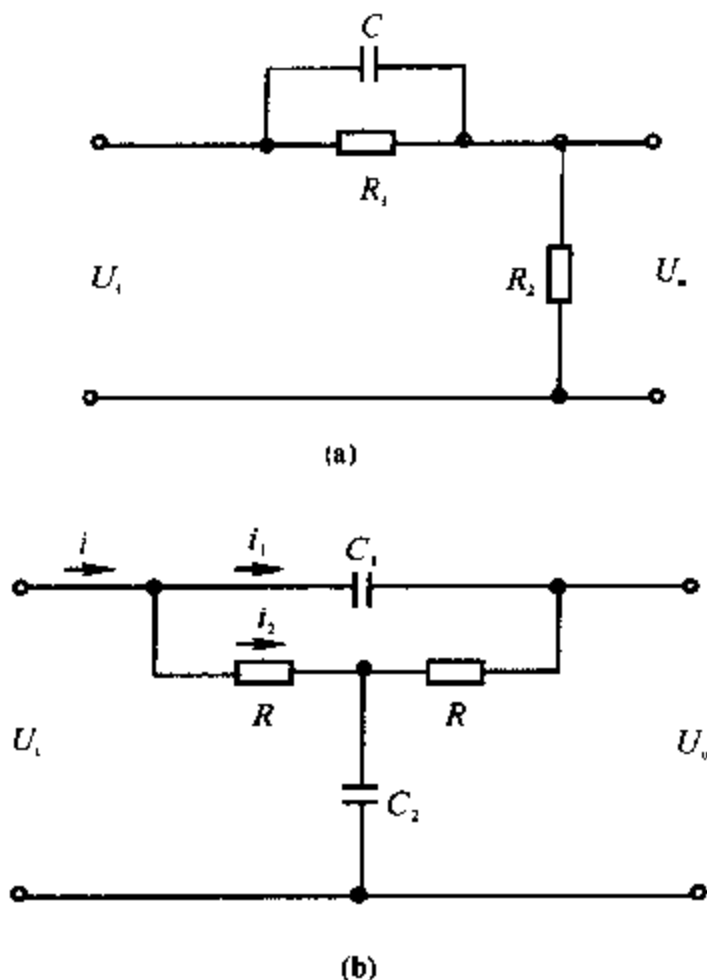


图 2.4.59 无源网络

**2.4.5** 设初始条件均为零,试用拉氏变换法求解下列微分方程式,并概略绘制  $x(t)$  曲线,指出各方程式的模式:

- (1)  $2\dot{x}(t) + x(t) = t$ ;
- (2)  $\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + x(t) = \delta(t)$ ;
- (3)  $\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + x(t) = 1(t)$ 。

**解** (1) 拉氏变换得

$$x(s) = \frac{1}{s^2(2s+1)} = \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s} + \frac{2}{s+0.5}$$

拉氏反变换

$$x(t) = t - 2 + 2e^{-0.5t}$$



$x(t)$  的曲线如图解 2.4.5(a) 所示。系统特征根为  $\lambda = -0.5$ , 该方程所描述的运动模态为  $e^{-0.5t}$ 。

(2) 拉氏变换得

$$x(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}/2}{(s + 1/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2}$$

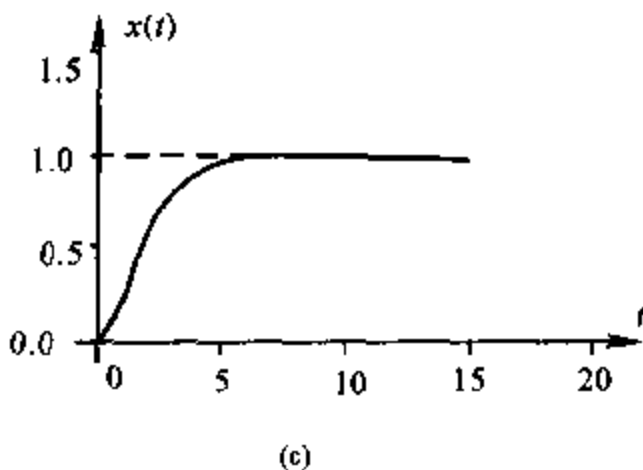
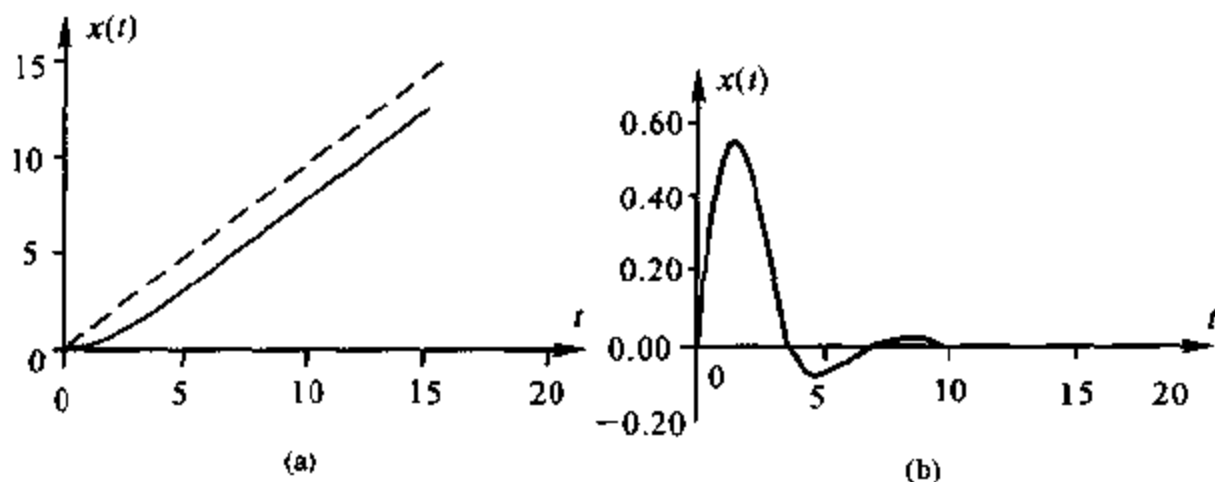
拉氏反变换

$$x(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-0.5t} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t$$

$x(t)$  曲线如图解 2.4.5(b) 所示。

系统特征根为  $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$

该方程所描述的运动模态为  $e^{-0.5t} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t$ 。



图解 2.4.5

(3) 拉氏变换得

$$x(s) = \frac{1}{s(s^2 + 2s + 1)} = \frac{1}{s(s+1)^2} = \frac{1}{s} - \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{s+1}$$

拉氏反变换

$$x(t) = 1 - te^{-t} - e^{-t}$$

$x(t)$  曲线如图解 2.4.5(c) 所示。

系统特征根为  $\lambda_{1,2} = -1$

该方程所描述的运动模态为  $te^{-t}$ ,  $e^{-t}$ 。

2.4.6 在液压系统管道中, 设通过阀门的流量  $Q$  满足如下流量方程:

$$Q = K\sqrt{P}$$

式中,  $K$  为比例常数;  $P$  为阀门前后的压差。若流量  $Q$  与压差  $P$  在其平衡点  $(Q_0, P_0)$  附近作微小变化, 试导出线性化流量方程。

解 将  $Q$  在平衡点处泰勒展开

$$Q = Q_0 + \frac{1}{1!} \dot{Q} \Big|_{Q=Q_0} (P - P_0) + \frac{1}{2!} \ddot{Q} \Big|_{Q=Q_0} (P - P_0)^2 + \dots$$

取一次项近似

$$Q \approx Q_0 + \frac{1}{1!} \dot{Q} \Big|_{Q=Q_0} (P - P_0) = Q_0 + \frac{K}{2\sqrt{P_0}} (P - P_0)$$

线性流量方程为

$$\Delta Q = \frac{K}{2\sqrt{P_0}} \Delta P$$

2.4.7 设弹簧特性由下式描述:

$$F = 12.65y^{1.1}$$

其中,  $F$  是弹簧力,  $y$  是变形位移。若弹簧在变形位移 0.25 附近作微小变化, 试推导  $\Delta F$  的线性化方程。

解 依题意在  $y = 0.25$  附近将  $F$  展开为泰勒级数并取一次项近似, 则有

$$F \approx F_0 + \frac{1}{1!} \dot{F} \Big|_{y=0.25} (y - 0.25)$$

$$\text{即 } \Delta F = F - F_0 = \frac{1}{1!} \dot{F} \Big|_{y=0.25} (y - 0.25) =$$

$$12.65 \times 1.1 \times 0.25^{0.1} (y - 0.25) =$$

$$12.11(y - 0.25) = 12.11\Delta y$$

2.4.8 设晶闸管三相桥式全控整流电路的输入量为控制角 $\alpha$ ,输出量为空载整流电压 $e_d$ ,它们之间的关系为

$$e_d = E_{d_0} \cos \alpha$$

式中 $E_{d_0}$ 是整流电压的理想空载值,试推导其线性化方程式。

解 将 $e_d$ 在 $\alpha_0$ 附近展开为泰勒级数并取一次项近似,则有

$$e_d \approx e_d(\alpha_0) + \left. \frac{1}{1!} \dot{e}_d \right|_{\alpha=\alpha_0} (\alpha - \alpha_0) =$$

$$E_{d_0} \cos \alpha - E_{d_0} \sin \alpha_0 (\alpha - \alpha_0)$$

即 
$$\Delta e_d = -E_{d_0} \sin \alpha_0 (\alpha - \alpha_0)$$

2.4.9 若某系统在阶跃输入 $r(t) = 1(t)$ 时,零初始条件下的输出响应 $c(t) = 1 - e^{-2t} + e^{-t}$ ,试求系统的传递函数和脉冲响应。

解 (1) 系统的传递函数  $(R(s) = \frac{1}{s})$

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+1} = \frac{s^2 + 4s + 2}{s(s+1)(s+2)}$$

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{s^2 + 4s + 2}{(s+1)(s+2)}$$

(2) 系统的脉冲响应

$$k(t) = L^{-1}[G(s)] = L^{-1}\left[1 - \frac{1}{s+1} + \frac{2}{s+2}\right] =$$

$$\delta(t) - e^{-t} + 2e^{-2t}$$

2.4.10 设系统传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2}{s^2 + 3s + 2}$$

且初始条件 $c(0) = -1, \dot{c}(0) = 0$ 。试求阶跃输入 $r(t) = 1(t)$ 时,系统的输出响应 $c(t)$ 。

解 传递函数所对应的微分方程为

$$\frac{d^2 c(t)}{dt^2} + 3 \frac{dc(t)}{dt} + 2c(t) = 2r(t)$$

在已知初始条件和输入条件下对上式进行拉氏变换得

$$s^2 C(s) - sc(0) - \dot{c}(0) + 3sC(s) - 3c(0) + 2C(s) = \frac{2}{s}$$

$$C(s) = \frac{-s^2 - 3s + 2}{s(s^2 + 3s + 2)}$$

$$\begin{aligned} \text{则 } c(t) &= L^{-1}[C(s)] = L^{-1}\left[\frac{-s^2 - 3s + 2}{s(s^2 + 3s + 2)}\right] = \\ &L^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{4}{s+1} + \frac{2}{s+2}\right] \end{aligned}$$

$$\text{所以 } c(t) = 1 - 4e^{-t} + 2e^{-2t}$$

2.4.11 在图 2.4.60 中, 已知  $G(s)$  和  $H(s)$  两方框相对应的微分方程分别是

$$6 \frac{dc(t)}{dt} + 10c(t) = 20e(t)$$

$$20 \frac{db(t)}{dt} + 5b(t) = 10c(t)$$

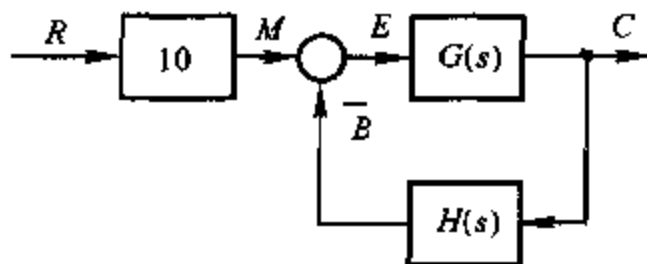


图 2.4.60 系统结构图

且初始条件均为零, 试求传递函数  $C(s)/R(s)$  及  $E(s)/R(s)$ 。

$$\text{解 由 } 6 \frac{dc(t)}{dt} + 10c(t) = 20e(t)$$

$$\text{可得 } G(s) = \frac{C(s)}{E(s)} = \frac{20}{6s + 10} = \frac{10}{3s + 5}$$

$$\text{又由 } 20 \frac{db(t)}{dt} + 5b(t) = 10c(t)$$

$$\text{得 } H(s) = \frac{B(s)}{C(s)} = \frac{10}{20s + 5} = \frac{2}{4s + 1}$$

$$\text{则有 } \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{10G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{100(4s + 1)}{12s^2 + 23s + 25}$$

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{10}{1 + G(s)H(s)} = \frac{10(12s^2 + 23s + 25)}{12s^2 + 23s + 25}$$

2.4.12 求图 2.4.61 所示有源网络的传递函数  $U_o(s)/U_i(s)$ 。

解 (a) 根据运算放大器的特点, 可写出

$$I = \frac{U_i}{\frac{R_0/(C_0 s)}{R_0 + 1/(C_0 s)}} = \frac{0 - U_o}{R_1}$$

$$\frac{U_o(s)}{U_i(s)} = -\frac{R_1}{R_0} (1 + R_0 C_0 s)$$

(b) 与(a)同理可得

$$\frac{U_o(s)}{U_i(s)} = -\frac{R_0 C_0 R_1 C_1 s^2 + (R_0 C_0 + R_1 C_1)s + 1}{R_0 C_1 s}$$

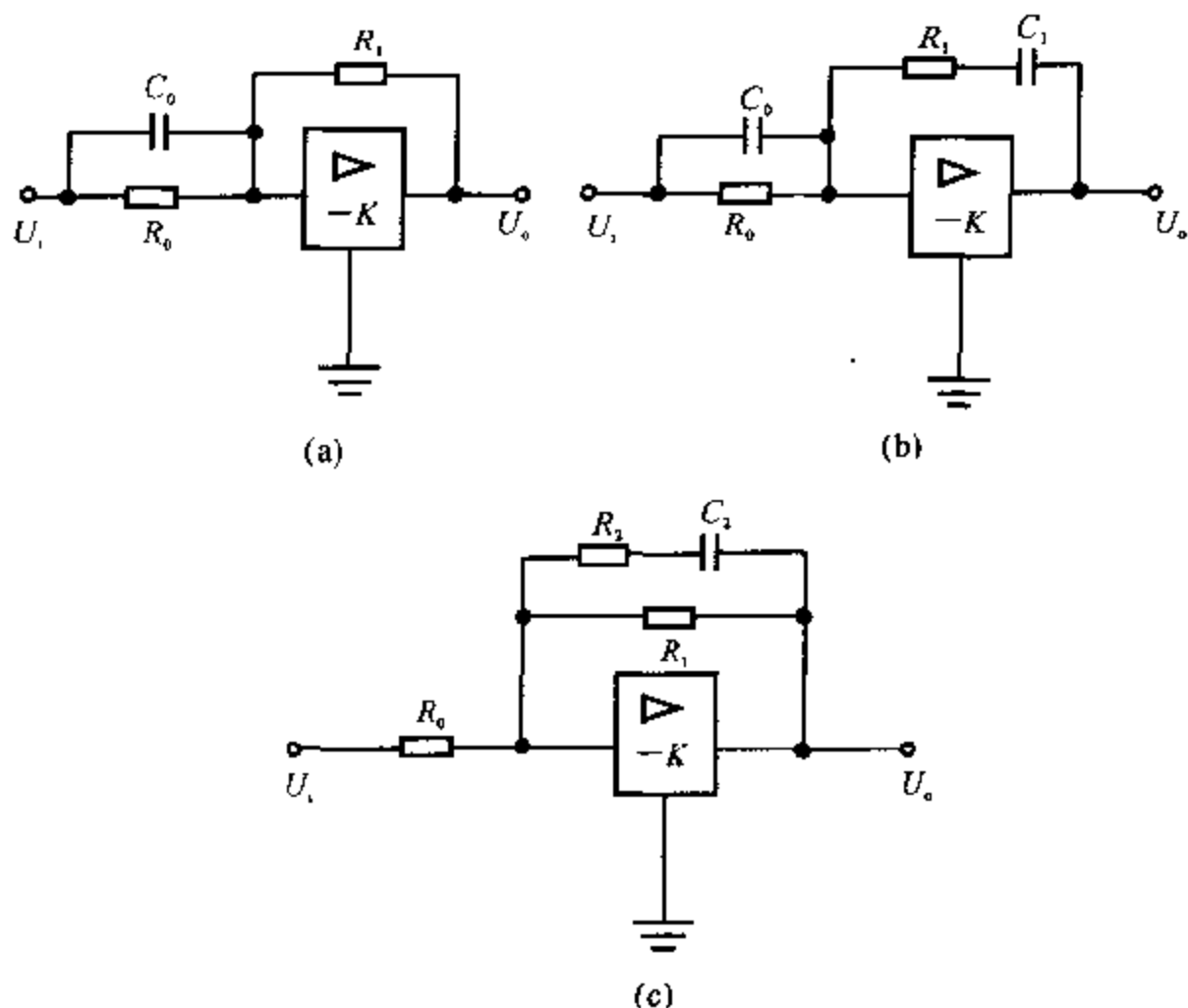


图 2.4.61 有源网络

(c) 同理可得

$$\frac{U_o(s)}{U_i(s)} = -\frac{R_1}{R_0} \frac{R_2 C_2 s + 1}{(R_1 + R_2) C_2 s + 1}$$

**2.4.13** 由运算放大器组成的控制系统模拟电路如图 2.4.62 所示, 试求闭环传递函数  $U_o(s)/U_i(s)$ 。

**解** 由图 2.4.62 可得

$$U_1 = \frac{R_1 \frac{1}{C_1 s}}{R_1 + \frac{1}{C_1 s}} \left( -\frac{U_i}{R_0} - \frac{U_o}{R_0} \right)$$

$$\frac{U_o}{U_2} = -\frac{R_2}{R_0} \rightarrow U_2 = -\frac{R_0}{R_2} U_o$$

$$\frac{U_2}{U_1} = -\frac{1}{R_0 C_2 s} \rightarrow U_1 = -R_0 C_2 s U_2$$

联立上式消去中间变量  $U_1$  和  $U_2$ , 整理可得

$$\frac{U_o}{U_i} = \frac{-R_1 R_2}{R_0^3 (R_1 C_1 s + 1) C_2 s + R_1 R_2}$$

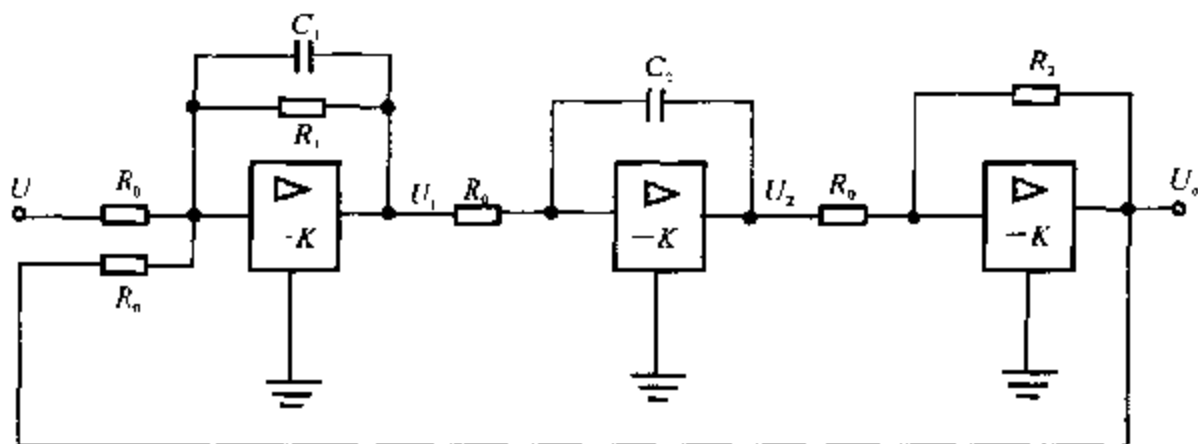


图 2.4.62 控制系统模拟电路

**2.4.14** 试参照例 2-2 (见参考文献[1]21 页) 给出的电枢控制直流电动机的三组微分方程式, 画出直流电动机的结构图, 并由结构图等效变换求出电动机的传递函数  $\Omega_m(s)/U_a(s)$  和  $\Omega_m(s)/M_c(s)$ 。

**解** 由例 2-2 可知电枢控制直流电动机的三组微分方程为

$$U_a(t) = L_a \frac{di_a(t)}{dt} + R_a i_a(t) + C_e \Omega_m(t)$$

$$M_m(t) = C_m i_a(t)$$

$$J_m \frac{d\Omega_m(t)}{dt} + f_m \Omega_m(t) = M_m(t) - M_c(t)$$

对上式分别进行拉氏变换可得

$$U_a(s) - C_e \Omega_m(s) = (L_a s + R_a) I_a(s)$$

$$M_m(s) = C_m I_a(s)$$

$$(J_m s + f_m) \Omega_m(s) = M_m(s) - M_c(s)$$

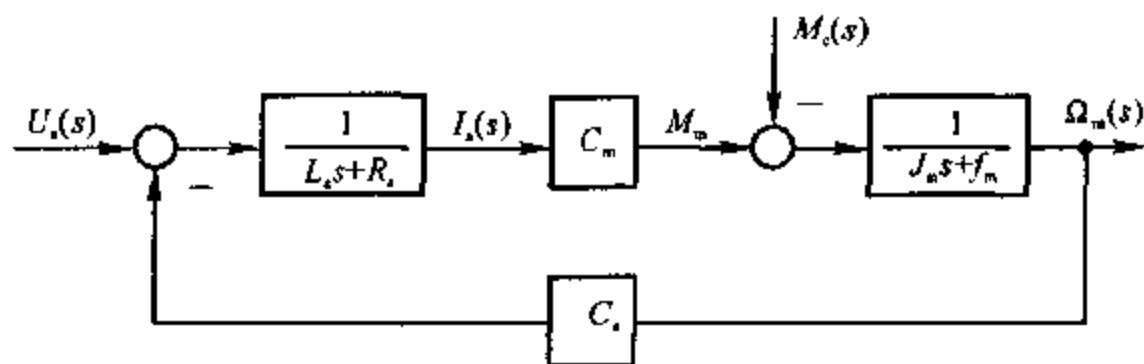
画出直流电动机的结构图如图解 2.4.14 所示。

由此可得

$$\frac{\Omega_m(s)}{U_a(s)} = \frac{C_m}{(L_a s + R_a)(J_m s + f_m)} = \frac{C_m C_e}{1 + \frac{C_m C_e}{(L_a s + R_a)(J_m s + f_m)}}$$

$$\frac{\Omega_m(s)}{M_c(s)} = \frac{-\frac{1}{J_m s + f_m}}{1 + \frac{C_m C_e}{(L_a s + R_a)(J_m s + f_m)}} =$$

$$\frac{\frac{C_m / (R_a f_m + C_m C_e)}{\frac{L_a J_m}{R_a f_m + C_m C_e} s^2 + \frac{L_a f_m + J_m R_a}{R_a f_m + C_m C_e} s + 1}}{\frac{L_a J_m}{R_a f_m + C_m C_e} s^2 + \frac{L_a f_m + J_m R_a}{R_a f_m + C_m C_e} s + 1}$$



图解 2.4.14

2.4.15 某位置随动系统原理方框图如图 2.4.63 所示。已知电位器最大工作角度  $\theta_{\max} = 330^\circ$ ，功率放大级放大系数为  $K_3$ ，要求：

(1) 分别求出电位器传递系数  $K_0$ ，第一级和第二级放大器的比例系数  $K_1$  和  $K_2$ ；

(2) 画出系统结构图；

(3) 简化结构图，求系统传递函数  $\Theta_o(s)/\Theta_i(s)$ 。

解 (1)  $K_0 = \frac{E}{\theta_m} = \frac{30}{330^\circ \times \frac{\pi}{180}} = \frac{180^\circ}{11\pi} \text{ V/rad}$

$$K_1 = \frac{-30 \times 10^3}{10 \times 10^3} = -3$$

$$K_2 = \frac{-20 \times 10^3}{10 \times 10^3} = -2$$

(2) 假设电动机时间常数为  $T_m$ ，忽略电枢电感的影响，可得直流电动机的传递函数为

$$\frac{\Omega(s)}{U_a(s)} = \frac{K_m}{T_m s + 1}$$

式中  $K_m$  为电动机的传递系数, 单位为  $(\text{rad} \cdot \text{s}^{-1})/\text{V}$ 。

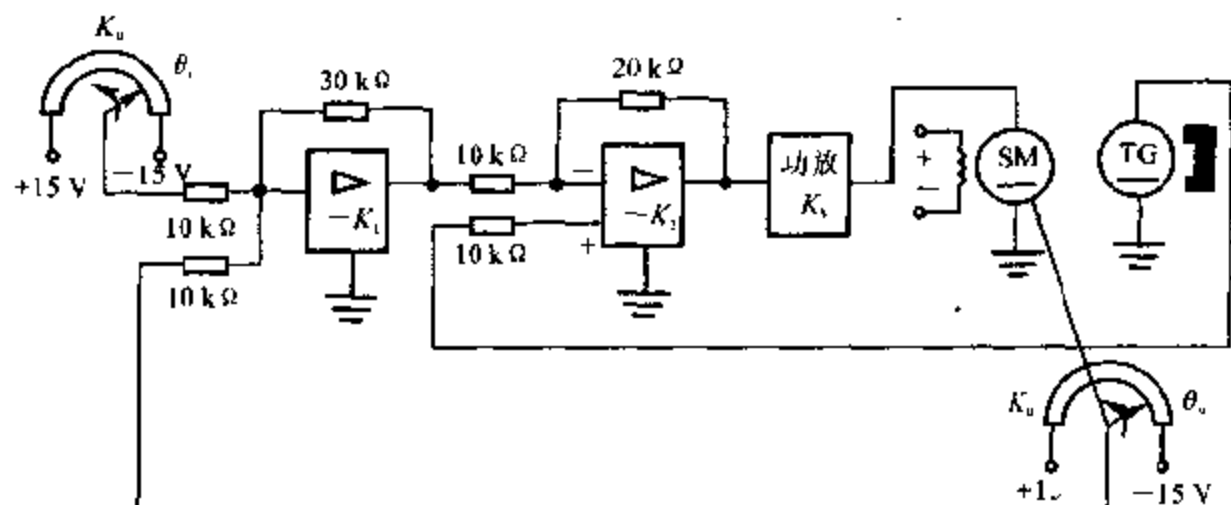
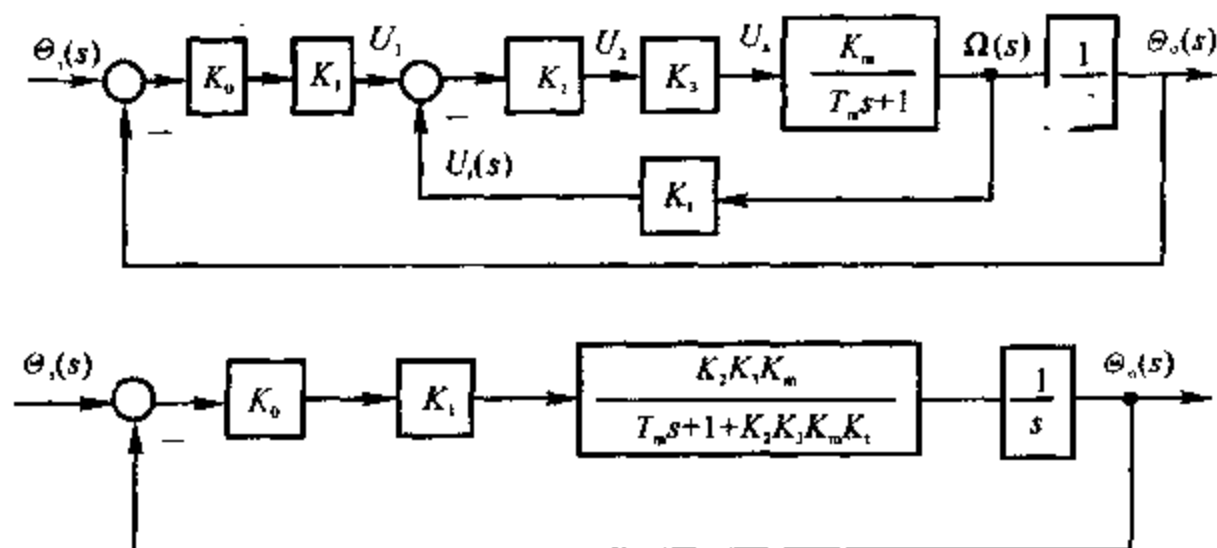


图 2.4.63 位置随动系统原理图

又设测速发电机的斜率为  $K_t$  ( $\text{V}/(\text{rad} \cdot \text{s}^{-1})$ ), 则其传递函数为

$$\frac{U_t(s)}{\Omega(s)} = K_t$$

由此可画出系统的结构图如图解 2.4.15 所示。



图解 2.4.15

(3) 系统的传递函数为



$$\frac{\Theta_o(s)}{\Theta_i(s)} = \frac{1}{\frac{T_m}{K_0 K_1 K_2 K_3 K_m} s^2 + \frac{1 + K_2 K_3 K_m K_i}{K_0 K_1 K_2 K_3 K_m} s + 1}$$

2.4.16 设直流电动机双闭环调速系统的原理线路如图 2.4.64 所示, 要求:

(1) 分别求速度调节器和电流调节器的传递函数;

(2) 画出系统结构图(设可控硅电路传递函数为  $K_3/(\tau_3 s + 1)$ ; 电流互感器和测速发电机的传递系数分别为  $K_4$  和  $K_5$ ; 直流电动机的结构图用题 2.4.14 的结果);

(3) 简化结构图, 求系统传递函数  $\Omega(s)/U_i(s)$ 。

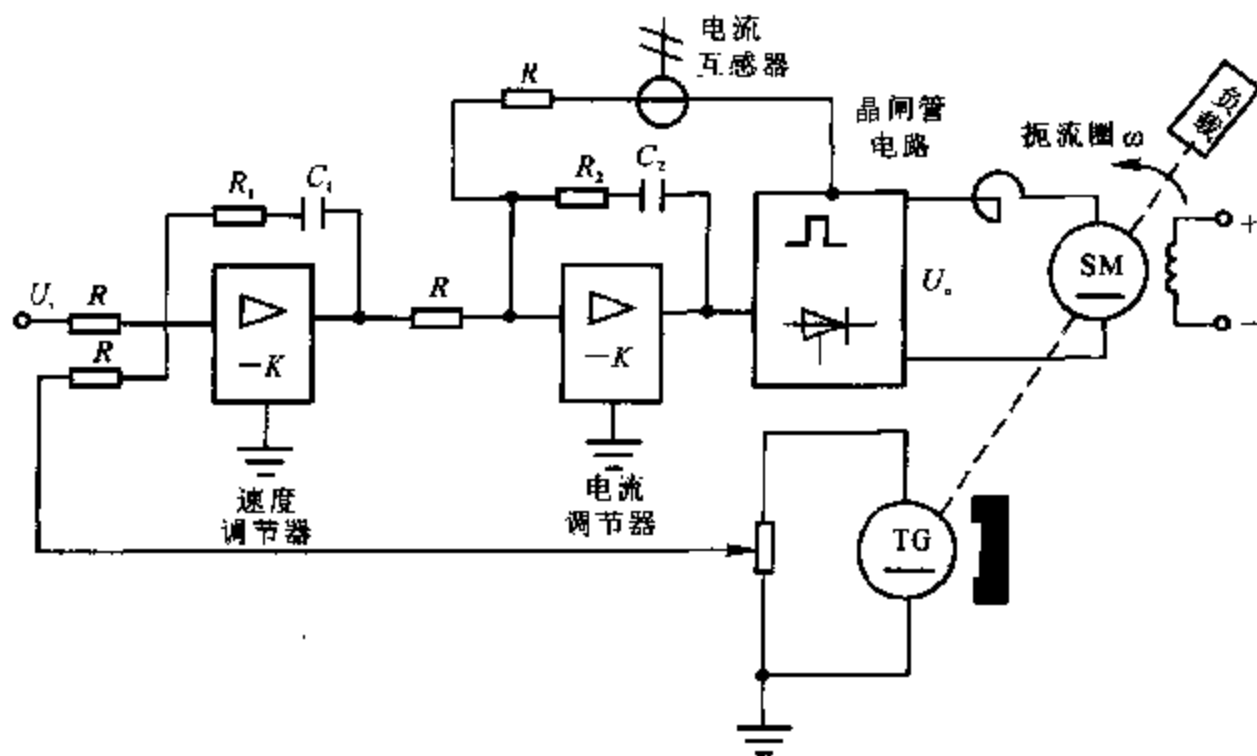


图 2.4.64 直流电动机调速系统原理图

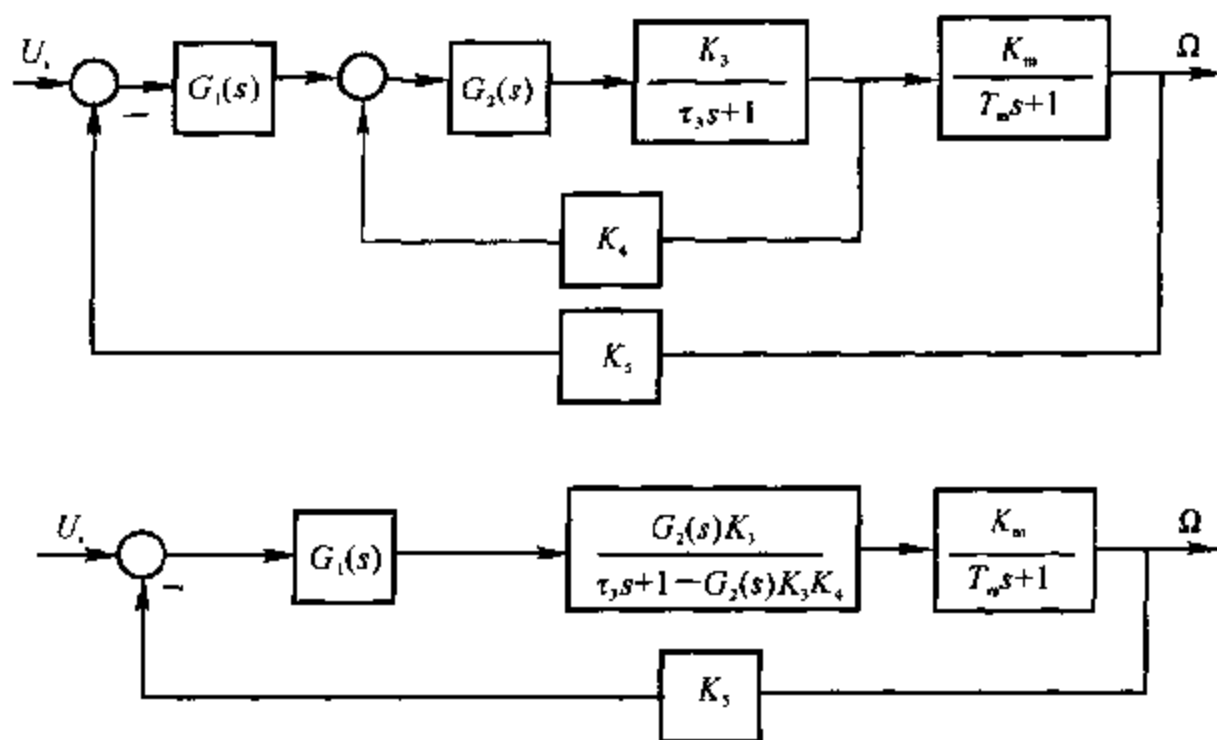
解 (1) 速度调节器的传递函数为

$$G_1(s) = -\frac{R_1 + \frac{1}{C_1 s}}{R} = -\left(\frac{R_1}{R} + \frac{1}{RC_1 s}\right)$$

电流调节器的传递函数为

$$G_2(s) = -\frac{R_2 + \frac{1}{C_2 s}}{R} = -\left(\frac{R_2}{R} + \frac{1}{RC_2 s}\right)$$

(2) 系统结构图及简化结构如图解 2.4.16 所示。



图解 2.4.16

(3) 系统的闭环传递函数为

$$\frac{\Omega(s)}{U_i(s)} = \frac{K(\tau_2 s^2 + \tau_1 s + 1)}{T_4 s^4 + T_3 s^3 + T_2 s^2 + T_1 s + 1}$$

其中  $K = \frac{1}{K_5}$ ,  $\tau_2 = C_1 C_2 R_1 R_2$ ,  $\tau_1 = C_1 R_1 + C_2 R_2$

$$T_4 = \frac{R^2 C_1 C_2 T_m \tau_1}{K_3 K_5 K_m},$$

$$T_3 = \frac{R C_1 C_2 (R \tau_3 + R T_m + K_3 K_4 T_m R_2)}{K_3 K_5 K_m}$$

$$T_2 = \frac{R^2 C_1 C_2 + K_3 K_4 R C_1 (T_m + C_2 R_2) + K_3 K_5 K_m C_1 C_2 R_1 R_2}{K_3 K_5 K_m}$$

$$T_1 = \frac{K_1 (R C_1 + R_1 C_1 K_m + R_2 C_2 K_m)}{K_5 K_m}$$

**2.4.17** 已知控制系统结构图如图 2.4.65 所示。试通过结构图等效变换求系统传递函数  $C(s)/R(s)$ 。

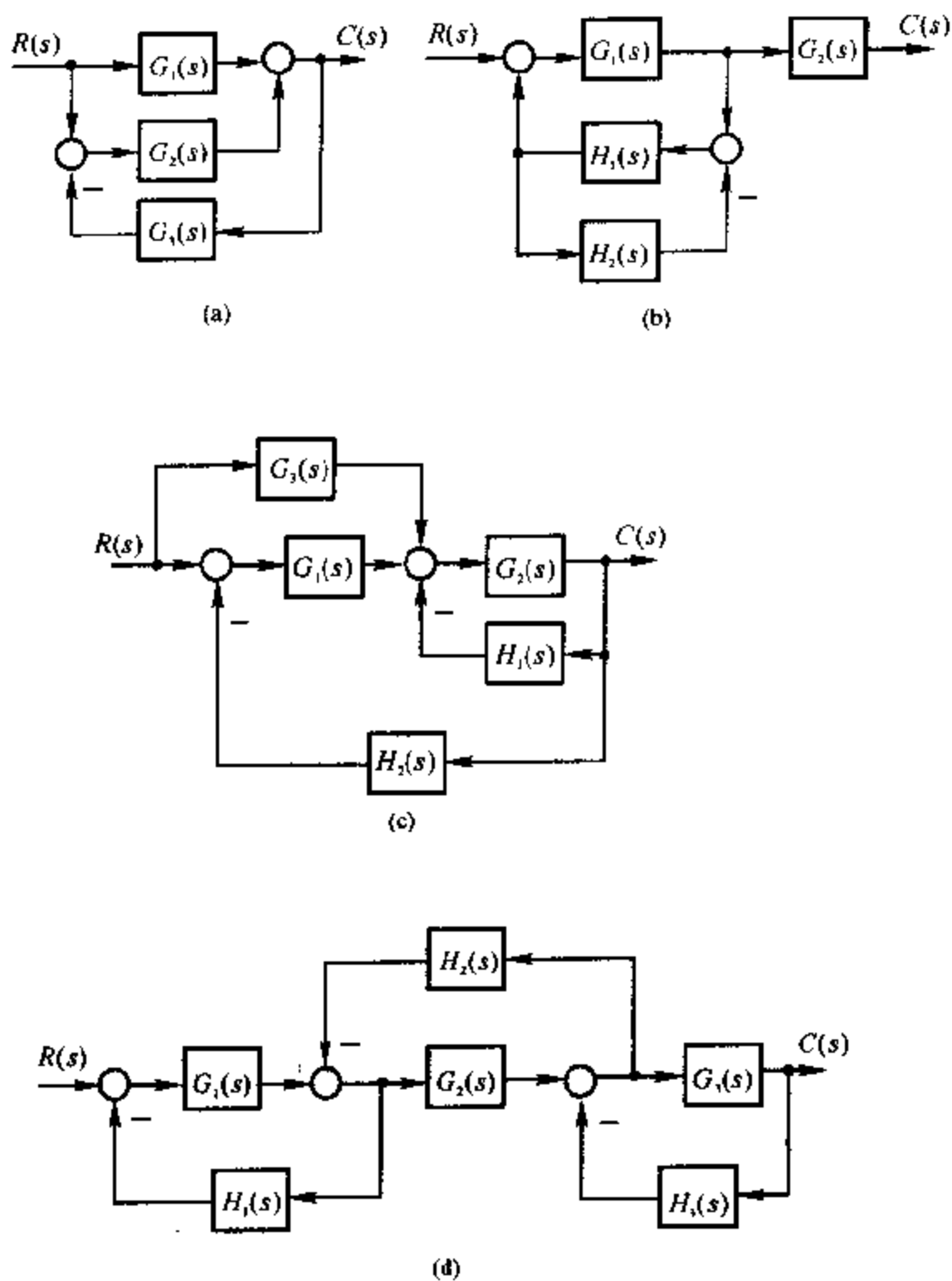


图 2.4.65 题 2.4.17 系统结构图

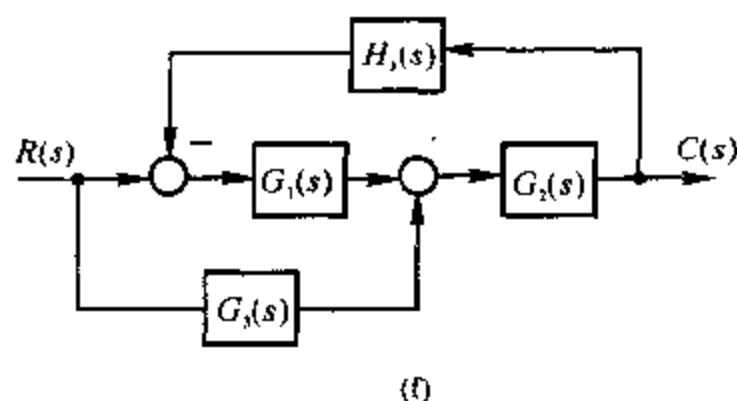
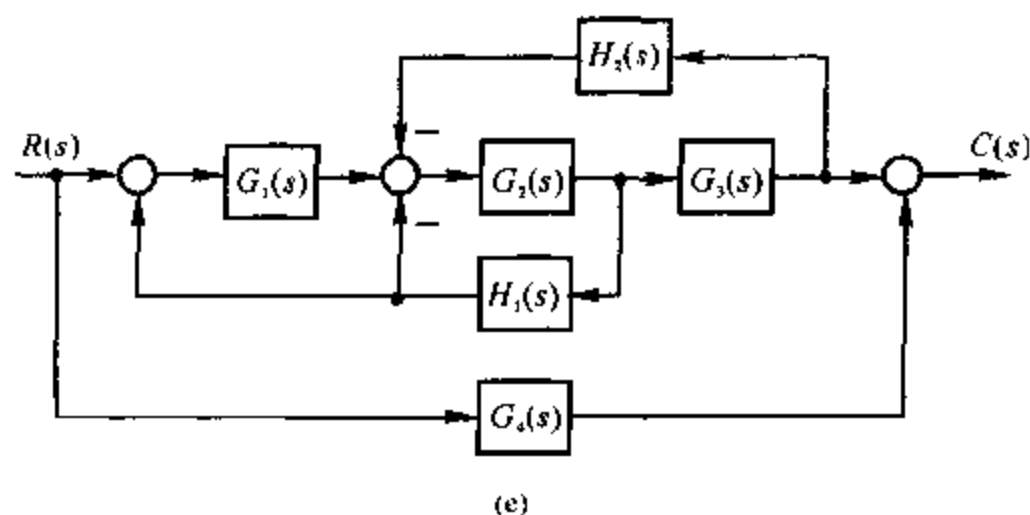
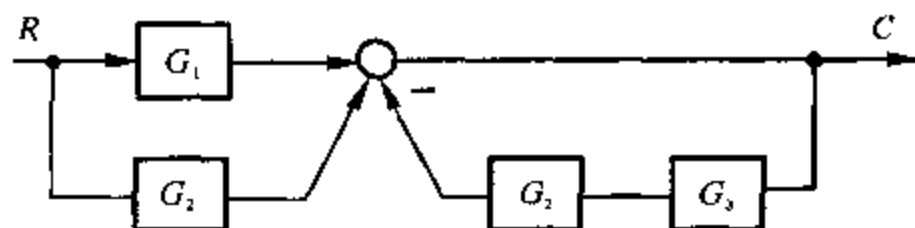


图 2.4.65 题 2.4.17 系统结构图

解 (a) 可将图 2.4.65(a) 等效成图解 2.4.17(a) 所示。故有

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1 + G_2}{1 + G_2 G_3}$$



图解 2.4.17(a)

(b) 同(a) 等效结构图如图解 2.4.17(b) 所示。故有

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1 G_2 (1 + H_1 H_2)}{1 + H_1 H_2 - H_1 G_1}$$

(c) 同理等效变换过程如图解 2.4.17(c) 所示。故有

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_2(G_1 + G_3)}{1 + G_2(H_1 + G_1 H_2)}$$

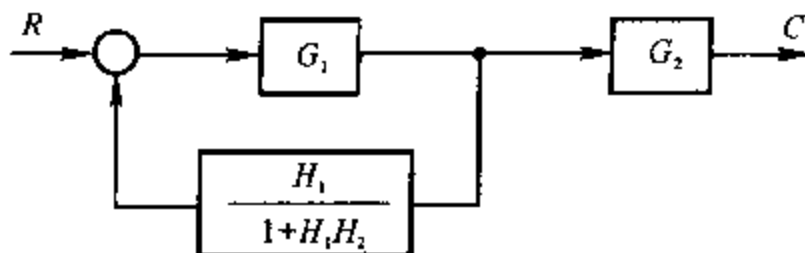


图 解 2.4.17(b)

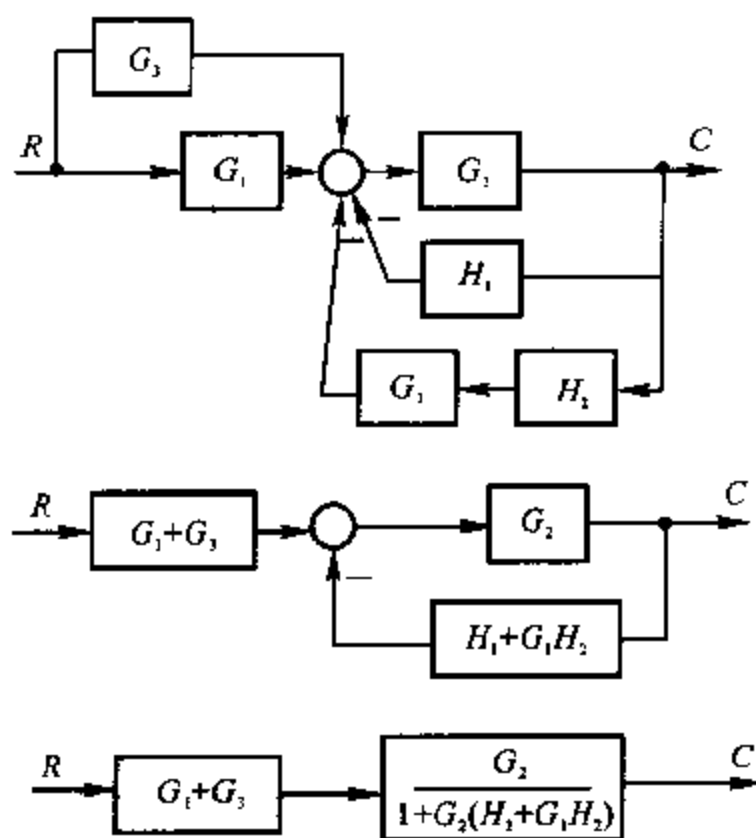


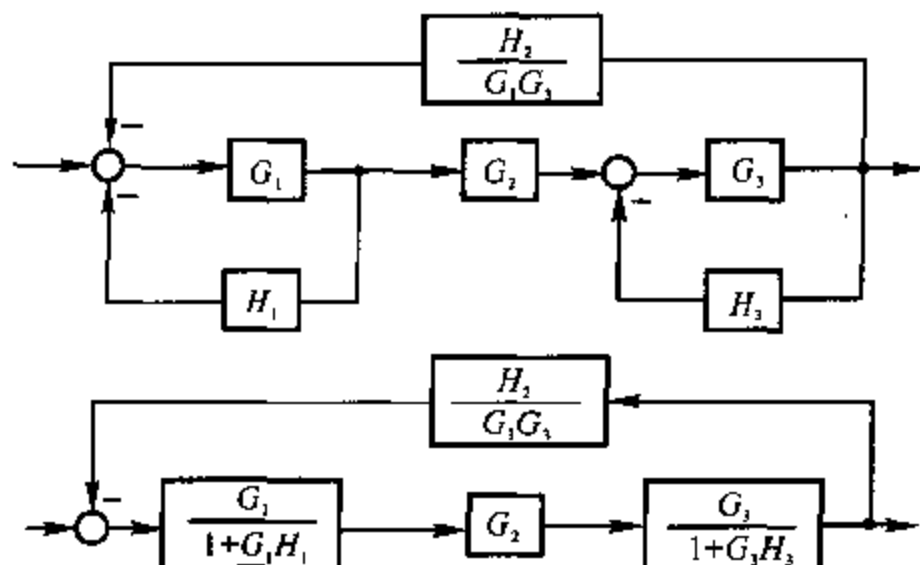
图 解 2.4.17(c)

(d) 等效变换过程如图解 2.4.17(d) 所示。故有

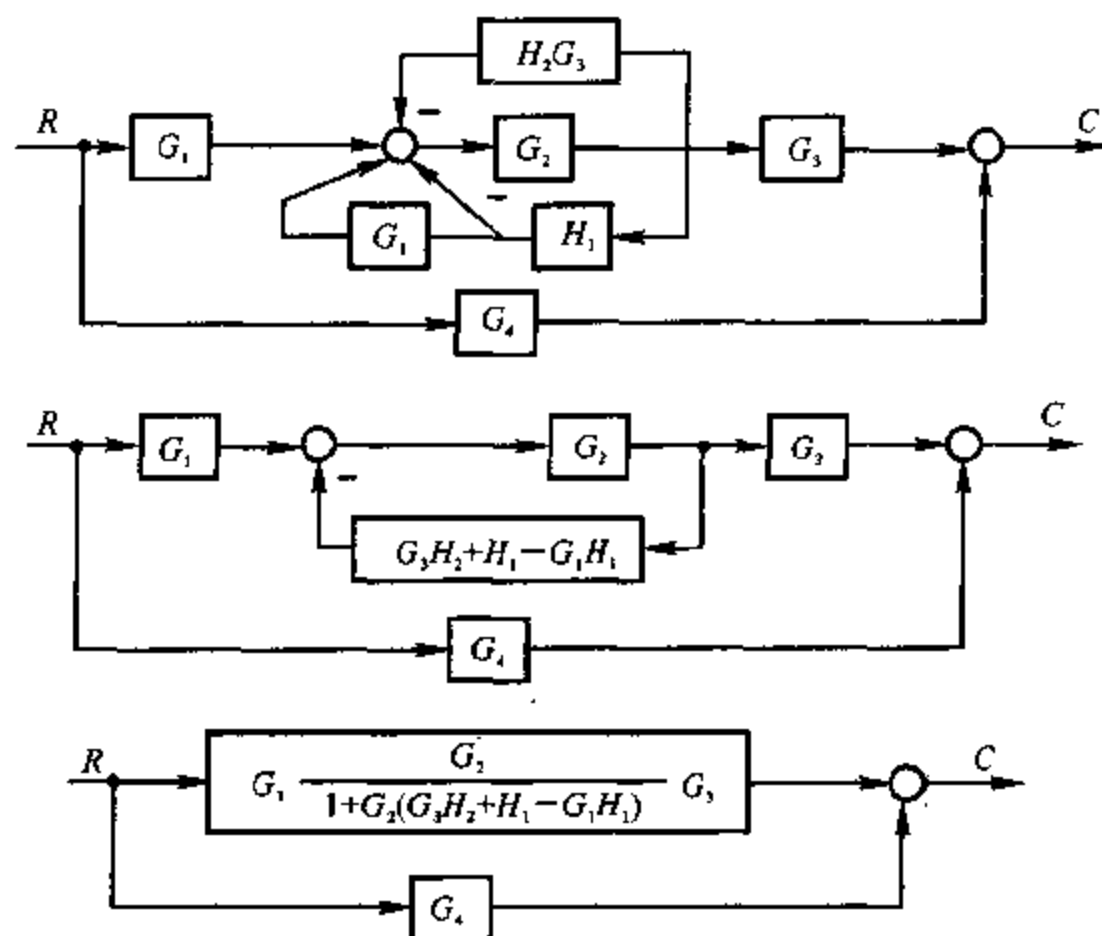
$$\begin{aligned} \frac{C(s)}{R(s)} &= \frac{\frac{G_1 G_2 G_3}{(1 + G_1 H_1)(1 + G_3 H_3)}}{1 + \frac{G_1 G_2 G_3}{(1 + G_1 H_1)(1 + G_3 H_3)} \cdot \frac{H_2}{G_1 G_2}} = \\ &= \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_1 H_1 + G_2 H_2 + G_3 H_3 + G_1 H_1 G_3 H_3} \end{aligned}$$

(e) 同理等效变换过程如图解 2.4.17(e) 所示。故有

$$\frac{C(s)}{R(s)} = G_4 + \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_2 G_3 H_2 + G_2 H_1 - G_1 G_2 H_1}$$



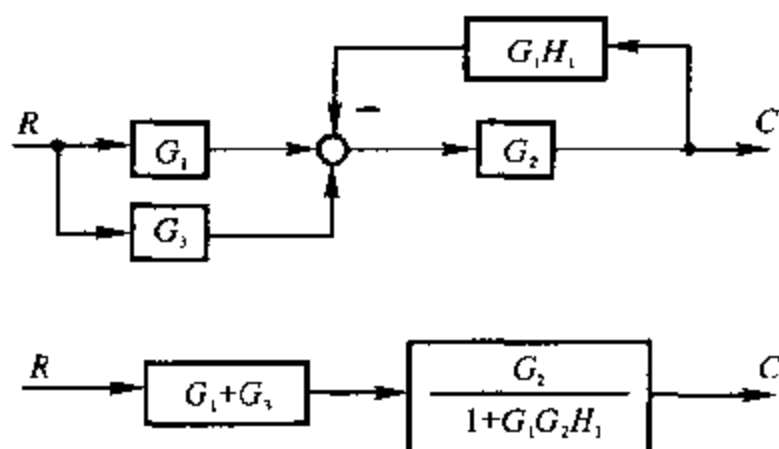
图解 2.4.17(d)



图解 2.4.17(e)

(f) 等效变换如图解 2.4.17(f) 所示。故有

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_2(G_1 + G_3)}{1 + G_1 G_2 H_1}$$



图解 2.4.17(f)

**2.4.18** 试简化图 2.4.66 中的系统结构图, 并求传递函数  $C(s)/R(s)$  和  $C(s)/N(s)$ 。

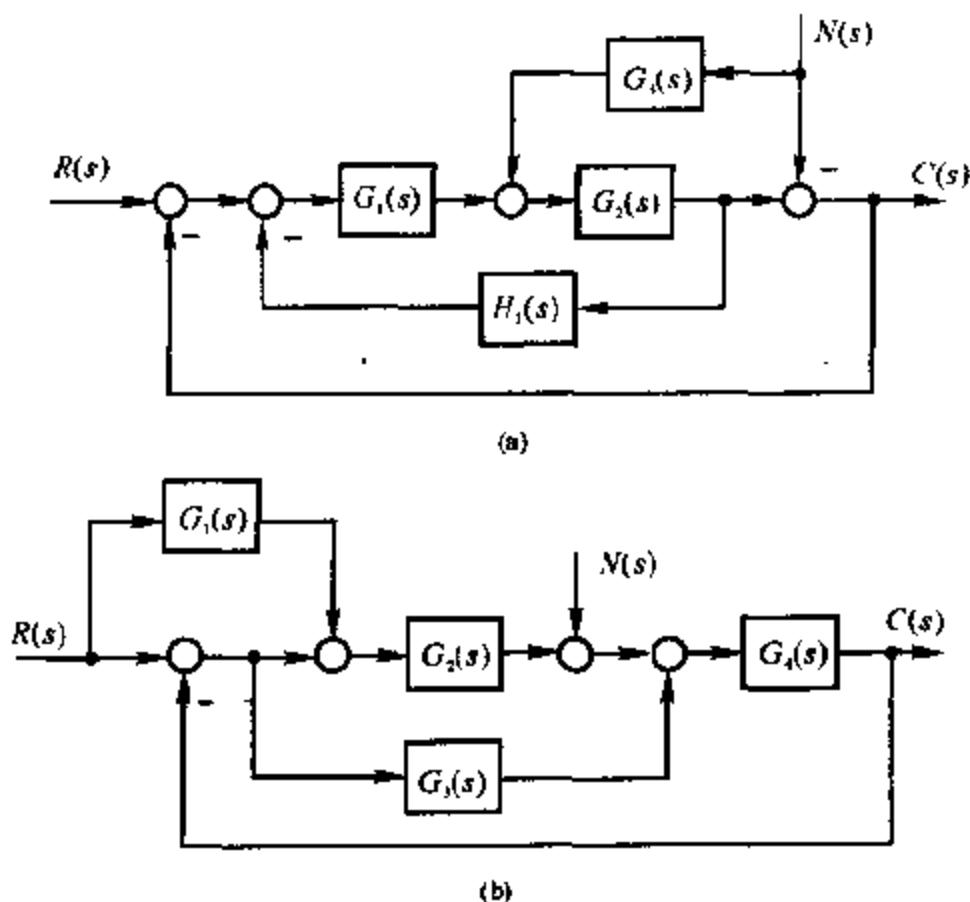
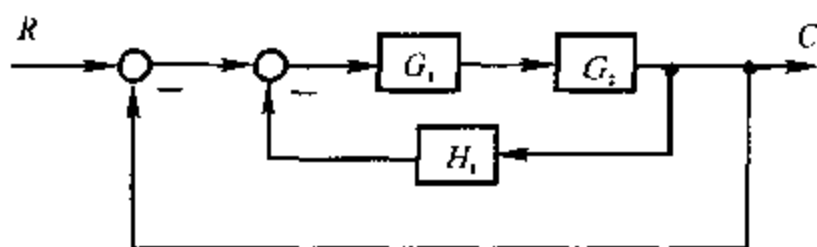


图 2.4.66 题 2.4.18 系统结构图

解 (a) 令  $N(s) = 0$ , 求  $C(s)/R(s)$ 。简化结构如图解 2.4.18(a1) 所示。

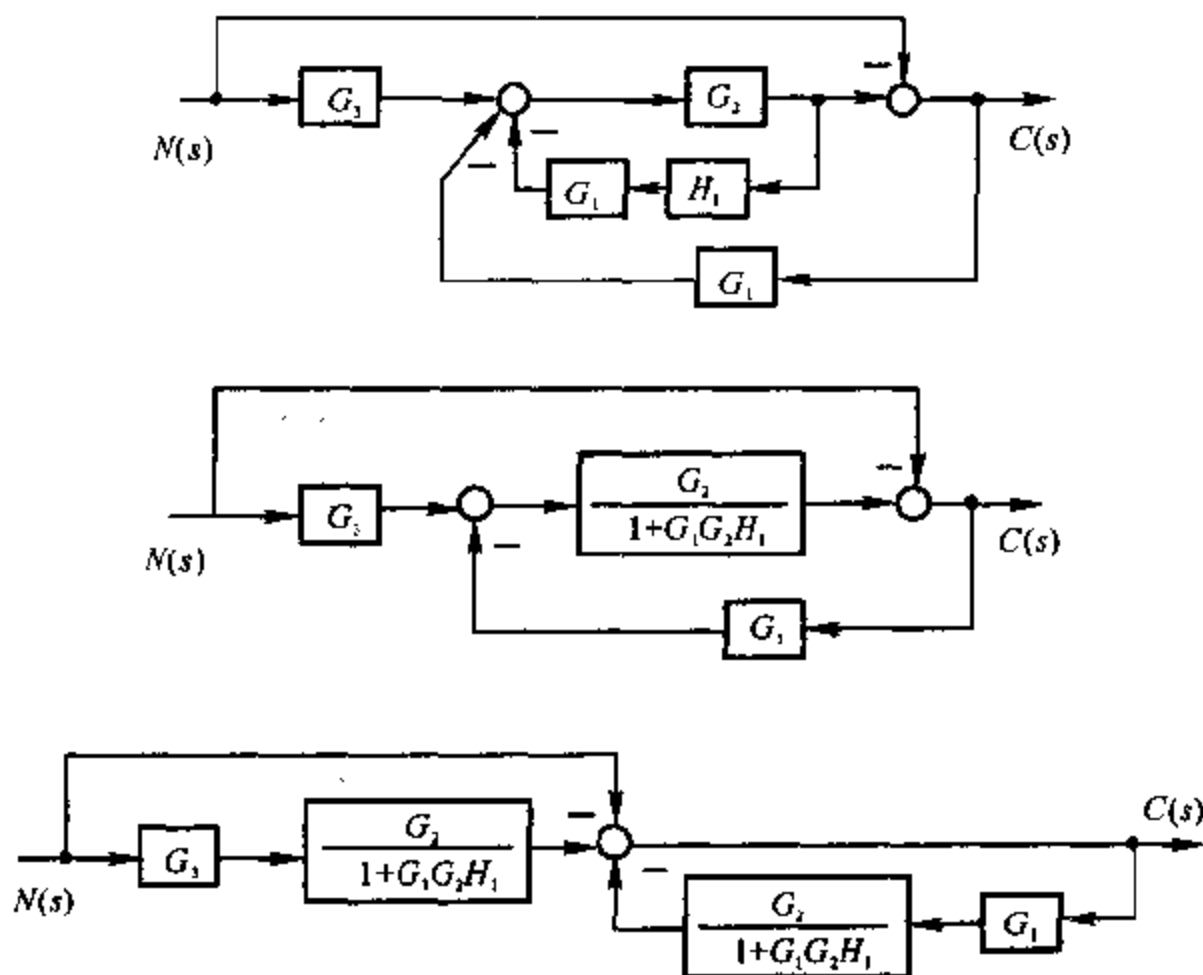


图解 2.4.18(a1)

故有

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1 G_2}{1 + (1 + H_1) G_1 G_2}$$

令  $R(s) = 0$ , 求  $C(s)/N(s)$ 。其结构简化过程如图解 2.4.18(a2)。



图解 2.4.18(a2)



故有 
$$\frac{C(s)}{N(s)} = \left( -1 + \frac{G_2 G_3}{1 + G_1 G_2 H_1} \right) \left( \frac{1}{1 + \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 G_2 H_1}} \right) = \frac{-1 + G_2 G_3 - G_1 G_2 H_1}{1 + G_1 G_2 H_1 + G_1 G_2}$$

(b) 令  $N(s) = 0$ , 求  $C(s)/R(s)$ 。简化结构如图解 2.4.18(b1) 所示。故有

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_4(G_1 G_2 + G_2 + G_3)}{1 + G_2 G_4 + G_3 G_4}$$

令  $R(s) = 0$ , 求  $C(s)/N(s)$ 。简化结构如图解 2.4.18(b2) 所示。故有

$$\frac{C(s)}{N(s)} = \frac{G_4}{1 + G_4(G_2 + G_3)} = \frac{G_4}{1 + G_2 G_4 + G_3 G_4}$$

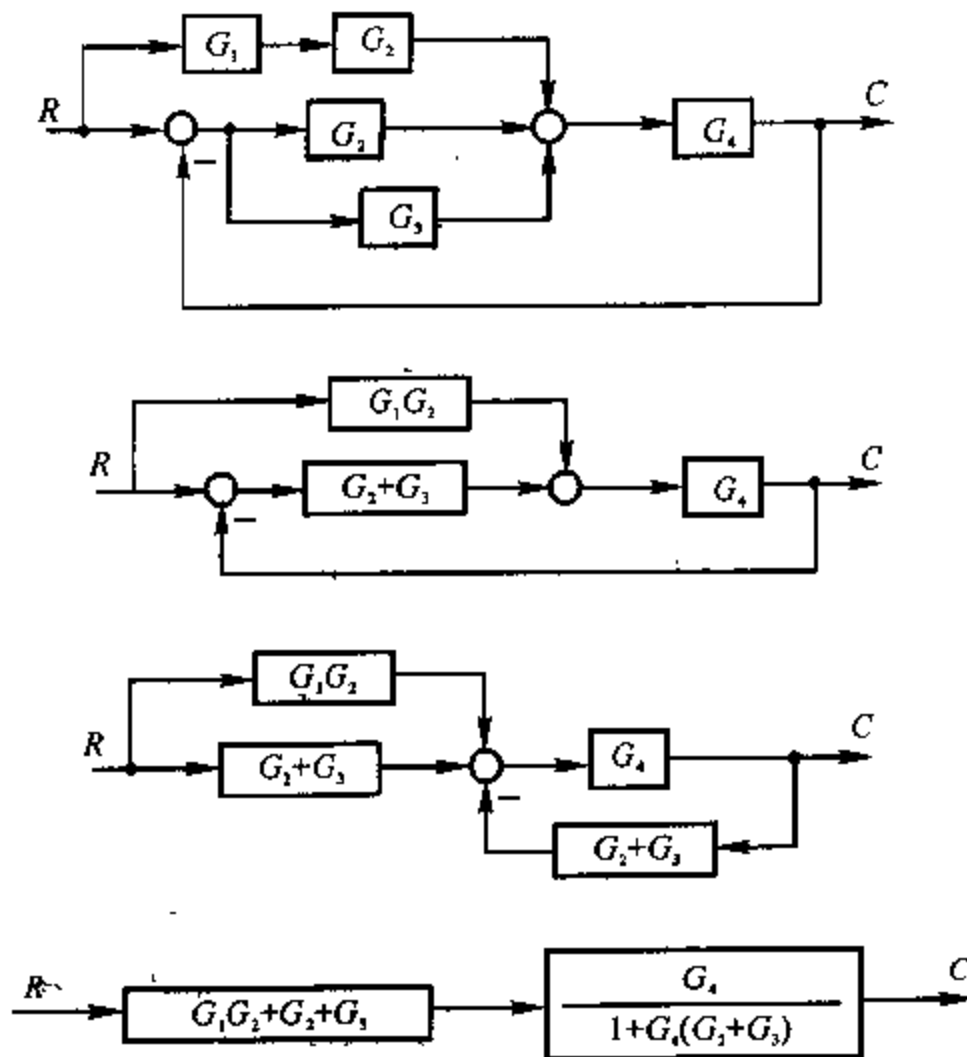
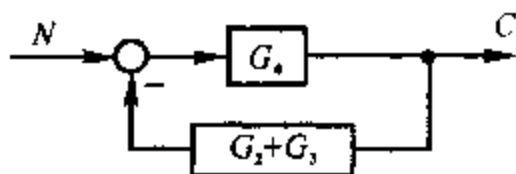


图 解 2.4.18(b1)



图解 2.4.18(b2)

2.4.19 试绘制图 2.4.65 中各系统结构图对应的信号流图,并用梅森增益公式求各系统的传递函数  $C(s)/R(s)$ 。

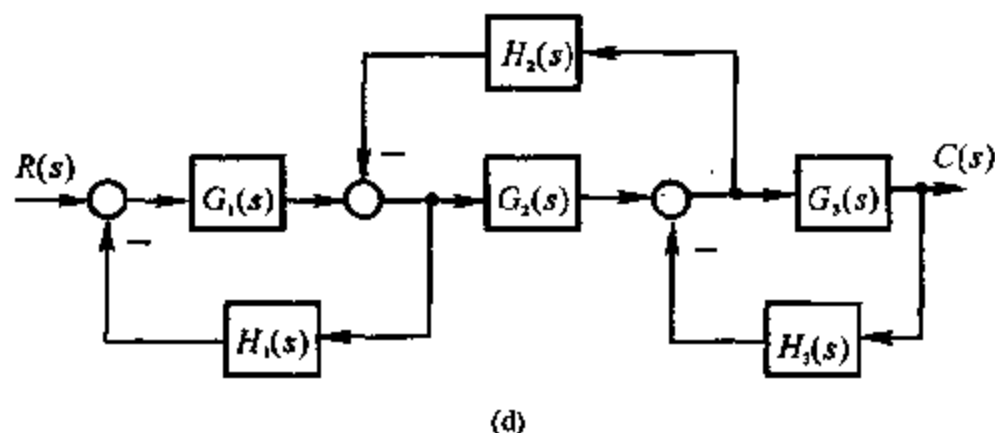
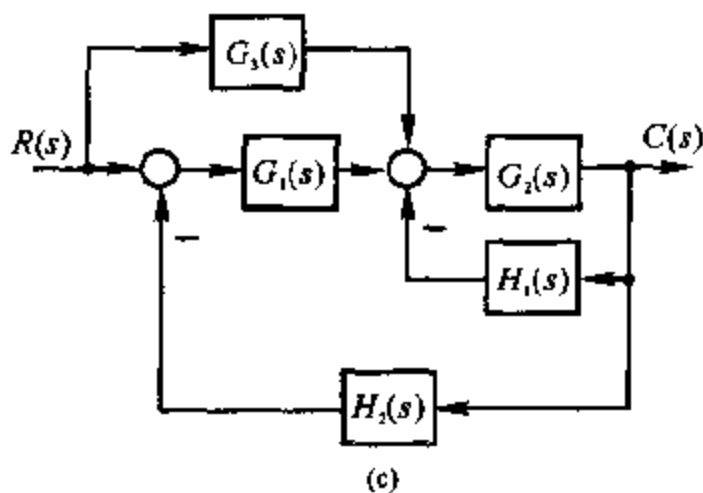
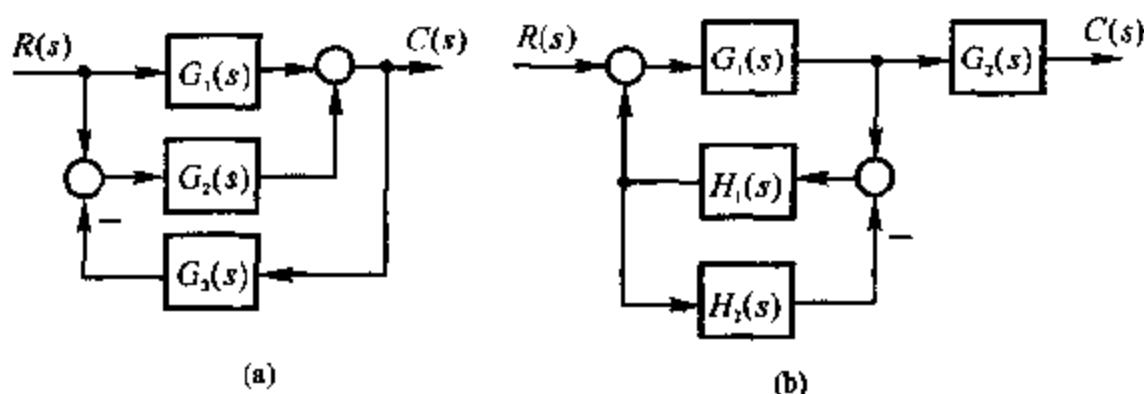
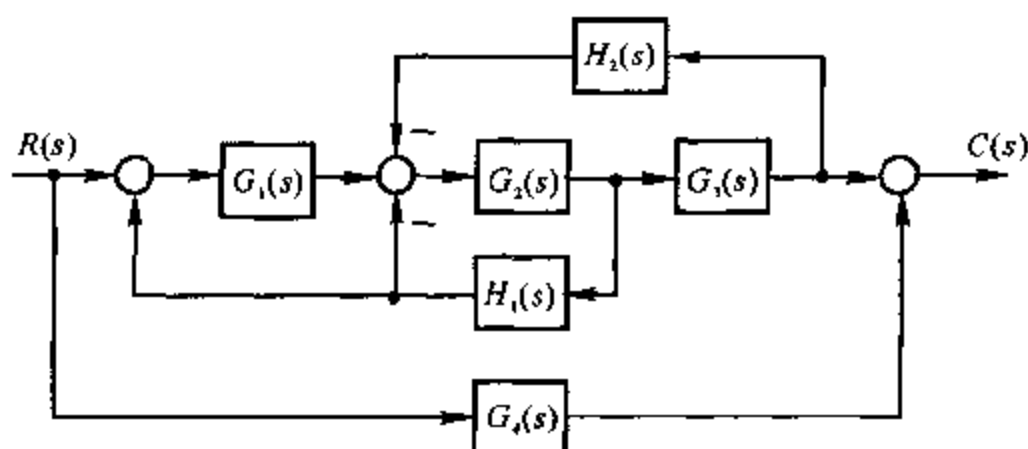
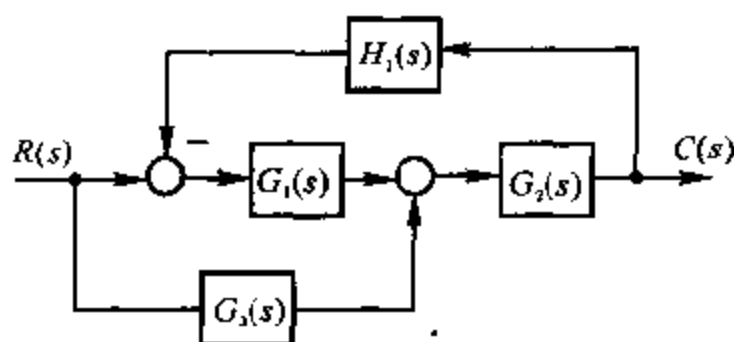


图 2.4.65



(c)



(f)

图 2.4.65

解 (a) 信号流图如图解 2.4.19(a) 所示。此系统有两条前向通路，一个回路：

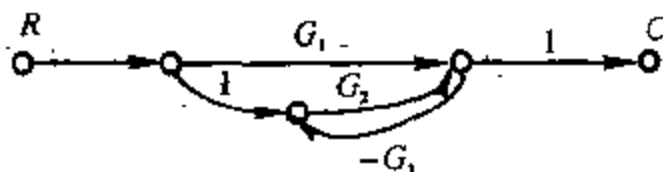
$$\Delta = 1 + G_2 G_3$$

$$P_1 = G_1, \quad \Delta_1 = 1$$

$$P_2 = G_2, \quad \Delta_2 = 1$$

故有

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\sum P_i \Delta_i}{\Delta} = \frac{G_1 + G_2}{1 + G_2 G_3}$$



图解 2.4.19(a)

(b) 信号流图如图解 2.4.19(b) 所示。此系统有一条前向通路，两个回路：

$$\Delta = 1 - G_1 H_1 + H_1 H_2$$

$$P_1 = G_1 G_2, \quad \Delta_1 = 1 + H_1 H_2$$

故有

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1 G_2 (1 + H_1 H_2)}{1 - G_1 H_1 + H_1 H_2}$$

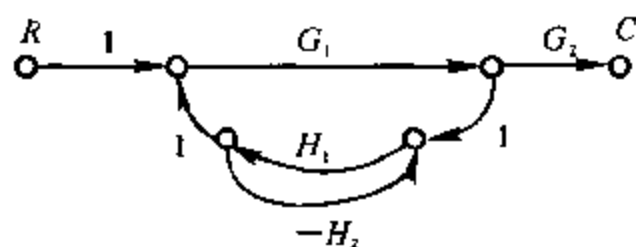


图 解 2.4.19(b)

(c) 信号流图如图解 2.4.19(c) 所示。此系统有两条前向通路，两个回路：

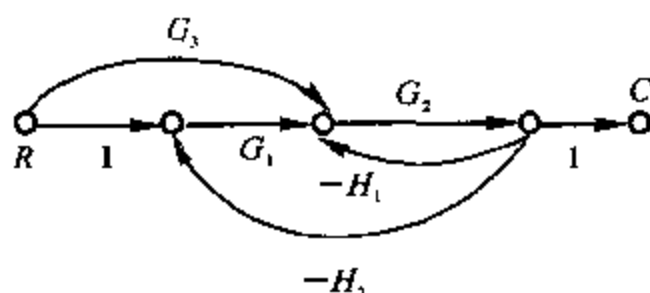


图 解 2.4.19(c)

$$\Delta = 1 + G_2 H_1 - G_1 G_2 H_2$$

$$P_1 = G_1 G_2, \quad \Delta_1 = 1$$

$$P_2 = G_3 G_2, \quad \Delta_2 = 1$$

故有

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1 G_2 + G_2 G_3}{1 + G_2 H_1 + G_1 G_2 H_2}$$

(d) 信号流图如图解 2.4.19(d) 所示。

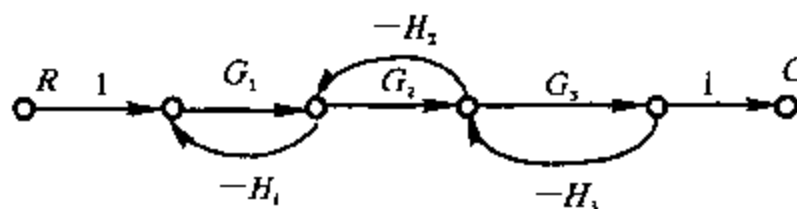


图 解 2.4.19(d)

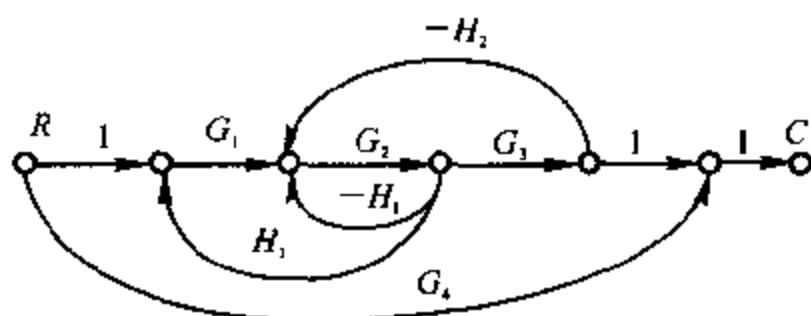
从信号流图可见,系统有一条前向通路,三个回路(其中有一对两两不接触)

$$\Delta = 1 + G_1 H_1 + G_2 H_2 + G_3 H_3 + G_1 H_1 G_3 H_3$$

$$P_1 = G_1 G_2 G_3, \quad \Delta_1 = 1$$

故有 
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_1 H_1 + G_2 H_2 + G_3 H_3 + G_1 G_3 H_1 H_3}$$

(e) 信号流图如图解 2.4.19(e) 所示,



图解 2.4.19(e)

从信号流图可见,系统有两条前向通路,三个回路。

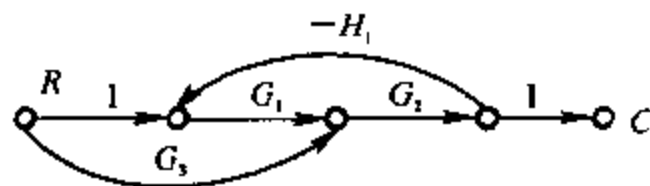
$$\Delta = 1 - G_1 G_2 H_1 + G_2 H_1 + G_2 G_3 H_2$$

$$P_1 = G_1 G_2 G_3, \quad \Delta_1 = 1$$

$$P_2 = G_4, \quad \Delta_2 = \Delta$$

故有 
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2}{\Delta} = \frac{G_1 G_2 G_3}{1 - G_1 G_2 H_1 + G_2 H_1 + G_2 G_3 H_2} + G_4$$

(f) 信号流图如图 2.4.19(f) 所示,



图解 2.4.19(f)

从信号流程图可见,有两条前向通路,一个回路

$$\Delta = 1 + G_1 G_2 H_1$$

$$P_1 = G_1 G_2, \quad \Delta_1 = 1$$

$$P_2 = G_3 G_2, \quad \Delta_2 = 1$$

故有 
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2}{\Delta} = \frac{G_1 G_2 + G_2 G_3}{1 + G_1 G_2 H_1}$$

2.4.20 画出图 2.4.66 中各系统结构图对应的信号流图,并用梅森增益公式求传递函数  $C(s)/R(s)$  和  $C(s)/N(s)$ 。

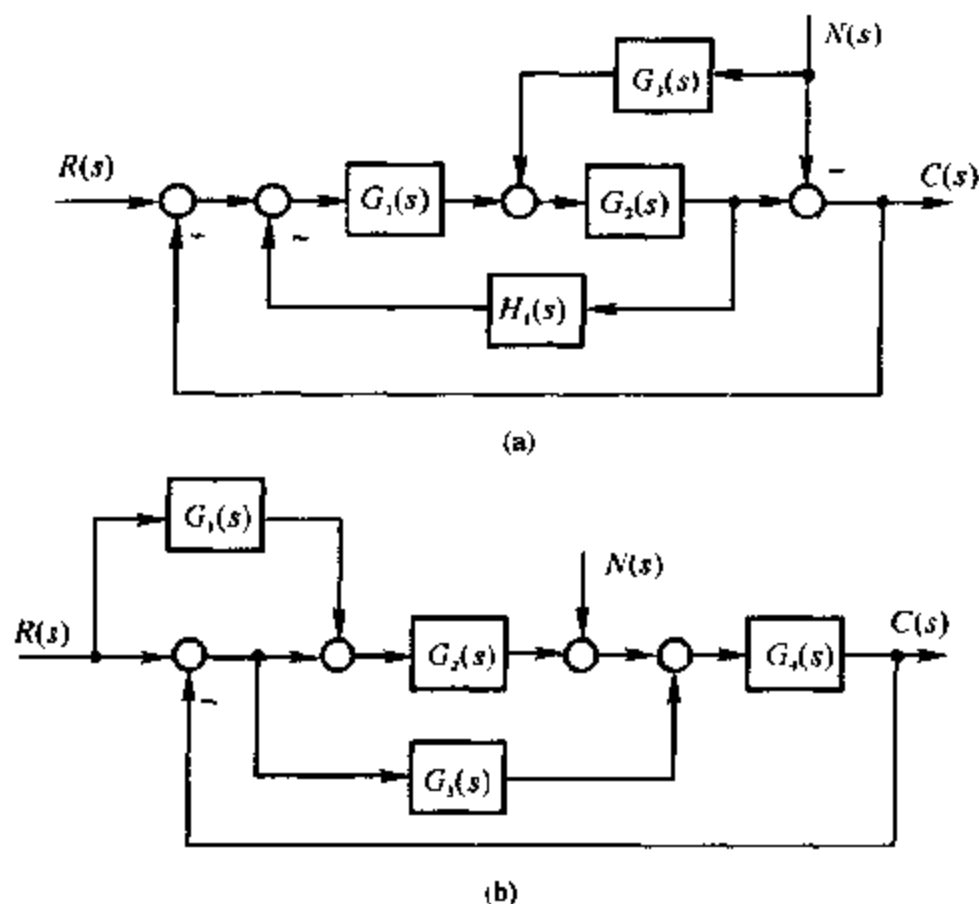
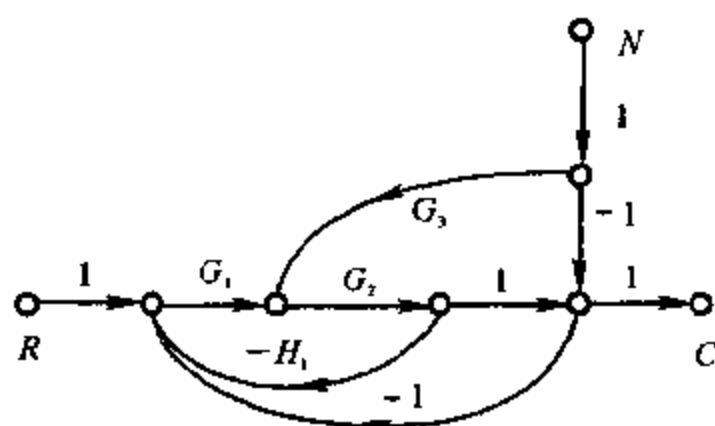


图 2.4.66 题 2.4.18 系统结构图

解 (a) 信号流图如图解 2.4.20(a) 所示。



图解 2.4.20(a)

当  $R$  作用时,由信号流图,存在一条前向通路,两个回路

$$\Delta = 1 + G_1 G_2 H_1 + G_1 G_2$$

$$P = G_1 G_2, \quad \Delta_1 = 1$$

故有

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 G_2 + G_1 G_2 H_1}$$

当  $N$  作用时, 由信号流程图, 存在两条前向通路, 两个回路

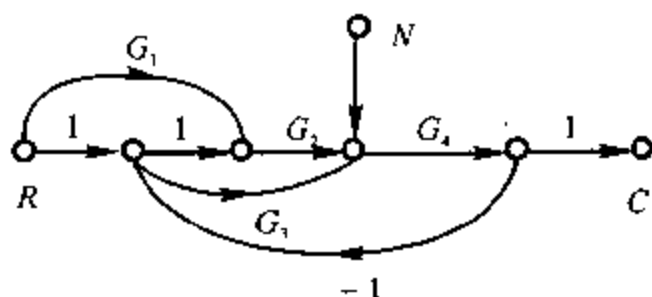
$$P_1 = -1, \quad \Delta_1 = 1 + G_1 G_2 H_1$$

$$P_2 = G_3 G_2, \quad \Delta_2 = 1$$

故有

$$\frac{C(s)}{N(s)} = \frac{-(1 + G_1 G_2 H_1) + G_2 G_3}{1 + G_1 G_2 + G_1 G_2 H_1}$$

(b) 信号流程图如图解 2.4.20(b) 所示。



图解 2.4.20(b)

当  $R$  作用时, 由信号流程图, 存在三条前向通路, 两个回路

$$\Delta = 1 + G_2 G_4 + G_3 G_4$$

$$P_1 = G_2 G_4, \quad \Delta_1 = 1$$

$$P_2 = G_1 G_2 G_4, \quad \Delta_2 = 1$$

$$P_3 = G_1 G_4, \quad \Delta_3 = 1$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_2 G_4 + G_1 G_2 G_4 + G_3 G_4}{1 + G_2 G_4 + G_3 G_4}$$

当  $N$  作用时, 由信号流程图, 存在一条前向通路, 两个回路

$$P_1 = G_4, \quad \Delta_1 = 1$$

$$\frac{C(s)}{N(s)} = \frac{G_4}{1 + G_2 G_4 + G_3 G_4}$$

**2.4.21** 试绘制图 2.4.67 中系统结构图对应的信号流程图, 并用梅森增益公式求传递函数  $C(s)/R(s)$  和  $E(s)/R(s)$ 。

解 (a) 信号流程图如图解 2.4.21(a) 所示。

当  $R$  对  $C$  作用时, 由信号流程图, 存在两条前向通路, 三个回路(其中一组两

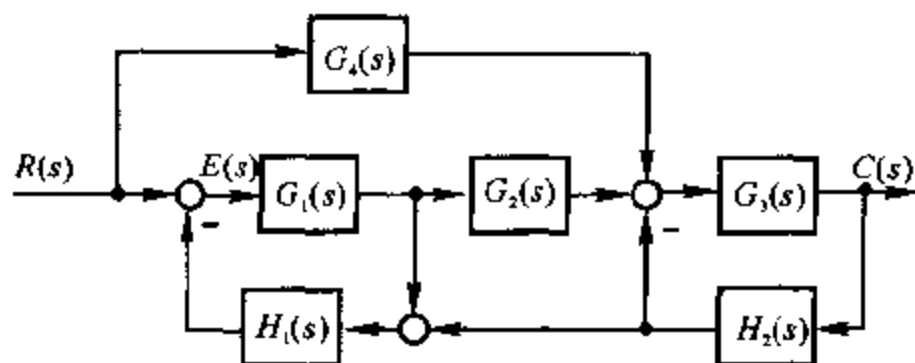
两不接触)

$$\Delta = 1 + G_1 H_1 + G_3 H_2 + G_1 G_2 G_3 H_1 H_2 + G_1 H_1 G_3 H_2$$

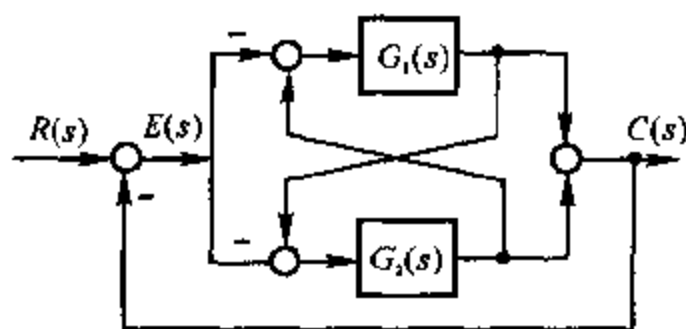
$$P_1 = G_1 G_2 G_3, \quad \Delta_1 = 1$$

$$P_2 = G_3 G_4, \quad \Delta_2 = 1 + G_1 H_1$$

故有 
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1 G_2 G_3 + G_3 G_4 (1 + G_1 H_1)}{1 + G_1 H_1 + G_3 H_2 + G_1 G_2 G_3 H_1 H_2 + G_1 H_1 G_3 H_2}$$

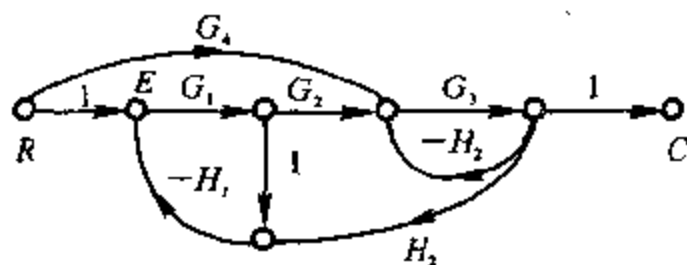


(a)



(b)

图 2.4.67 题 2.4.21 系统结构图



图解 2.4.21(a)

当  $R$  对  $E$  作用时,由信号流图,存在两条前向通路,三个回路

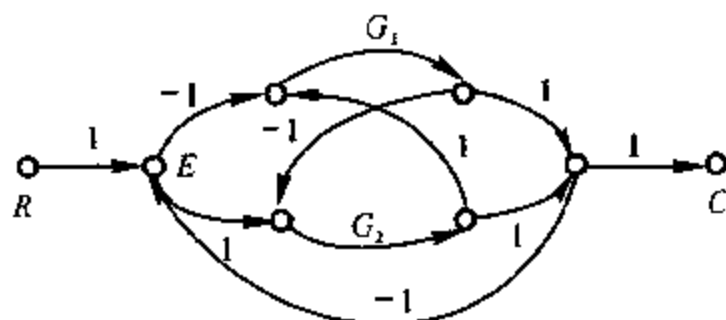
$$P_1 = 1, \quad \Delta_1 = 1 + G_3 H_2$$

$$P_2 = G_4 G_3 H_2 (-H_1), \quad \Delta_2 = 1$$



故有 
$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1 + G_3 H_2 - G_3 G_4 H_1 H_2}{1 + G_1 H_1 + G_3 H_2 + G_1 G_2 G_3 H_1 H_2 + G_1 G_3 H_1 H_2}$$

(b) 信号流图如图解 2.4.21(b) 所示。



图解 2.4.21(b)

R 对 C 有四条前向通路,五个回路

$$\Delta = 1 - G_1 + G_2 + G_1 G_2 + G_2 G_1 + G_1 G_2 = 1 - G_1 + G_2 + 3G_1 G_2$$

$$P_1 = -G_1, \quad \Delta_1 = 1$$

$$P_2 = G_2, \quad \Delta_2 = 1$$

$$P_3 = (-G_1)(-G_2), \quad \Delta_3 = 1$$

$$P_4 = G_2 G_1, \quad \Delta_4 = 1$$

故有 
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{-G_1 + G_2 + 2G_1 G_2}{1 - G_1 + G_2 + 3G_1 G_2}$$

R 对 E 有一条前向通路,五个回路

$$P_1 = 1 + G_1 G_3, \quad \Delta_1 = 1$$

故有 
$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1 + G_1 G_2}{1 - G_1 + G_2 + 3G_1 G_2}$$

2.4.22 试用梅森增益公式求图 2.4.68 中各系统信号流图的传递函数  $C(s)/R(s)$ 。

解 (a) 存在两条前向通路,三个回路

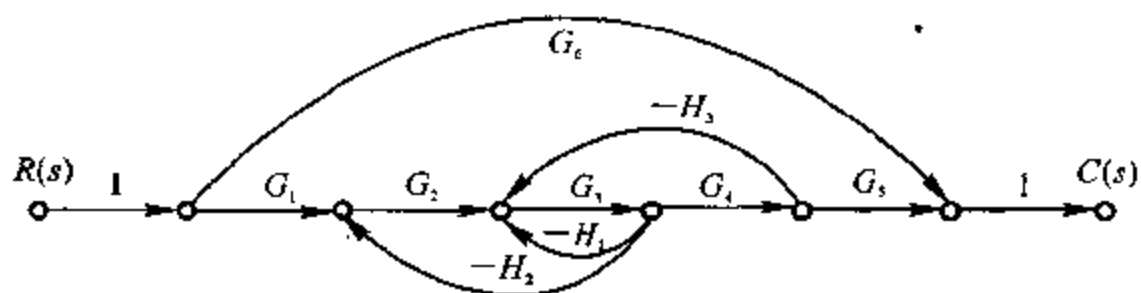
$$\Delta = 1 + G_3 H_1 + G_2 G_3 H_2 + G_3 G_4 H_3$$

$$P_1 = G_1 G_2 G_3 G_4 G_5, \quad \Delta_1 = 1$$

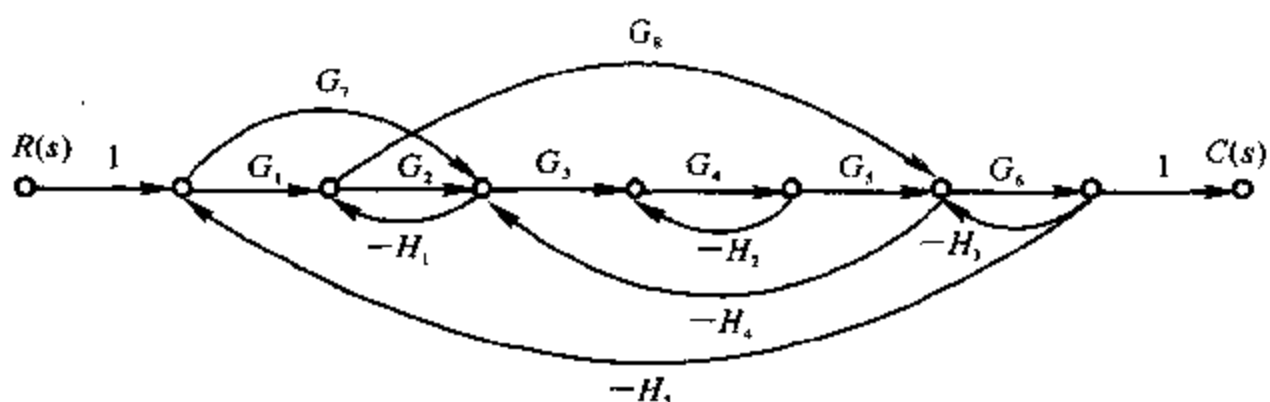
$$P_2 = G_6, \quad \Delta_2 = \Delta$$

故有 
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2}{\Delta} = G_6 + \frac{G_1 G_2 G_3 G_4 G_5}{1 + G_3 H_1 + G_2 G_3 H_2 + G_3 G_4 H_3}$$

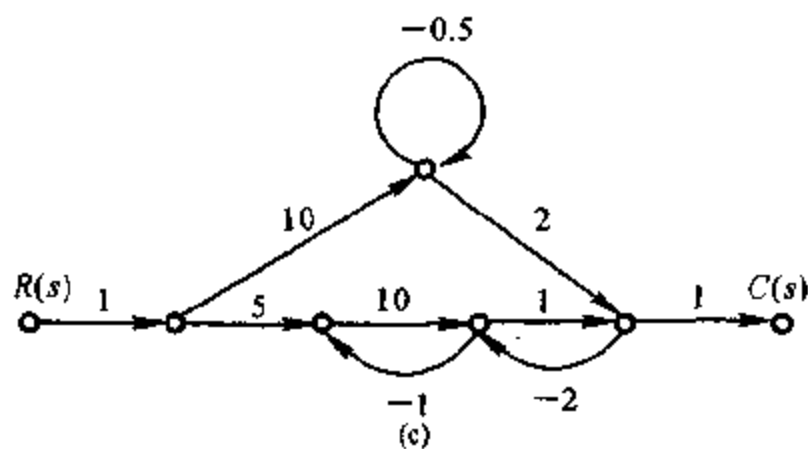
(b) 存在四条前向通路,九个回路(六组两两不相交,一组三个不相交)



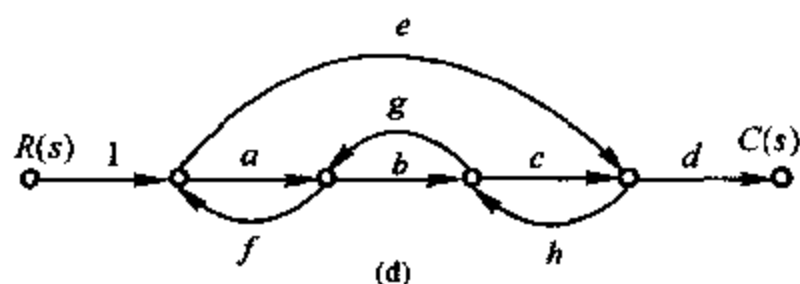
(a)



(b)



(c)



(d)

图 2.4.68 题 2.4.22 系统信号流图



(c) 存在两条前向通路,三个回路(两对不相交回路)

$$\Delta = 1 + 10 + 2 + 0.5 + 0.5 \times 10 + 0.5 \times 2 = 19.5$$

$$P_1 = 5 \times 10 = 50, \quad \Delta_1 = 1 + 0.5 = 1.5$$

$$P_2 = 10 \times 2 = 20, \quad \Delta_2 = 1 + 10 = 11$$

故有 
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2}{\Delta} = \frac{75 + 220}{19.5} = 15.128$$

(d) 存在两条前向通路,四个回路(一对不相交)

$$\Delta = 1 - af - bg - ch - ehgf + afch$$

$$P_1 = abcd, \quad \Delta_1 = 1$$

$$P_2 = ed, \quad \Delta_2 = 1 - bg$$

故有 
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{abcd + ed(1 - bg)}{1 - af - bg - ch - ehgf + afch}$$

(e)  $R_1$  作用时,存在四条前向通路,四个回路(一对不相交)

$$\Delta = 1 + cf + eg + bcdeh + adeh + cfeg$$

$$P_1 = bcde, \quad \Delta_1 = 1$$

$$P_2 = ade, \quad \Delta_2 = 1$$

$$P_3 = bc, \quad \Delta_3 = 1 + eg$$

$$P_4 = a, \quad \Delta_4 = 1 + eg$$

故有 
$$\frac{C(s)}{R_2(s)} = \frac{le(1 + ef) - leh(a + bc)}{1 + ef + eg + bcdeh + adeh + cfeg}$$

(f)  $R_1$  作用时,存在 12 条前向通路,两个回路

$$\Delta = 1 - degf - gf, \quad P_1 = ah, \quad \Delta_1 = 1 - gf$$

$$P_2 = aej, \quad P_3 = aegi, \quad P_4 = bdh, \quad P_5 = bdej, \quad P_6 = bdegi$$

$$P_7 = bj, \quad P_8 = bgi, \quad P_9 = cfj, \quad P_{10} = cfdh$$

$$P_{11} = cfdej, \quad P_{12} = \alpha, \quad \Delta_2 \sim \Delta_{12} = 1$$

故有 
$$\frac{C(s)}{R_1(s)} =$$

$$\frac{ah(1 - gf) - aej + aegi + bdh + bdej + bdegi + bj + bgi + cfj + cfdh + cfdej + \alpha}{1 - degf - gf}$$

$R_2$  作用时,存在四条前向通路

$$P_1 = fdh, \quad P_2 = fdej, \quad P_3 = fj, \quad P_4 = i, \quad \Delta_i = 1$$

故有 
$$\frac{C(s)}{R_2(s)} = \frac{fdh + fdej + fj + i}{1 - degf - gf}$$

$R_3$  作用时, 有三个前向通路

$$P_1 = h, \quad P_2 = ej, \quad P_3 = egi, \quad \Delta_i = 1$$

故有

$$\frac{C(s)}{R_3(s)} = \frac{h + ej + egi}{1 - degf - gf}$$

2.4.23 设有一复杂液位被控对象, 其液位阶跃响应实验结果如下表所示:

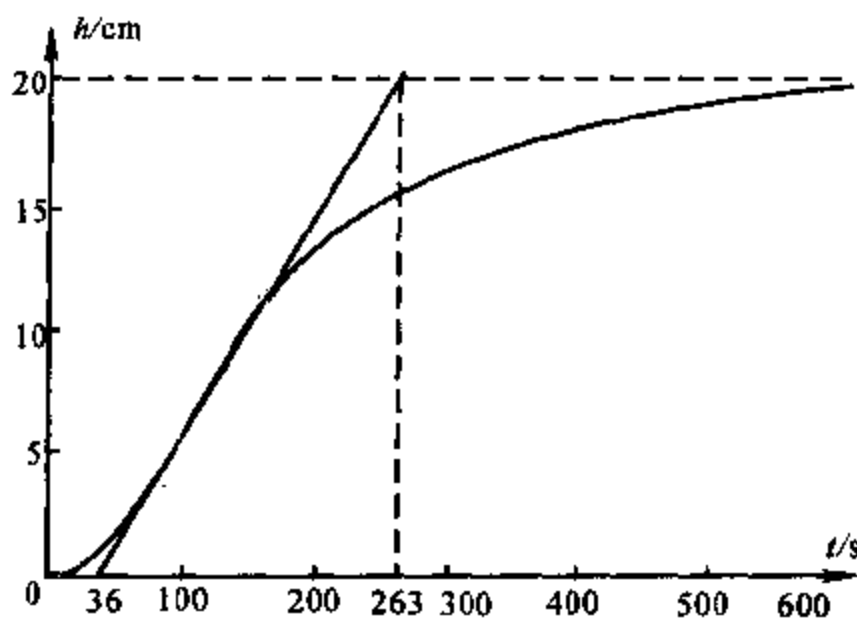
$t/s$	0	10	20	40	60	80	100	140	180	250	300	400	500	600
$h/cm$	0	0	0.2	0.8	2.0	3.6	5.4	8.8	11.8	14.4	16.6	18.4	19.2	19.6

要求:

(1) 画出液位对象的阶跃响应曲线;

(2) 若该对象可用有延迟的一阶惯性环节近似, 试用近似法确定延迟时间  $\tau$  和时间常数  $T$ 。

解 (1) 液位对象的阶跃响应曲线如图解 2.4.23 所示。



图解 2.4.23

(2) 由图解 2.4.23 可得

$$\tau = 36 \text{ s}, \quad T = 263 \text{ s}$$

2.4.24 已知被控对象的单位阶跃响应实验数据如下表所示, 试用两点法确定该对象的传递函数。

$t/s$	0	15	30	45	60	75	90	105	120
$y(t)$	0	0.02	0.045	0.065	0.090	0.135	0.175	0.233	0.285
$t/s$	135	150	165	180	195	210	225	240	255
$y(t)$	0.330	0.379	0.430	0.485	0.540	0.595	0.650	0.710	0.780
$t/s$	270	285	300	315	330	345	360	375	390
$y(t)$	0.830	0.885	0.951	0.980	0.998	0.999	1.000	1.000	1.000

解 选择  $t_1 = 165 \text{ s}$ ,  $y(t_1) = 0.43$

$t_2 = 195 \text{ s}$ ,  $y(t_2) = 0.54$

由公式可得

$$T = \frac{t_2 - t_1}{\ln[1 - y(t_1)] - \ln[1 - y(t_2)]} = \frac{195 - 165}{\ln 0.57 - \ln 0.46} = 140 \text{ s}$$

$$\tau = \frac{t_2 \ln[1 - y(t_1)] - t_1 \ln[1 - y(t_2)]}{\ln[1 - y(t_1)] - \ln[1 - y(t_2)]} = \frac{-195 \times 0.562 + 165 \times 0.7765}{\ln 0.57 - \ln 0.46} = 86.4 \text{ s}$$

$$K = \frac{y(\infty) - y(0)}{\Delta u} = 1$$

故对象的传递函数为

$$G(s) = \frac{Ke^{-\tau s}}{Ts + 1} = \frac{e^{-86.4s}}{140s + 1}$$

## 第3章 线性系统的时域分析法

---

### 3.1 重点内容提要

#### 3.1.1 稳定性

##### 1. 定义

若系统受扰动偏离了平衡状态,当扰动消除后系统能够恢复到原来的平衡状态,则称系统稳定,反之称系统不稳定。

##### 2. 系统稳定的充要条件

系统闭环特征方程的所有根都具有负的实部,或所有闭环特征根均位于左半  $s$  平面。

##### 3. 代数稳定判据

(1) 必要条件:闭环特征多项式各项系数均大于零。

(2) 赫尔维茨判据:由系统特征方程各项系数所构成的各阶赫尔维茨行列式全部为正,则系统稳定。

(3) 劳思判据:由系统特征方程各项系数列出劳思表,如果劳思表中第一列元素严格为正,则系统稳定;如果表中第一列元素出现小于零的数,则系统不稳定;第一列各元素符号改变的次数,就是特征方程正实部根的个数。

##### 4. 与稳定性相关的问题

系统的稳定性只与系统自身结构参数有关,而与初始条件、外作用的幅值无关;系统的稳定性只取决于系统的特征根(极点),而与系统零点无关。

##### 5. 结构不稳定

并非由于系统参数设置不当,而是由于系统结构原因导致的不稳定,称为结构不稳定。

#### 3.1.2 稳态误差计算

1. 误差的两种定义及其相互关系[参见图 3.1.1(a) 及其等效变换

图 3.1.1(b)]

- (1) 从系统输入端定义的误差  $E(s)$  是系统输入  $R(s)$  与反馈信号之差;
- (2) 从系统输出端定义的误差  $E'(s)$  是  $R'(s)$  信号与实际值  $C(s)$  之差;
- (3) 两种误差之间的关系:  $E'(s) = E(s)/H(s)$ 。

$E(s)$  在实际系统中一般是可量测的,具有一定的物理意义;而  $E'(s)$  一般只有数学意义。对于单位反馈系统来说,上述两种定义是等价的。

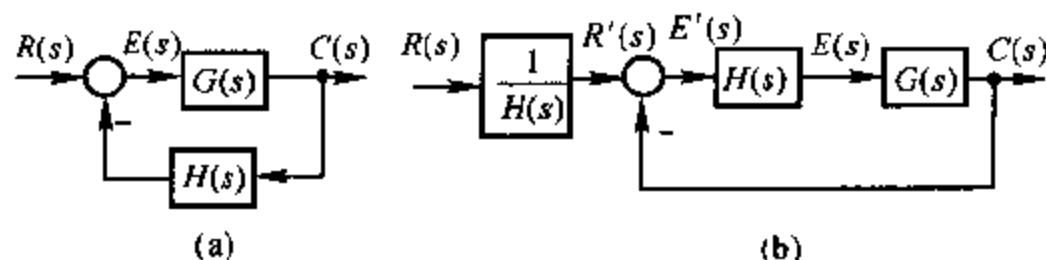


图 3.1.1 系统结构图及误差定义

## 2. 稳态误差

是系统的稳态指标,是对系统稳态控制精度的度量。

稳态误差有两种含义:

- (1) 静态误差  $e_{ss}$ : 误差响应达到稳态时的值;
- (2) 动态误差  $e_s(t)$ : 误差  $e(t)$  中的稳态分量。

## 3. 计算稳态误差的方法

### (1) 一般方法:

- 判定系统的稳定性(对于稳定系统求  $e_{ss}$  才有意义);
- 按误差定义求出系统误差传递函数  $\Phi_e(s)$  或  $\Phi_{en}(s)$ ;
- 利用终值定理计算稳态误差:  $e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} [s \Phi_e(s) R(s) + s \Phi_{en}(s) N(s)]$ 。

### (2) 静态误差系数法:

- 判定系统稳定性;
- 确定系统开环增益  $K$  及型别  $v$ , 求静态误差系数;
- 利用静态误差系数法对应的静态误差公式表计算  $e_{ss}$  值。

(注:静态误差系数法的适用条件:系统必须稳定;误差是按输入端定义的;输入信号不能有其他的前馈通道;系统是非最小相角的;只能用于计算控制输入时的静态误差。)

## 4. 与稳态误差相关问题

- (1) 稳态误差不仅与系统自身的结构参数有关,而且与外作用的大小、形



式、作用点有关。

(2) 系统的位置误差、速度误差和加速度误差分别是在位置信号(阶跃)、速度信号(斜坡)和加速度信号作用下系统响应达到稳态时,反馈量对输入量之间的误差,是位置意义上的误差。

(3) 要反映稳态误差随时间变化的规律,可用动态误差系数法。

(4) 在主反馈口到干扰作用点之间的前向通路上增大放大倍数、设置积分环节可以同时减小输入  $r(t)$  和干扰  $n(t)$  作用下的稳态误差。

### 3.1.3 系统动态性能指标计算

(1) 一阶系统特征参数(时间常数  $T$ )与动态指标之间的关系

$$t_s = 3T$$

(2) 欠阻尼二阶系统复极点位置的表示方法及其关系(如图 3.1.2 所示)。

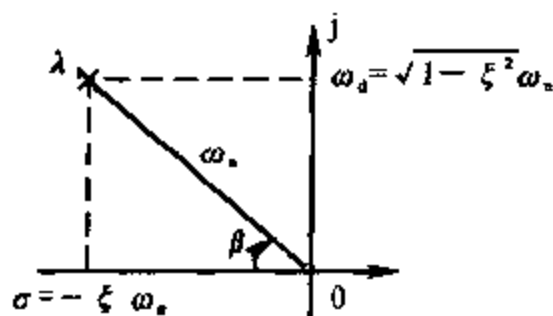


图 3.1.2 欠阻尼二阶系统极点表示

(3) 欠阻尼二阶系统特征参数( $\xi, \omega_n$ )与动态指标( $t_p, \sigma\%, t_s$ )间的关系

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\sigma\% = e^{-\xi/\sqrt{1-\xi^2}} \times 100\%$$

$$t_s = \frac{3.5}{\xi\omega_n}$$

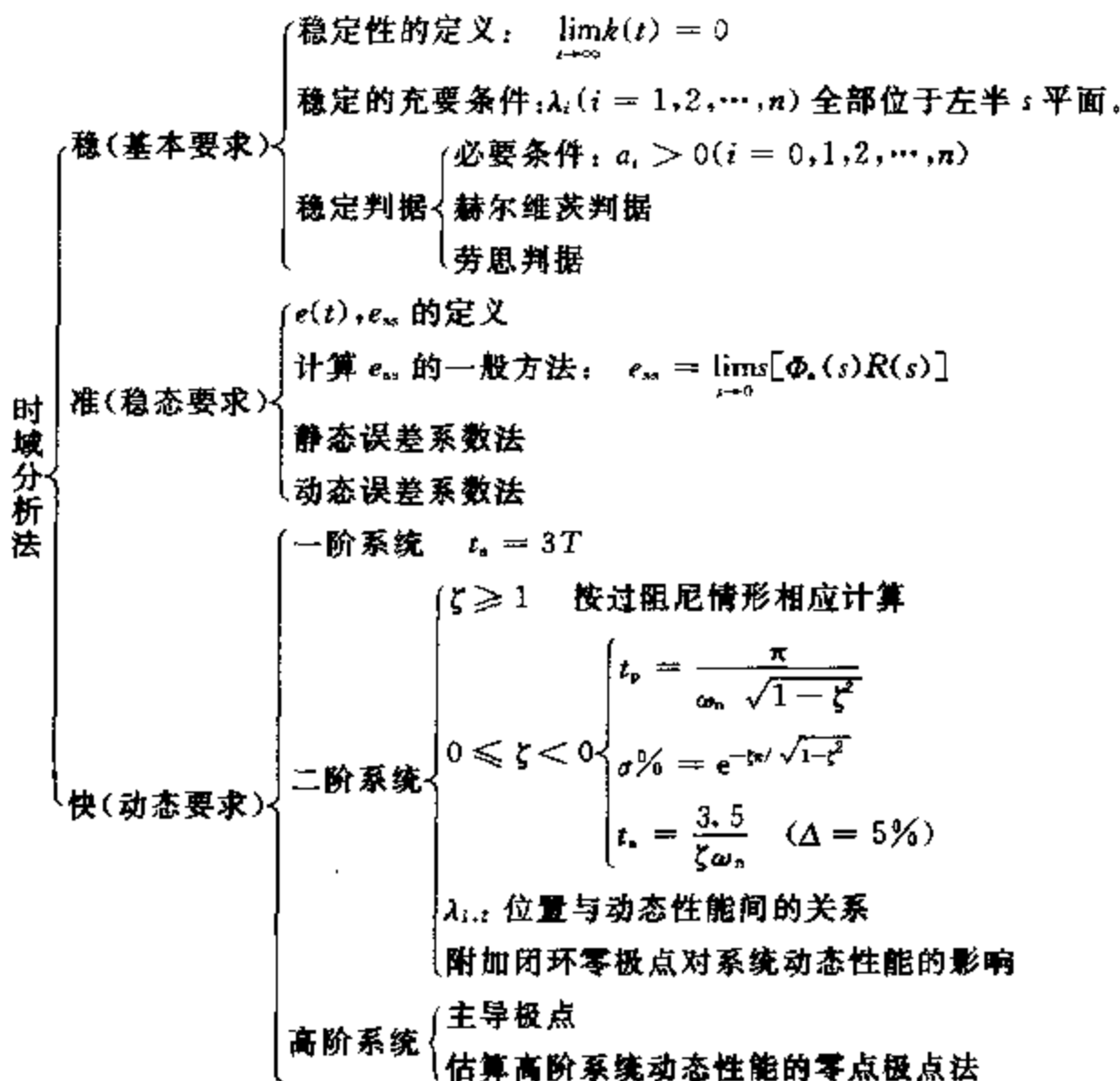
(4) 典型二阶系统动态性能随极点位置变化的规律。

(5) 附加开环零、极点对系统性能的影响。

(6) 附加闭环零、极点对系统性能的影响。

(7) 主导极点的概念,高阶系统动态指标估算的零点极点法。

## 3.2 知识结构图



## 3.3 考点及典型题选解

系统的稳定性分析,稳态误差计算和动态性能指标计算是系统分析的基本任务,也是本课程的必考内容。通常的考点有:用劳思判据判定系统的稳定性或确定使系统稳定的参数范围;利用静态误差系数法或一般方法求系统的稳态误差;计算一、二阶系统(特别是典型欠阻尼二阶系统)的动态性能指标;给定系统的性能指标或典型响应特性,反过来确定系统参数。

### 3.3.1 典型题

1. 一阶系统结构图如图 3.3.1 所示。要求调节时间  $t_s \leq 0.1$  s, 试确定反馈系数  $K_i$  的值。

2. 给定典型二阶系统的设计指标: 超调量  $\sigma\% \leq 5\%$ , 调节时间  $t_s < 3$  s, 峰值时间  $t_p < 1$  s, 试确定系统极点配置的区域, 以获得预期的响应特性。

3. 电子心率起搏器心率控制系统结构图如图 3.3.2 所示, 其中模仿心脏的传递函数相当于一纯积分环节, 要求:

(1) 若  $\zeta = 0.5$  对应最佳响应, 问起搏器增益  $K$  应取多大?

(2) 若期望心速为 60 次/min, 并突然接通起搏器, 问 1 s 后实际心速为多少? 瞬时最大心速多大?

4. 机器人控制系统结构图如图 3.3.3 所示。试确定参数  $K_1, K_2$  值, 使系统阶跃响应的峰值时间  $t_p = 0.5$  s, 超调量  $\sigma\% = 2\%$ 。

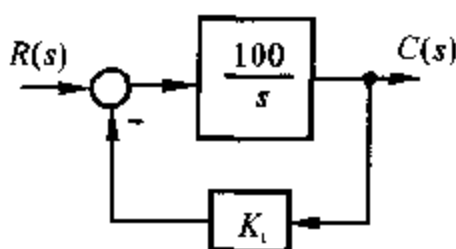


图 3.3.1 系统结构图

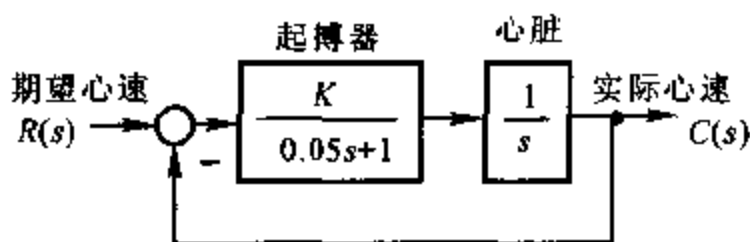


图 3.3.2 电子心率起搏器系统

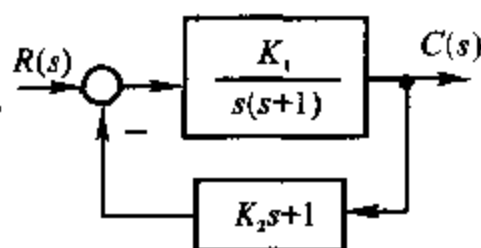


图 3.3.3 机器人位置控制系统

5. 图 3.3.4 是某垂直起降飞机的高度控制系统结构图。

(1) 当  $K = 1$  时, 判断系统是否稳定;

(2) 试确定使系统稳定的  $K$  值范围。

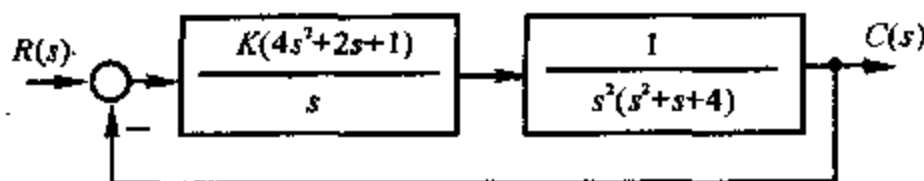


图 3.3.4 控制系统结构图

6. 单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K(s+1)}{s(Ts+1)(2s+1)}$$

试确定使系统稳定的  $T$  和  $K$  的取值范围, 并以  $T$  和  $K$  为坐标画出稳定域图。

7. 系统结构图如图 3.3.5 所示。已知  $r(t) = n_1(t) = n_2(t) = 1(t)$ , 试分别计算  $r(t)$ ,  $n_1(t)$  和  $n_2(t)$  作用时的稳态误差, 并说明积分环节设置位置对减小输入和干扰作用下的稳态误差的影响。

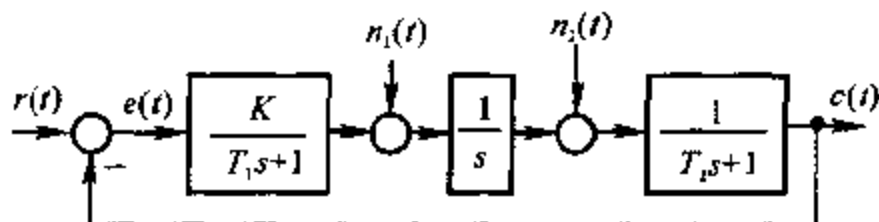


图 3.3.5 系统结构图

8. 控制系统结构图如图 3.3.6 所示。其中  $K_1, K_2 > 0, \beta \geq 0$ 。试分析:

- (1)  $\beta$  值大小对系统稳定性的影响;
- (2)  $\beta$  值大小对动态性能 ( $\sigma\%, t_s$ ) 的影响;
- (3)  $\beta$  值大小对  $r(t) = at$  作用下稳态误差的影响。

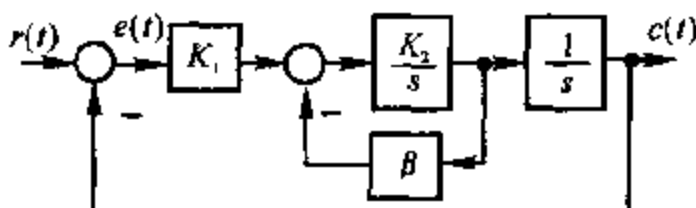


图 3.3.6 系统结构图

9. 已知系统结构图如图 3.3.7 所示, 要求系统在  $r(t) = t^2$  作用时, 稳态误差  $e_{ss} < 0.5$ , 试确定满足要求的开环增益  $K$  的范围。

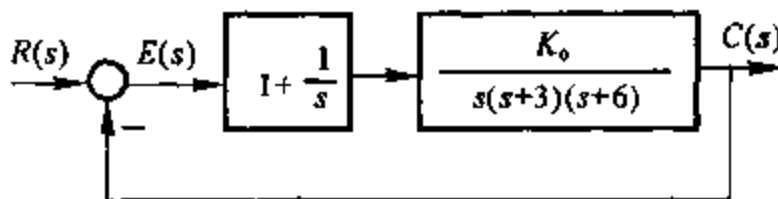


图 3.3.7 系统结构图

10. 已知控制系统结构图如图 3.3.8(a) 所示, 其单位阶跃响应如图 3.3.8(b) 所示, 系统的稳态位置误差  $e_{ss} = 0$ 。试确定  $K$ ,  $v$  和  $T$  的值。

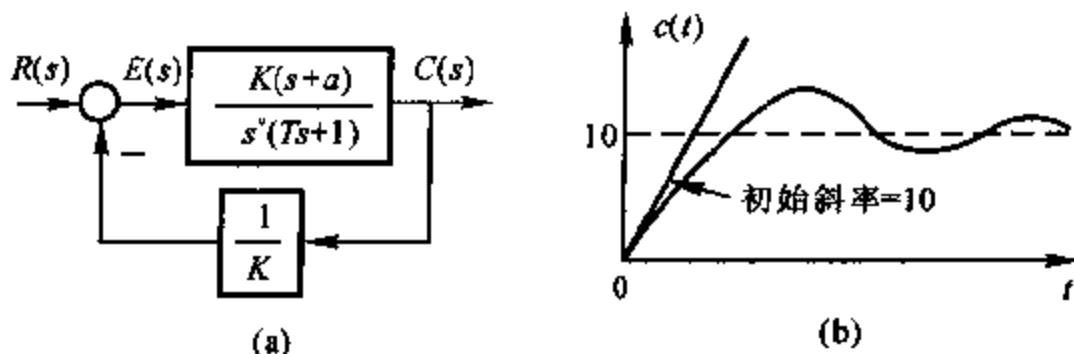


图 3.3.8 系统结构图

### 3.3.2 典型题解析

#### 1. 由结构图写出闭环系统传递函数

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{100}{s}}{1 + \frac{100}{s}K_t} = \frac{100}{s + 100K_t} = \frac{\frac{1}{K_t}}{\frac{s}{100K_t} + 1}$$

所以闭环增益  $K_o = \frac{1}{K_t}$ , 时间常数  $T = \frac{1}{100K_t}$ 。

依题意, 令  $t_s = 3T = \frac{3}{100K_t} \leq 0.1$ , 得  $K_t \geq 0.3$ 。

#### 2. 依题

$$\sigma\% \leq 5\%, \quad \Rightarrow \zeta \geq 0.708 (\beta \leq 45^\circ)$$

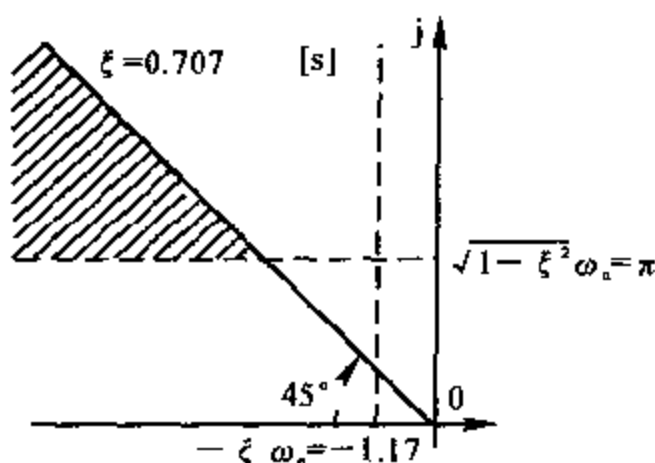
$$t_s = \frac{3.5}{\zeta\omega_n} < 3, \quad \Rightarrow \zeta\omega_n > 1.17$$

$$t_p = \frac{\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n} < 1, \quad \Rightarrow \sqrt{1-\zeta^2}\omega_n > 3.14$$

综合以上条件可画出满足要求的特征根区域如图解 3.3.2 所示。

#### 3. 依题, 系统传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{\frac{K}{0.05}}{s^2 + \frac{1}{0.05}s + \frac{K}{0.05}} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \begin{cases} \omega_n = \sqrt{\frac{K}{0.05}} \\ \zeta = \frac{1}{0.05 \times 2\omega_n} \end{cases}$$



图解 3.3.2

令  $\zeta = 0.5$ , 可解出  $\begin{cases} K = 20 \\ \omega_n = 20 \end{cases}$

将  $t = 1\text{ s}$  代入二阶系统阶跃响应公式

$$h(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t + \beta)$$

可得  $h(1) = 1.000\ 024(\text{次/s}) = 60.001\ 45(\text{次/min})$

$\zeta = 0.5$  时, 系统超调量  $\sigma\% = 16.3\%$ , 最大心速为

$$h(t_p) = 1 + 0.163 = 1.163(\text{次/s}) = 69.78(\text{次/min})$$

4. 依题, 系统传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{\frac{K_1}{s(s+1)}}{1 + \frac{K_1(K_2 s + 1)}{s(s+1)}} = \frac{K_1}{s^2 + (1 + K_1 K_2)s + K_2} = \frac{\frac{K_0 \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}}$$

由 
$$\begin{cases} \sigma\% = e^{-\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} = 0.02 \\ t_p = \frac{\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n} = 0.5 \end{cases}$$

联立求解得

$$\begin{cases} \zeta = 0.78 \\ \omega_n = 10 \end{cases}$$

比较  $\Phi(s)$  分母系数得

$$\begin{cases} K_2 = \omega_n^2 = 100 \\ K_1 = \frac{2\zeta\omega_n - 1}{K_2} = 0.146 \end{cases}$$

5. 由结构图, 系统开环传递函数为:

$$G(s) = \frac{K(4s^2 + 2s + 1)}{s^3(s^2 + s + 4)} \quad \begin{cases} \text{开环增益 } K_k = K/4 \\ \text{系统型别 } v = 3 \end{cases}$$

$$(1) K = 1 \text{ 时: } D(s) = s^5 + s^4 + 4s^3 + 4s^2 + 2s + 1 = 0$$

劳思表:

$s^5$	1	4	2
$s^4$	1	4	1
$s^3$	$\epsilon$	1	
$s^2$	$\frac{4\epsilon - 1}{\epsilon}$	1	
$s$	$-\infty$		
$s^0$	1		

$K = 1$  时系统不稳定, 有 2 个正根。

$$(2) D(s) = s^5 + s^4 + 4s^3 + 4Ks^2 + 2Ks + K = 0$$

劳思表:

$s^5$	1	4	$2K$
$s^4$	1	$4K$	$K$
$s^3$	$4(1-K)$	$K$	$\Rightarrow K < 1$
$s^2$	$\frac{(15-16K)K}{4(1-K)}$	$K$	$\Rightarrow K > 16/15 = 1.067$
$s$	$\frac{-32K^2 + 47K - 16}{4(1-K)}$		$\Rightarrow 0.536 < K < 0.933$
$s^0$	$K$		$\Rightarrow K > 0$

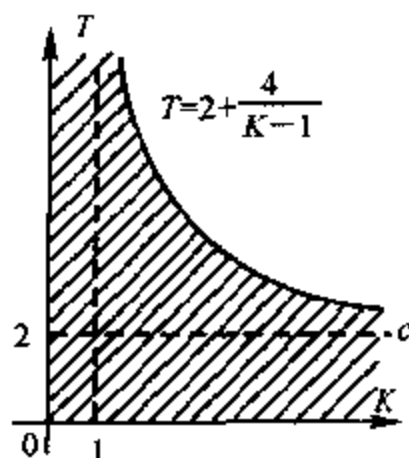
所以使系统稳定的  $K$  值范围是:  $0.536 < K < 0.933$ 。

$$6. \text{ 特征方程为: } D(s) = 2Ts^3 + (2+T)s^2 + (1+K)s + K = 0$$

列劳思表

$s^3$	$2T$	$1+K$	$\Rightarrow T > 0$
$s^2$	$2+T$	$K$	$\Rightarrow T > -2$
$s$	$1+K - \frac{2TK}{2+T}$		$\Rightarrow T < 2 + \frac{4}{K-1}$
$s^0$	$K$		$\Rightarrow K > 0$

综合所得条件, 当  $K > 1$  时, 使系统稳定的参数取值范围如图解 3.3.6 中阴影部分所示。



$$7. G(s) = \frac{K}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)} \quad \begin{cases} K \\ v = 1 \end{cases}$$

图 解 3.3.6 稳定参数范围

$r(t) = 1(t)$  时,  $e_{ss} = 0$ ;

$$\Phi_{en_1}(s) = \frac{E(s)}{N_1(s)} = \frac{-\frac{1}{s(T_2s+1)}}{1 + \frac{K}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}} = \frac{-(T_1s+1)}{s(T_1s+1)(T_2s+1)+K}$$

$n_1(t) = 1(t)$  时,

$$e_{ssn_1} = \lim_{s \rightarrow 0} s \Phi_{en_1}(s) N_1(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \Phi_{en_1}(s) \frac{1}{s} = -\frac{1}{K}$$

$$\Phi_{en_2}(s) = \frac{E(s)}{N_2(s)} = \frac{-\frac{1}{(T_2s+1)}}{1 + \frac{K}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}} = \frac{-s(T_1s+1)}{s(T_1s+1)(T_2s+1)+K}$$

$n_2(t) = 1(t)$  时,

$$e_{ssn_2} = \lim_{s \rightarrow 0} s \Phi_{en_2}(s) N_2(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \Phi_{en_2}(s) \frac{1}{s} = 0$$

可见,在反馈比较点到干扰作用点之间的前向通道中设置积分环节,可以同时减小或消除由输入和干扰引起的稳态误差。

8. 系统开环传递函数为  $G(s) = \frac{K_1 K_2}{s(s + \beta K_2)}$   $\begin{cases} \text{开环增益} & K = K_1/\beta \\ \text{系统型别} & v = 1 \end{cases}$

$$\Phi(s) = \frac{K_1 K_2}{s^2 + \beta K_2 s + K_1 K_2}$$

$$\omega_n = \sqrt{K_1 K_2}, \quad \zeta = \frac{\beta K_2}{2 \sqrt{K_1 K_2}} = \frac{\beta}{2} \sqrt{\frac{K_2}{K_1}}$$

$$D(s) = s^2 + \beta K_2 s + K_1 K_2$$

(1) 由  $D(s)$  表达式可见,当  $\beta = 0$  时,系统结构不稳定;当  $\beta > 0$  时,系统总是稳定的。

$$(2) \text{ 由 } \zeta = \frac{\beta}{2} \sqrt{\frac{K_2}{K_1}} \text{ 可见, } \beta \uparrow \begin{cases} \beta \uparrow \rightarrow \sigma\% \downarrow \\ t_s = \frac{3.5}{\zeta \omega_n} = \frac{7}{\beta K_2} \downarrow \end{cases}$$

$$(3) \beta \uparrow \rightarrow e_{ss} = \frac{a}{K} = \frac{a\beta}{K_2} \uparrow$$

9. 系统开环传递函数

$$G(s) = \frac{K_0(s+1)}{s^2(s+3)(s+6)} \quad \begin{cases} \text{开环增益} & K = K_0/18 \\ \text{系统型别} & v = 2 \end{cases}$$

由特征方程  $D(s) = s^4 + 9s^3 + 18s^2 + K_0s + K_0 = 0$  列劳思表:



$s^4$	1	18	$K_0$
$s^3$	9	$K_0$	
$s^2$	$\frac{162 - K_0}{9}$	$K_0$	$\rightarrow K_0 < 162$
$s^1$	$\frac{(162 - K_0)K_0 - 81K_0}{9}$	0	$\rightarrow K_0 < 81$
$s^0$	$K_0$		$\rightarrow K_0 > 0$

使系统稳定的开环增益  $K$  的范围为:  $0 < K = \frac{K_0}{18} < 4.5$ 。

利用静态误差系数法, 当  $r(t) = t^2$  时, 令  $e_{ss} = \frac{A}{K} = \frac{2}{K} < 0.5$ , 解出  $K > 4$ 。

综合可得满足要求的  $K$  值范围为  $4 < K < 4.5$ 。

$$10. G(s) = \frac{s+a}{s^v(Ts+1)} \quad \begin{cases} K_K = a \\ v \text{ 待定} \end{cases}$$

由  $r(t) = 1(t)$  时,  $e_{ss} = 0$ , 可以判定,  $v \geq 1$

$$\Phi(s) = \frac{\frac{K(s+a)}{s^v(Ts+1)}}{1 + \frac{s+a}{s^v(Ts+1)}} = \frac{K(s+a)}{s^v(Ts+1) + s+a}$$

$$D(s) = Ts^{v+1} + s^v + s + a$$

系统单位阶跃响应收敛, 系统稳定, 因此必有:  $v \leq 2$ 。

根据单位阶跃响应曲线, 有

$$h(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \Phi(s)R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \frac{K(s+a)}{s^v(Ts+1) + s+a} = K = 10$$

$$h'(0) = k(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s\Phi(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{sK(s+a)}{s^v(Ts+1) + s+a} =$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{Ks^2 + aKs}{Ts^{v+1} + s^v + s + a} = 10$$

当  $T \neq 0$  时, 有

$$k(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{Ks^2}{Ts^{v+1}} = 10$$

可得

$$\begin{cases} K = 10 \\ v = 1 \\ T = 1 \end{cases}$$

当  $T = 0$  时, 有

$$k(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{Ks^2}{s^v} = 10$$

可得

$$\begin{cases} K = 10 \\ v = 2 \\ T = 0 \end{cases}$$

### 3.4 课后习题全解

3.4.1 设某高阶系统可用下列一阶微分方程近似描述

$$T\dot{c}(t) + c(t) = \tau\dot{r}(t) + r(t)$$

其中,  $1 > (T - \tau) > 0$ 。试证系统的动态性能指标为

$$t_d \left[ 0.693 + \ln\left(\frac{T - \tau}{T}\right) \right] T$$

$$t_r = 2.2T$$

$$t_s = \left[ 3 + \ln\left(\frac{T - \tau}{T}\right) \right] T$$

解 由微分方程可得出系统传递函数

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\tau s + 1}{Ts + 1}$$

在单位阶跃输入下, 有  $R(s) = \frac{1}{s}$ 。故

$$C(s) = \frac{\tau s + 1}{Ts + 1} \cdot \frac{1}{s} = \frac{T - \tau}{Ts + 1} + \frac{1}{s}$$

$$c(t) = h(t) = 1 - \frac{T - \tau}{T} e^{-t/T}$$

1) 当  $t = t_d$  时

$$h(t) = 0.5 = 1 - \frac{T - \tau}{T} e^{-t_d/T}$$

可解出

$$t_d = T \left[ \ln 2 + \ln\left(\frac{T - \tau}{T}\right) \right]$$

2) 求  $t_r$  [即  $c(t)$  从 0.1 上升到 0.9 所需的时间]。令

$$\begin{cases} h(t_1) = 0.1 = 1 - \frac{T - \tau}{T} e^{-t_1/T} \\ h(t_2) = 0.9 = 1 - \frac{T - \tau}{T} e^{-t_2/T} \end{cases}$$

可解出  $t_1 = T \left[ \ln \left( \frac{T-\tau}{T} \right) - \ln 0.9 \right]$ ,  $t_2 = T \left[ \ln \left( \frac{T-\tau}{T} \right) - \ln 0.1 \right]$

故  $t_r = t_2 - t_1 = T \ln \frac{0.9}{0.1} = 2.2T$

3) 求  $t_s$ :

$$h(t_s) = 0.95 = 1 - \frac{T-\tau}{T} e^{-t_s/\tau}$$

所以  $t_s = T \left[ \ln \frac{T-\tau}{T} - \ln 0.05 \right] = T \left[ 3 + \ln \frac{T-\tau}{T} \right]$

3.4.2 设系统的微分方程式如下:

$$(1) \quad 0.2\dot{c}(t) = 2r(t)$$

$$(2) \quad 0.04\ddot{c}(t) + 0.24\dot{c}(t) + c(t) = r(t)$$

试求系统的单位脉冲响应  $k(t)$  和单位阶跃响应  $h(t)$ 。

解 (1)  $\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2}{0.2s} = \frac{10}{s}$

$$k(t) = L^{-1}[\Phi(s)] = 10$$

$$h(t) = L^{-1}\left[\Phi(s) \cdot \frac{1}{s}\right] = L^{-1}\left[\frac{10}{s^2}\right] = 10t$$

$$(2) \quad \Phi(s) = \frac{1}{0.04s^2 + 0.24s + 1} = \frac{5^2}{s^2 + 6s + 5^2} \quad \begin{cases} \zeta = 0.6 \\ \omega_n = 5 \end{cases}$$

$$k(t) = L^{-1}[\Phi(s)] = L^{-1}\left[\frac{5^2}{(s+3)^2 + 4^2}\right] = \frac{25}{4}e^{-3t}\sin 4t$$

$$h(t) = L^{-1}\left[\Phi(s) \cdot \frac{1}{s}\right] = L^{-1}\left\{\frac{5^2}{s[(s+3)^2 + 4^2]}\right\} =$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{(s+3)}{(s+3)^2 + 4^2} - \frac{3}{4} \frac{4}{(s+3)^2 + 4^2}\right] =$$

$$1 - e^{-3t}\cos 4t - \frac{3}{4}e^{-3t}\sin 4t$$

3.4.3 已知各系统的脉冲响应,试求系统闭环传递函数  $\Phi(s)$ 。

$$(1) \quad k(t) = 0.0125e^{-1.25t}$$

$$(2) \quad k(t) = 5t + 10\sin(4t + 45^\circ)$$

$$(3) \quad k(t) = 0.1(1 - e^{-t/3})$$

解 (1)  $\Phi(s) = L[k(t)] = 0.0125/(s+1.25)$

$$(2) \quad \Phi(s) = L[k(t)] = L\left[5t + \frac{10}{\sqrt{2}}(\sin 4t + \cos 4t)\right] =$$

$$\frac{5}{s^2} + 5\sqrt{2} \left[ \frac{4}{s^2 + 4^2} + \frac{s}{s^2 + 4^2} \right] = 5 \frac{\frac{\sqrt{2}}{16}s^2 + \frac{1+4\sqrt{2}}{16}s^2 + 1}{s^2 \left( \frac{s^2}{16} + 1 \right)}$$

$$(3) \Phi(s) = L[k(t)] = 0.1 \left[ \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{3}} \right] = \frac{1}{30} \frac{1}{s \left( s + \frac{1}{3} \right)}$$

3.4.4 已知二阶系统的单位阶跃响应为

$$h(t) = 10 - 12.5e^{-1.2t} \sin(1.6t + 53.1^\circ)$$

试求系统的超调量  $\sigma\%$ 、峰值时间  $t_p$  和调节时间  $t_s$ 。

解 依题意

$$k(t) = \dot{h}(t) = 15e^{-1.2t} \sin(1.6t + 53.1^\circ) - 20e^{-1.2t} \cos(1.6t + 53.1^\circ) = 25e^{-1.2t} \sin 1.6t$$

$$\Phi(s) = L[k(t)] = \frac{40}{s^2 + 2.4s + 4} \quad \begin{cases} \omega_n = 2 \\ \zeta = 0.6 \end{cases}$$

$$t_p = 1.96$$

$$\sigma\% = e^{-\zeta\omega_n / \sqrt{1-\zeta^2}} = 9.5\%$$

$$t_s = \frac{3.5}{\zeta\omega_n} = 2.9$$

3.4.5 设单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{0.4s + 1}{s(s + 0.6)}$$

试求系统在单位阶跃输入下的动态性能。

解 依题意

$$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{0.4s + 1}{s^2 + s + 1} = \frac{\omega_n^2}{2} \frac{s + 2}{s^2 + 2\zeta_d\omega_n s + \omega_n^2}$$

对照参考文献[1]式(3-42),有:

$$\zeta_d = 0.5, \quad \omega_n = 1, \quad z = 1/0.4 = 2.5$$

$$r \xrightarrow{\text{式(3-45)}} \frac{\sqrt{z^2 - 2\zeta_d\omega_n + \omega_n^2}}{z \sqrt{1 - \zeta_d^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}/2} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\psi \xrightarrow{\text{式(3-46)}} -\pi + \arctan \left( \frac{\omega_n \sqrt{1 - \zeta_d^2}}{z - \zeta_d\omega_n} \right) + \arctan \frac{\sqrt{1 - \zeta_d^2}}{\zeta_d} =$$

$$-\pi + \arctan \frac{\sqrt{3}}{4} + \arctan \sqrt{3} = -1.686$$

$$\beta_d \frac{\text{式(3-48)}}{\zeta_d} \arctan \frac{\sqrt{1-\zeta_d^2}}{\zeta_d} = \arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3} = 1.0472$$

$$t_p \frac{\text{式(3-47)}}{\omega_n \sqrt{1-\zeta_d^2}} \frac{\beta_d - \psi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta_d^2}} = \frac{2.733}{0.866} = 3.155$$

$$\sigma\% \frac{\text{式(3-49)}}{r \sqrt{1-\zeta_d^2} e^{-\zeta_d t_p} \sqrt{1-\zeta_d^2}} = 16.2\%$$

$$t_s \frac{\text{式(3-50)}}{\zeta_d \omega_n} \frac{3 + \frac{1}{2} \ln(z^2 - 2\zeta_d \omega_n' + \omega_n'^2) - \ln z - \frac{1}{2} \ln(1 - \zeta_d^2)}{\zeta_d \omega_n} =$$

$$\frac{3 + \frac{1}{2} \ln 6.25 - \ln 2.5 - \frac{1}{2} \ln 0.75}{0.5} = 5.134$$

3.4.6 已知控制系统的单位阶跃响应为

$$h(t) = 1 + 0.2e^{-60t} - 1.2e^{-10t}$$

试确定系统的阻尼比  $\zeta$  和自然频率  $\omega_n$ 。

解  $k(t) = \dot{h}(t) = -12e^{-60t} + 12e^{-10t} = 12(e^{-10t} - e^{-60t})$

$$\Phi(s) = 12 \left[ \frac{1}{s+10} - \frac{1}{s+60} \right] = \frac{600}{s^2 + 70s + 600}$$

$$\omega_n = \sqrt{600} = 24.5, \quad \zeta = \frac{70}{2 \times \sqrt{600}} = 1.429$$

3.4.7 设图 3.4.42 是简化的飞行控制系统结构图, 试选择参数  $K_1$  和  $K_2$ , 使系统的  $\omega_n = 6, \zeta = 1$ 。

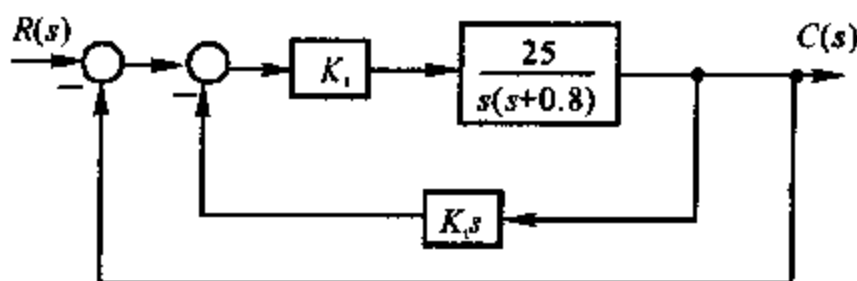


图 3.4.42 飞行控制系统

解 由梅森公式:

$$\Phi(s) = \frac{25K_1}{s^2 + (0.8 + 25K_1K_2)s + 25K_1} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

比较得

$$\begin{cases} 25K_1 = \omega_n^2 = 6^2 = 36 \\ 0.8 + 25K_1K_2 = 2\zeta\omega_n = 12 \end{cases}$$

联立解出

$$\begin{cases} K_1 = 1.44 \\ K_t = 0.31 \end{cases}$$

3.4.8 试分别求出 3.43 各系统的自然频率和阻尼比,并列表比较其动态性能。

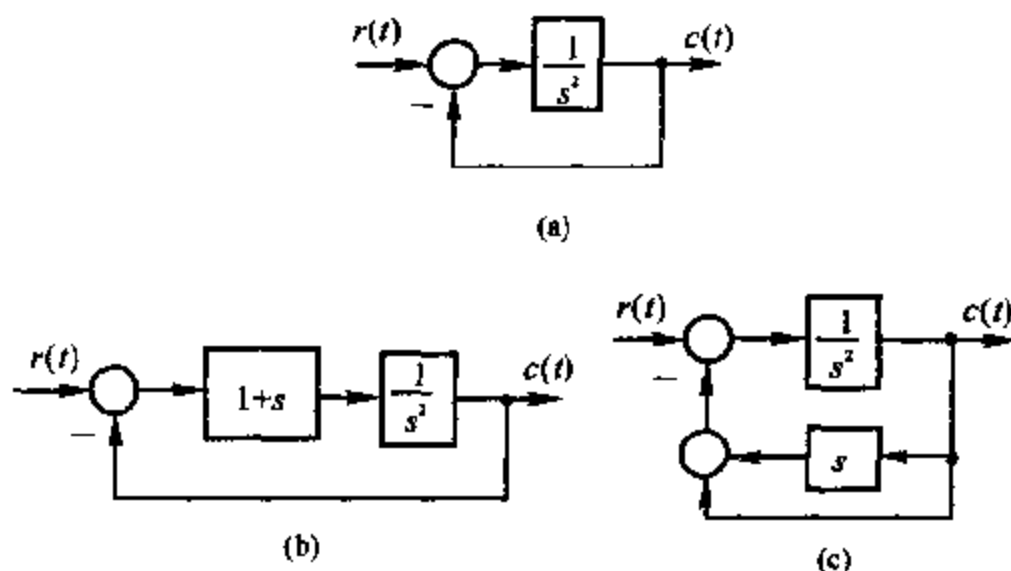


图 3.4.43 控制系统

解 (a)  $\Phi_1(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$ ,  $\begin{cases} \omega_n = 1 \\ \zeta = 0 \end{cases}$ ,  $\begin{cases} \sigma\% = e^{-\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} = 100\% \\ t_s = \frac{3.5}{\zeta\omega_n} = \infty \end{cases}$

(b)  $\Phi_2(s) = \frac{\frac{s+1}{s^2}}{1 + \frac{s+1}{s^2}} = \frac{s+1}{s^2 + s + 1}$ ,  $\begin{cases} \omega_n = 1 \\ \zeta = 0.5 \\ z = 1 \end{cases}$

$$\sigma\% = \frac{\text{式(3-45)}}{1 \times \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 1.155$$

$$\phi = \frac{\text{式(3-46)}}{1 - \frac{1}{2}} = \pi + \arctan \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}}{1 - \frac{1}{2}} + \arctan \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}}{\frac{1}{2}} =$$

$$-\pi + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = -1.0472$$

$$\beta_s = \frac{\text{式(3-48)}}{1/2} \arctan \frac{\sqrt{3/4}}{1/2} = \arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$$

$$t_p \xrightarrow{\text{式(3-47)}} \frac{\beta_d - \psi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta_d^2}} = \frac{\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}}{0.866} = 2.418$$

$$\sigma\% \xrightarrow{\text{式(3-49)}} r \sqrt{1 - \zeta_d^2} e^{-\zeta_d t_p / \sqrt{1 - \zeta_d^2}} = 35.1\%$$

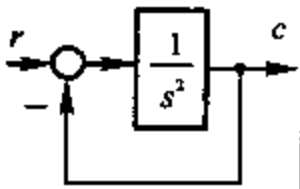
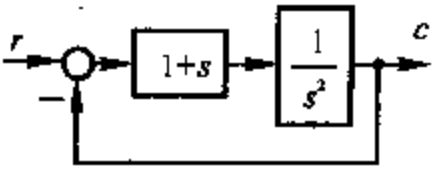
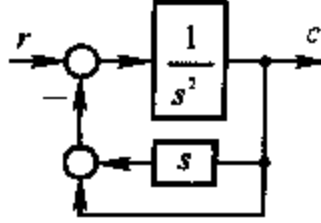
$$t_s \xrightarrow{\text{式(3-50)}} \frac{3 + \frac{1}{2} \ln(z^2 - 2\zeta_d \omega_n + \omega_n^2) - \ln z - \frac{1}{2} \ln(1 - \zeta_d^2)}{\zeta_d \omega_n} = 6.29$$

$$(c) \Phi_3(s) = \frac{\frac{1}{s^2}}{1 + \frac{s+1}{s^2}} = \frac{1}{s^2 + s + 1}, \quad \begin{cases} \omega_n = 1 \\ \zeta = 0.5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma\% = e^{-\zeta / \sqrt{1 - \zeta^2}} = 16.3\% \\ t_s = \frac{3.5}{\zeta \omega_n} = 7 \end{cases}$$

动态性能见表解 3.4.8。

表解 3.4.8

			
	(a)	(b)	(c)
$\Phi(s)$	$\frac{1}{s^2 + 1}$	$\frac{s+1}{s^2 + s + 1}$	$\frac{1}{s^2 + s + 1}$
$\omega_n$	0	0.5	0.5
$\zeta$	1	1	1
$\sigma\%$	100%	31.5%	16.3%
$t_s$	$\infty$	6.29	7

3.4.9 设控制系统如图 3.4.44 所示。要求：

(1) 取  $\tau_1 = 0, \tau_2 = 0.1$ , 计算测速反馈校正系统的超调量、调节时间和速度误差；

(2) 取  $\tau_1 = 0.1, \tau_2 = 0$ , 计算比例-微分校正系统的超调量、调节时间和速

度误差。

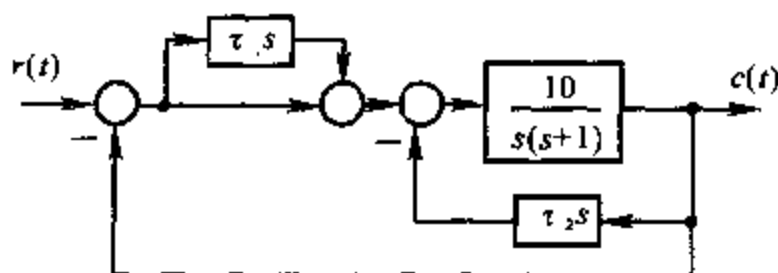


图 3.4.44 控制系统

解 (1)  $\tau_1 = 0, \tau_2 = 0.1$  时

$$G_1(s) = \frac{10}{s(s+1) + 10 \times 0.1s} = \frac{10}{s(s+2)}, \quad \begin{cases} K_1 = 5 \\ v = 1 \end{cases}$$

$$\Phi_1(s) = \frac{10}{s^2 + 2s + 10}$$

$$\begin{cases} \omega_n = \sqrt{10} = 3.16 \\ \zeta = \frac{1}{3.16} = 0.316 \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma\% = e^{-\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} = 35.09\% \\ t_s = \frac{3.5}{\zeta\omega_n} = 3.5 \end{cases}$$

依静态误差系数法:  $e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{r(s)}{1 + G_1(s)} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{K_1} = \frac{1}{5} = 0.2$

(2)  $\tau_1 = 0.1, \tau_2 = 0$  时

$$G_2(s) = \frac{10(0.1s+1)}{s(s+1)}, \quad \begin{cases} K_2 = 10 \\ v = 1 \end{cases}$$

$$\Phi_2(s) = \frac{10(0.1s+1)}{s(s+1) + 10(0.1s+1)} = \frac{s+10}{s^2 + 2s + 10}, \quad \begin{cases} \omega_n = \sqrt{10} = 3.16 \\ \zeta = \frac{1}{3.16} = 0.316 \\ z = 10 \end{cases}$$

$$r \xrightarrow{\text{式(3-45)}} \frac{\sqrt{z^2 - 2\zeta\omega_n + \omega_n^2}}{z\sqrt{1-\zeta^2}} = 1.095$$

$$\begin{aligned} \psi &\xrightarrow{\text{式(3-46)}} -\pi + \arctan \frac{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}{z - \zeta\omega_n} + \arctan \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} = \\ &= -\pi + 0.322 + 1.249 = -1.57 \end{aligned}$$

$$\beta_d \xrightarrow{\text{式(3-48)}} \arctan \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} = 1.249$$



$$t_p \frac{\text{式(3-47)}}{\omega_n} \frac{\beta_d - \psi}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 0.94$$

$$\sigma\% \frac{\text{式(3-49)}}{r} \sqrt{1-\zeta^2} e^{-\beta_d/\sqrt{1-\zeta^2}} = 1.095 \times 0.949 \times 0.731 = 76\%$$

$$t_s \frac{\text{式(3-50)}}{\zeta\omega_n} \frac{3 + \frac{1}{2} \ln(z^2 - 2\zeta\omega_n + \omega_n^2) - \ln z - \frac{1}{2} \ln(1-\zeta^2)}{\zeta\omega_n} = 3.09$$

依静态误差系数法:  $e_{ss} \frac{r(t)=t}{K_v} \frac{1}{K_v} = \frac{1}{K_2} = \frac{1}{10} = 0.1$

**3.4.10** 图 3.4.45 所示控制系统有(a)和(b)两种不同的结构方案,其中  $T > 0$  不可变,要求:

- (1) 在这两种方案中,应如何调整  $K_1, K_2$  和  $K_3$ ,才能使系统获得较好的动态性能?
- (2) 比较说明两种结构方案的特点。

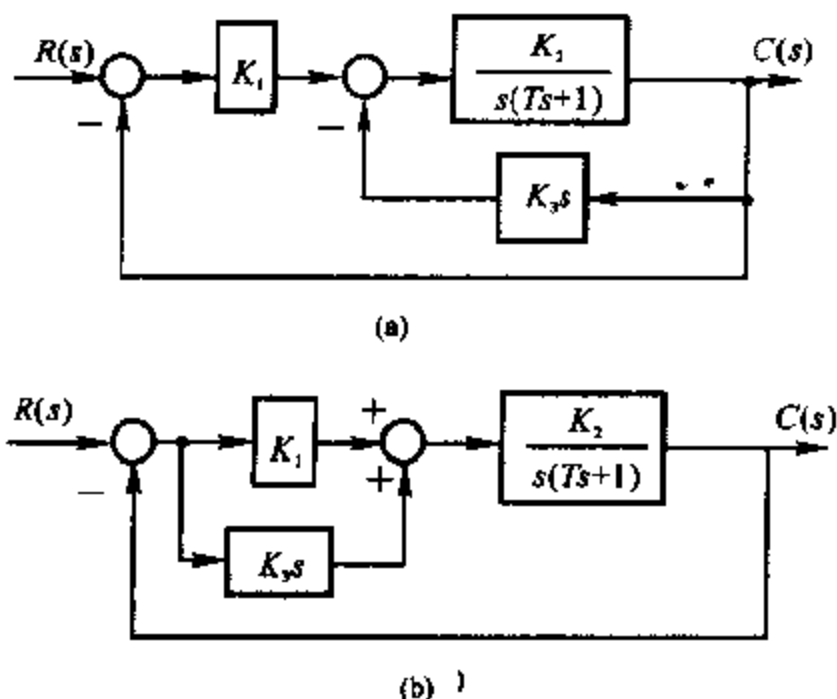


图 3.4.45 控制系统结构图

**解** (1) 依结构图 3.4.45(a)

$$\Phi(s) = \frac{\frac{K_1 K_2}{s(Ts+1)}}{1 + \frac{K_2 K_3}{Ts+1} + \frac{K_1 K_2}{s(Ts+1)}} = \frac{K_1 K_2 / T}{s^2 + \frac{1 + K_2 K_3}{T}s + \frac{K_1 K_2}{T}}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_1 K_2}{T}}, \quad \zeta = \frac{T}{2\sqrt{\frac{K_1 K_2}{T}}} = \frac{1}{2\sqrt{T}} \frac{1 + K_2 K_3}{\sqrt{K_1 K_2}}$$

可见:① 应先调整  $K_1, K_2$  尽量大些,使  $\omega_n$  增加,有利于减小  $t_s, t_p$  和  $\sigma\%$ ;

② 调整  $K_3$ ,使  $\zeta$  近似满足  $\zeta \approx 0.707$ 。

依结构图 3.4.45(b)

$$\Phi_b(s) = \frac{K_2(K_1 + K_3 s)}{s(Ts + 1) + K_2(K_1 + K_3 s)} = \frac{\frac{K_2 K_3}{T}s + \frac{K_1 K_2}{T}}{s^2 + \frac{1 + K_2 K_3}{T}s + \frac{K_1 K_2}{T}}$$

系统(b)与系统(a)具有相同的特征式,  $\omega_n, \zeta$  表达式相同,故系统(a)的调参规律适合于系统(b)。

(2) 比较说明两种结构方案的特点:

① 系统(a)采用测速反馈,未引入闭环零点。

系统(b)采用比例加微分,引入了闭环零点  $z = -\frac{K_1}{K_3}$ ,其作用是使系统响应的  $\sigma\%$  较大,  $t_p$  提前;增加  $|z| = \frac{K_1}{K_3}$  可使闭环零点远离  $s$  平面虚轴而使其作用降低。

② 两系统开环增益不同。

$$G_a(s) = K_1 \frac{\frac{K_2}{s(Ts + 1)}}{1 + \frac{K_2 K_3}{Ts + 1}} = \frac{K_1 K_2}{s(Ts + 1 + K_2 K_3)}$$

$$K_a = \frac{K_1 K_2}{1 + K_2 K_3}$$

$$G_b(s) = \frac{K_2(K_1 + K_3 s)}{s(Ts + 1)}$$

$$K_b = K_1 K_2$$

(a), (b) 同为 I 型系统,当  $r = t$  时,系统(b)的稳态误差  $e_{ss}$  较小。

3.4.11 已知系统特征方程为

$$3s^4 + 10s^3 + 5s^2 + s + 2 = 0$$

试用劳思判据和赫尔维茨判据确定系统的稳定性。

解 (1) 用劳思判据

$$\begin{array}{rcl}
 s^4 & 3 & 5 \quad 2 \\
 s^3 & 10 & 1 \\
 s^2 & \frac{10 \times 5 - 3 \times 1}{10} = 4.7 & 2 \\
 s^1 & \frac{4.7 \times 1 - 10 \times 2}{4.7} = -3.26 & \\
 s^0 & 2 & 
 \end{array}$$

表中第一列元素变号两次,右半  $s$  平面有两个闭环极点,系统不稳定。

(2) 用赫尔维茨判据

$$\text{系统行列式} \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} 10 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 10 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

因为系数  $a_i > 0$ , 用李-威判据

$$\Delta_1 = 10 > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 10 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \\ 0 & 10 & 1 \end{vmatrix} = -153 < 0$$

故系统不稳定。

**3.4.12** 已知系统特征方程如下,试求系统在  $s$  右半平面的根数及虚根值。

$$(1) s^5 + 3s^2 + 12s^3 + 24s^2 + 32s + 48 = 0$$

$$(2) s^4 + 4s^5 - 4s^4 + 4s^3 - 7s^2 - 8s + 10 = 0$$

$$(3) s^5 + 3s^4 + 12s^3 + 20s^2 + 35s + 25 = 0$$

解 (1) 列劳思表

$$\begin{array}{rcl}
 s^5 & 1 & 12 & 32 \\
 s^4 & 3 & 24 & 48 \\
 s^3 & \frac{3 \times 12 - 24}{3} = 4 & \frac{32 \times 3 - 48}{3} = 16 & 0 \\
 s^2 & \frac{4 \times 24 - 3 \times 16}{4} = 12 & 48 & \\
 s & \frac{12 \times 16 - 4 \times 48}{12} = 0 & 0 & \text{辅助方程 } 12s^2 + 48 = 0 \\
 s & 24 & & \text{辅助方程求导: } 24s = 0 \\
 s^0 & 48 & & 
 \end{array}$$

对辅助方程求解,得到系统一对虚根  $s_{1,2} = \pm j2$ ; 系统在右半  $s$  平面无极点。

(2) 列劳思表

$s^6$	1	-4	-7	10
$s^5$	4	4	-8	
$s^4$	$\frac{-16-4}{4} = -5$	$\frac{-28+8}{4} = -5$	10	$-5s^4 - 5s^2 + 10 = 0$
$s^3$	-20	-10	0	求导: $-20s^3 - 10s = 0$
$s^2$	$\frac{100-50}{-20} = -2.5$	10		
$s$	$\frac{25+200}{-2.5} = -90$	0		
$s^0$	10			

由辅助方程  $s^4 + s^2 - 2 = (s^2 - 1)(s^2 + 2)$

和余因式:  $D(s)/(s^4 + s^2 - 2) = s^2 + 4s - 5 = (s - 1)(s + 5)$

求根得  $s_{1,2} = \pm 1$ ,  $s_{3,4} = \pm j\sqrt{2}$ ,  $s_5 = 1$ ,  $s_6 = -5$

系统有 2 个正根, 一对虚根。

(3) 列劳思表

$s^5$	1	12	35
$s^4$	3	20	25
$s^3$	$\frac{36-20}{3} = \frac{16}{3}$	$\frac{105-25}{3} = \frac{80}{3}$	0
$s^2$	$\frac{\frac{320}{3} - \frac{240}{3}}{16/3} = 5$	25	辅助方程 $5s^2 + 25 = 0$
$s$	10	0	辅助方程求导 $10s = 0$
$s^0$	25		

由辅助方程  $5(s^2 + 5) = 0$ , 解出一对虚根  $s_{1,2} = \pm j\sqrt{5}$ ; 系统在右半  $s$  平面无极点。

3.4.13 已知单位反馈系统的开环传递函数

$$G(s) = \frac{K(0.5s + 1)}{s(s + 1)(0.5s^2 + s + 1)}$$

试确定系统稳定时的  $K$  值范围。

解 依题意可写出系统特征方程

$$D(s) = s^4 + 3s^3 + 4s^2 + (2 + K)s + 2K = 0$$

列劳思表

$s^4$	1	4	$2K$	
$s^3$	3	$2+K$		
$s^2$	$\frac{10-K}{3}$	$2K$	$\Rightarrow K < 10$	①

$s$	$\frac{\frac{(10-K)(2+K)}{3} - 6K}{\frac{10-K}{3}}$	$\Rightarrow -10.74 < K < 1.705$	②
-----	---	----------------------------------	---

$s^0$	$2K$	$\Rightarrow K > 0$	③
-------	------	---------------------	---

综合式①、式②和式③,可得  $K$  稳定范围为  $0 < K < 1.705$ 。

3.4.14 已知系统结构图如图 3.4.46 所示。试用劳思稳定判据确定能使系统稳定的反馈参数  $\tau$  的取值范围。

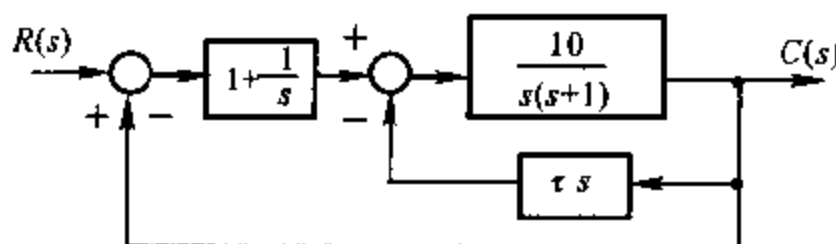


图 3.4.46 控制系统

解 依结构图写出系统传递函数

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\left(1 + \frac{1}{s}\right) \left(\frac{10}{s(s+1)}\right)}{1 + \frac{10\tau s}{s(s+1)} + \left(1 + \frac{1}{s}\right) \frac{10}{s(s+1)}} = \frac{10(s+1)}{s^3 + (1+10\tau)s^2 + 10s + 10}$$

$$D(s) = s^3 + (1+10\tau)s^2 + 10s + 10$$

列劳思表

$s^3$	1	10	
$s^2$	$1+10\tau$	10	$\Rightarrow \tau > -\frac{1}{10}$
$s$	$\frac{10(1+10\tau) - 10}{1+10\tau}$	$\Rightarrow \tau > 0$	
$s^0$	10		

使系统稳定的  $\tau$  的范围为  $\tau > 0$ 。

3.4.15 已知单位反馈系统的开环传递函数

$$(1) G(s) = \frac{100}{(0.1s+1)(s+5)}$$

$$(2) G(s) = \frac{50}{(0.1s+1)(s+5)}$$

$$(3) G(s) = \frac{10(2s+1)}{s^2(s^2-6s+100)}$$

试求输入分别为  $r(t) = 2t$  和  $r(t) = 2 + 2t + t^2$  时, 系统的稳态误差。

解 (1):

① 判定稳定性。依题意写出系统特征方程

$$D(s) = (s+10)(s+5) + 1\,000 = s^2 + 15s + 1\,050 = 0$$

劳思表:

$$s^2 \quad 1 \quad 1\,050$$

$$s^1 \quad 15$$

$$s^0 \quad 1\,050$$

系统稳定。

② 用静态误差系数法。依题: 开环增益  $K = 20$ , 系统型别  $v = 0$ 。

$$r_1(t) = 2 \text{ 时, } e_{ss1} = \frac{2}{1+K_p} = \frac{2}{1+20} = \frac{2}{21}$$

$$r_2(t) = 2t \text{ 时, } e_{ss2} = \frac{2}{K_v} = \frac{2}{0} = \infty$$

$$r_3(t) = t^2 = 2 \frac{t^2}{2} \text{ 时, } e_{ss3} = \frac{2}{K_a} = \frac{2}{0} = \infty$$

故

$$e_{ss} = \frac{r=2t}{\infty} + \frac{r=2+2t+t^2}{\frac{2}{21}} = \frac{2}{21} + \infty + \infty = \infty$$

(2):

① 判定稳定性:  $D(s) = s(s+10)(s+5) + 50 = s^3 + 15s^2 + 50s + 50$

劳思表:

$$s^3 \quad 1 \quad 50$$

$$s^2 \quad 15 \quad 50$$

$$s^1 \quad 16.7$$

$$s^0 \quad 50$$

系统稳定。

② 用静态误差系数法。依题:  $K = 10, v = 1$

$$r_1(t) = 2 \text{ 时, } e_{ss1} = \frac{2}{1+K_p} = \frac{2}{1+\infty} = 0$$

$$r_2(t) = 2t \text{ 时, } e_{ss2} = \frac{2}{K_v} = \frac{2}{10} = 0.2$$

$$r_3(t) = t^2 = 2 \times \frac{t^2}{2} \text{ 时, } e_{ss3} = \frac{2}{K_a} = \frac{2}{0} = \infty$$

故

$$e_{ss} \xrightarrow{r=2t} 0.2$$

$$e_{ss} \xrightarrow{r=2+2t+t^2} 0 + 0.2 + \infty = \infty$$

(3)

① 判定稳定性

$$D(s) = s^2(s^2 + 6s + 100) + 10(2s + 1) = s^4 + 6s^3 + 100s^2 + 20s + 10$$

劳思表:

$s^4$	1	100	10
$s^3$	6	20	
$s^2$	96.7	10	
$s^1$	562/29		
$s^0$	10		

系统稳定。

② 用静态误差系数法,依题:  $K = 0.1, v = 2$

$$r_1(t) = 2 \text{ 时, } e_{ss1} = \frac{2}{1+K_p} = \frac{2}{1+\infty} = 0$$

$$r_2(t) = 2t \text{ 时, } e_{ss2} = \frac{2}{K_v} = \frac{2}{\infty} = 0$$

$$r_3(t) = t^2 = 2 \times \frac{t^2}{2} \text{ 时, } e_{ss3} = \frac{2}{K_a} = \frac{2}{0.1} = 20$$

故

$$e_{ss} \xrightarrow{r=2t} 0$$

$$e_{ss} \xrightarrow{r=2+2t+t^2} 0 + 0 + 20 = 20$$

3.4.16 已知单位反馈系统的开环传递函数

$$(1) G(s) = \frac{50}{(0.1s+1)(2s+1)}$$

$$(2) G(s) = \frac{K}{s(s^2 + 4s + 200)}$$

$$(3) G(s) = \frac{10(2s+1)(4s+1)}{s^2(s^2+2s+10)}$$

试求位置误差系数  $K_p$ , 速度误差系数  $K_v$ , 加速度误差系数  $K_a$ 。

解 列表计算如表解 3.4.16 所示。

表解 3.4.16

	$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)$	$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G(s)$	$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \cdot G(s)$
$G(s) = \frac{50}{(0.1s+1)(2s+1)}$	50	0	0
$G(s) = \frac{K}{s(s^2+4s+200)}$	$\infty$	$\frac{K}{200}$	0
$G(s) = \frac{10(2s+1)(4s+1)}{s^2(s^2+2s+10)}$	$\infty$	$\infty$	1

3.4.17 设单位反馈系统的开环传递函数为  $G(s) = \frac{1}{T_s}$ 。试用动态误差系数法求出当输入信号分别为  $r(t) = t^2/2$  和  $r(t) = \sin 2t$  时, 系统的稳态误差。

解 依题意有

$$\Phi(s) = \frac{T_s}{T_s + 1} = 0 + T_s - T^2 s^2 + T^3 s^3 - T^4 s^4 + \dots$$

得出动态误差系数:

$$C_0 = 0, \quad C_1 = T, \quad C_2 = -T^2, \quad C_3 = T^3, \quad C_4 = -T^4, \dots$$

$$E_s(s) = (0 + T_s - T^2 s^2 + T^3 s^3 - T^4 s^4 + \dots)R(s)$$

$$r(t) = \frac{t^2}{2} \text{ 时,}$$

$$\dot{r} = t, \quad \ddot{r} = 1, \quad \dddot{r} = 0$$

$$e_{ss}(t) = T\dot{r}(t) - T^2\ddot{r}(t) + T^3\dddot{r}(t) - \dots = Tt - T^2$$

$r(t) = \sin 2t$  时,

$$\dot{r} = 2\cos 2t, \quad \ddot{r} = -2^2 \sin 2t, \quad \dddot{r} = -2^3 \cos 2t, \quad \ddot{\ddot{r}} = 2^4 \sin 2t, \dots$$

$$e_{ss}(t) = (C_0 - C_2 \times 2^2 + C_4 \times 2^4 - \dots)\sin 2t +$$

$$(C_1 \times 2 - C_3 \times 2^3 + C_5 \times 2^5 - \dots)\cos 2t =$$

$$[0 + (2T)^2 - (2T)^4 + \dots]\sin 2t + [2T - (2T)^3 - (2T)^5 - \dots]\cos 2t =$$



$$2T \sqrt{1+(2T)^2} [1 - (2T)^2 + (2T)^4 - \dots]$$

$$\left[ \frac{2T}{\sqrt{1+(2T)^2}} \sin 2t + \frac{1}{\sqrt{1+(2T)^2}} \cos 2t \right] =$$

$$\frac{2T}{\sqrt{1+(2T)^2}} \sin \left( 2t + \arctan \frac{1}{2T} \right)$$

3.4.18 设控制系统如图 3.4.47 所示。其中

$$G(s) = K_p + \frac{K}{s}, \quad F(s) = \frac{1}{Js}$$

输入  $r(t)$  以及扰动  $n_1(t)$  和  $n_2(t)$  均为单位阶跃函数。试求：

- (1) 在  $r(t)$  作用下系统的稳态误差；
- (2) 在  $n_1(t)$  作用下系统的稳态误差；
- (3) 在  $n_1(t)$  和  $n_2(t)$  同时作用下系统的稳态误差。

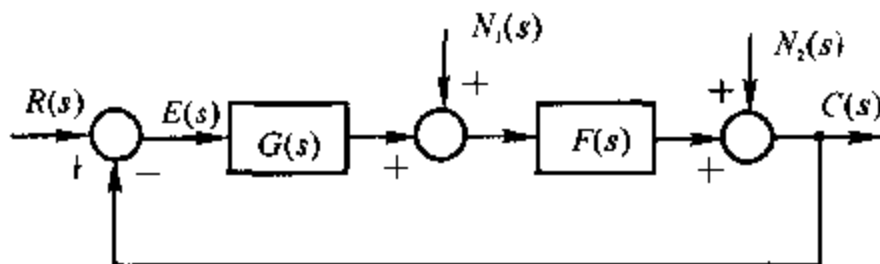


图 3.4.47 控制系统

解 (1)  $r(t) = 1(t)$  作用时, 系统开环传递函数

$$G_0(s) = G(s) \cdot F(s) = \frac{K_p s + K}{Js^2} = \frac{\frac{K}{J} \left( \frac{K_p}{K} s + 1 \right)}{s^2}$$

开环增益  $K_0 = \frac{K}{J}$ , 型别  $v = 2$ ,

静态位置误差系数  $K_{op} = \lim_{s \rightarrow 0} G_0(s) = \infty$

设参数选取使系统稳定, 则

$$e_{ss} \xrightarrow{r=1(t)} \frac{1}{1+K_{op}} = \frac{1}{1+\infty} = 0$$

(2)  $n_1(t) = 1(t)$  作用时, 依结构图

$$\Phi_{en1}(s) = \frac{E(s)}{N_1(s)} = \frac{-F(s)}{1+G(s)F(s)} = \frac{-s}{Js^2 + K_p s + K}$$

$$E_{n1}(s) = \Phi_{en1}(s) N_1(s) = \frac{-1}{Js^2 + K_p s + K}$$

$$e_{ss1} = \lim_{s \rightarrow 0} E_{n1}(s) = 0$$

(3)  $n_2(t) = 1(t)$  作用时,依结构图:

$$\Phi_{en2}(s) = \frac{-1}{1 + G(s)F(s)} = \frac{-Js^2}{Js^2 + K_p s + K}$$

$$E_{n2}(s) = \Phi_{en2}(s)N_2(s) = \frac{-Js}{Js^2 + K_p s + K}$$

$$e_{ssn2} = \lim_{s \rightarrow 0} E_{n2}(s) = 0$$

依叠加原理:  $e_{ss(n1+n2)} = e_{ssn1} + e_{ssn2} = 0$

**3.4.19** 设闭环传递函数的一般形式为

$$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

误差定义取  $e(t) = r(t) - c(t)$ 。试证:

(1) 系统在阶跃信号输入下,稳态误差为零的充分条件是:

$$b_0 = a_0, \quad b_i = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, m);$$

(2) 系统在斜坡信号输入下,稳态误差为零的充分条件是:

$$b_0 = a_0, \quad b_1 = a_1, \quad b_i = 0 \quad (i = 2, 3, \cdots, m)$$

**解** 设  $m < n$

$$\Phi_e(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{R(s) - C(s)}{R(s)} = 1 - \frac{C(s)}{R(s)} = 1 - \Phi(s) =$$

$$\frac{(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)s + \cdots + (a_m - b_m)s^m + a_{m+1}s^{m+1} + \cdots + a_{n-1}s^{n-1} + s^n}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0}$$

(1)  $b_0 = a_0, b_i = 0 (i = 1, 2, \cdots, m)$  时

$$\Phi_e(s) = \frac{a_1 s + a_2 s^2 + \cdots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

$$e_{ss1} = \lim_{s \rightarrow 0} \Phi_e(s) \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s(a_1 + a_2 s + \cdots + a_{n-1} s^{n-2} + s^{n-1})}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} = 0$$

(2)  $b_0 = a_0, b_1 = a_1, b_i = 0 (i = 2, 3, \cdots, m)$  时

$$\Phi_e(s) = \frac{a_2 s^2 + a_3 s^3 + \cdots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

$$e_{ss2} = \lim_{s \rightarrow 0} \Phi_e(s) \frac{1}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s(a_2 + a_3 s + \cdots + a_{n-1} s^{n-3} + s^{n-2})}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} = 0$$

**3.4.20** 设随动系统的微分方程为

$$T_1 \frac{d^2 c(t)}{dt^2} + \frac{dc(t)}{dt} = K_2 u(t)$$

$$u(t) = K_1[r(t) - b(t)]$$

$$T_2 \frac{db(t)}{dt} + b(t) = c(t)$$

其中  $T_1, T_2$  和  $K_2$  为正常数。若要求  $r(t) = 1+t$  时,  $c(t)$  对  $r(t)$  的稳态误差不大于正常数  $\epsilon_0$ , 试问  $K_1$  应满足什么条件?

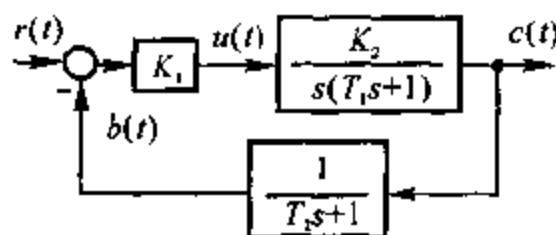
解 对方程组进行拉氏变换

$$(T_1 s^2 + s)C(s) = K_2 U(s)$$

$$U(s) = K_1[R(s) - B(s)]$$

$$(T_2 s + 1)B(s) = C(s)$$

画出系统结构图如图解 3.4.20 所示。



图解 3.4.20 系统结构图

依题意, 系统误差定义为  $E(s) = R(s) - C(s)$ 。

$$\Phi_e(s) = 1 - \Phi(s) = 1 - \frac{K_1 K_2 T_2 s + K_1 K_2}{T_1 T_2 s^3 + (T_1 + T_2)s^2 + s + K_1 K_2}$$

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \Phi_e(s) R(s) =$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left[ 1 - \frac{K_1 K_2 (T_2 s + 1)}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) + K_1 K_2} \right] \left( \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} \right) =$$

$$\frac{1 - K_1 K_2 T_2}{K_1 K_2}$$

$$\text{令 } e_{ss} = \frac{1 - K_1 K_2 T_2}{K_1 K_2} \leq \epsilon, \text{ 解出 } K_1 \geq \frac{1}{K_2 (T_2 + \epsilon)}。$$

故  $K_1 \geq \frac{1}{K_2 (T_2 + \epsilon)}$  时, 满足条件。

## 第 4 章 线性系统的根轨迹法

### 4.1 重点内容提要

根轨迹是指当开环系统某一参数(如开环增益  $K$  或根轨迹增益  $K'$ ) 从零到无穷变化时, 闭环特征根在  $s$  平面上移动的轨迹。根轨迹的实质是寻求闭环特征方程  $D(s) = 1 + G(s)H(s) = 0$  的根。方法是根据已知开环系统的零、极点分布, 依照一些简单规则, 用作图的方法求出闭环极点的分布。根轨迹法是在初步设计时常采用的一种简便实用的方法。

#### 4.1.1 绘制根轨迹的基本条件

根轨迹方程为  $G(s)H(s) = -1$

即 
$$G(s)H(s) = \frac{K^* \prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} = -1$$

其模值条件为

$$|G(s)H(s)| = \frac{K^* \prod_{j=1}^m |s - z_j|}{\prod_{i=1}^n |s - p_i|} = 1$$

相角条件为

$$\angle G(s)H(s) = \sum_{j=1}^m \angle s - z_j - \sum_{i=1}^n \angle s - p_i = (2k+1)\pi$$
$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

式中,  $z_i, p_i$  分别为开环零、极点。

在  $s$  平面上满足相角条件的点所构成的图形就是闭环系统的根轨迹。因此相角条件是决定闭环系统根轨迹的充分必要条件, 而幅值条件主要是用来确定

根轨迹上各点所对应的  $K^*$  值。

### 4.1.2 绘制根轨迹的基本法则

#### 1. 常规根轨迹

**法则一** 根轨迹的支数,连续性和对称性:根轨迹的分支数即闭环根的个数,等于开环极点数  $n$ ;当  $K^*$  从  $0 \rightarrow \infty$  变化时,根轨迹连续变化且对称于实轴。

**法则二** 根轨迹的起点与终点:根轨迹起于开环极点,终止于开环零点(包含有限零点和无限零点)。

**法则三** 实轴上的根轨迹:实轴上根轨迹区段右侧的开环零、极点数之和应为奇数。

**法则四** 根轨迹的分离点  $d$ :

$$\text{试探法} \quad \sum_{i=1}^n \frac{1}{d-p_i} = \sum_{j=1}^m \frac{1}{d-z_j}$$

$$\text{重根法} \quad M(s)N'(s) - M'(s)N(s) = 0$$

说明:由上式计算出的分离点  $d$  应检验,舍去不在根轨迹上的值;当开环无零点

时,应取  $\sum_{j=1}^m \frac{1}{d-z_j} = 0$ 。

**法则五** 根轨迹的渐近线:

与实轴的交点

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n-m}$$

与正实轴的夹角

$$\varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{n-m}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

**法则六** 根轨迹与虚轴的交点  $\omega_a$ :

**方法1** 可令  $s = j\omega_a$  代入  $D(s) = 0$ , 整理后令其实部、虚部分别为零,解得  $\omega_a$  和  $K^*$ ,  $\omega_a$  值即是根轨迹与虚轴交点的坐标,  $K^*$  则为系统处于临界稳定时的根轨迹增益。

**方法2** 用劳思判据求解  $\omega_a$ 。

**法则七** 求根轨迹的起始角和终止角:

$$\theta_{p_i} = 180^\circ + \left( \sum_{j=1}^m \varphi_{z_j} - \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^n \theta_{p_j} \right)$$

$$\varphi_{r_j} = 180^\circ - \left( \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^n \varphi_{z_j, z_i} - \sum_{j=1}^n \theta_{p_j, z_i} \right)$$

法则八 求根轨迹增益  $K^*$ 。若  $s_1$  为根轨迹上的点, 则对应于该点的根轨迹增益

$$K_1^* = \frac{\prod_{i=1}^n |s_1 - p_i|}{\prod_{j=1}^m |s_1 - z_j|}$$

两种特殊情况时  $K^*$  的计算:

- 1) 与虚轴交点处的  $K^*$  可用法则六计算;
- 2) 实轴上根轨迹点(如闭环根等于  $a$  时)的  $K^*$ , 只要令  $s = a$  代入  $D(s) = 0$  中, 即可求得。

法则九 根轨迹的平衡性:

设闭环特征方程为

$$D(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

当  $(n-m) \geq 2$  时, 根之和

$$\sum_{i=1}^n s_i = \sum_{i=1}^n p_i = -a_1$$

根之积

$$\prod_{i=1}^n s_i = a_n$$

## 2. 参数根轨迹

系统中除根轨迹增益  $K^*$  以外, 其他参数变化时所对应的根轨迹。

参数根轨迹的绘制利用等效开环传递函数的概念, 应用常规根轨迹的九条法则进行绘制。

注意: 等效开环传递函数中的“等效”, 意指与原系统具有相同的闭环极点, 等效传递函数中的零点不一定是原系统的零点。当确定系统闭环零点时, 必须由原系统开环传递函数确定。

## 3. $0^\circ$ 根轨迹

即满足方程  $1 - G(s)H(s) = 0$

或

$$G(s)H(s) = 1$$

的根轨迹。

绘制  $0^\circ$  根轨迹时只需将常规根轨迹法则中与相角条件有关的 3 条法则加

以修改即可。

- 1) 实轴上根轨迹区段右侧的零、极点数之和为偶数；
- 2) 渐近线与实轴的夹角为

$$\varphi_a = \frac{2k\pi}{n-m}$$

- 3) 根轨迹的起始角与终止角

$$\theta_{p_i} = \sum_{j=1}^m \varphi_{z_j, p_i} - \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^n \theta_{p_j, p_i}$$

$$\varphi_{z_j} = - \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^m \varphi_{z_j, z_i} + \sum_{j=1}^n \theta_{p_j, z_i}$$

### 4.1.3 根轨迹与系统性能的关系

#### 1. 稳定性

闭环系统稳定的充要条件是闭环极点必须位于  $s$  平面虚轴的左侧。

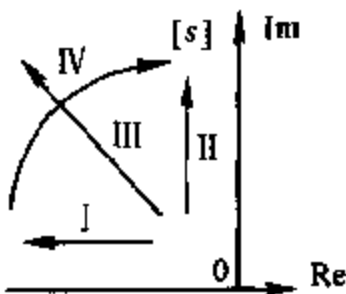
#### 2. 稳态性能

由开环传递函数和根轨迹可以分别求出系统的型别  $v$  和开环增益  $K$ ，用静态误差系数法可以计算系统的稳态误差。

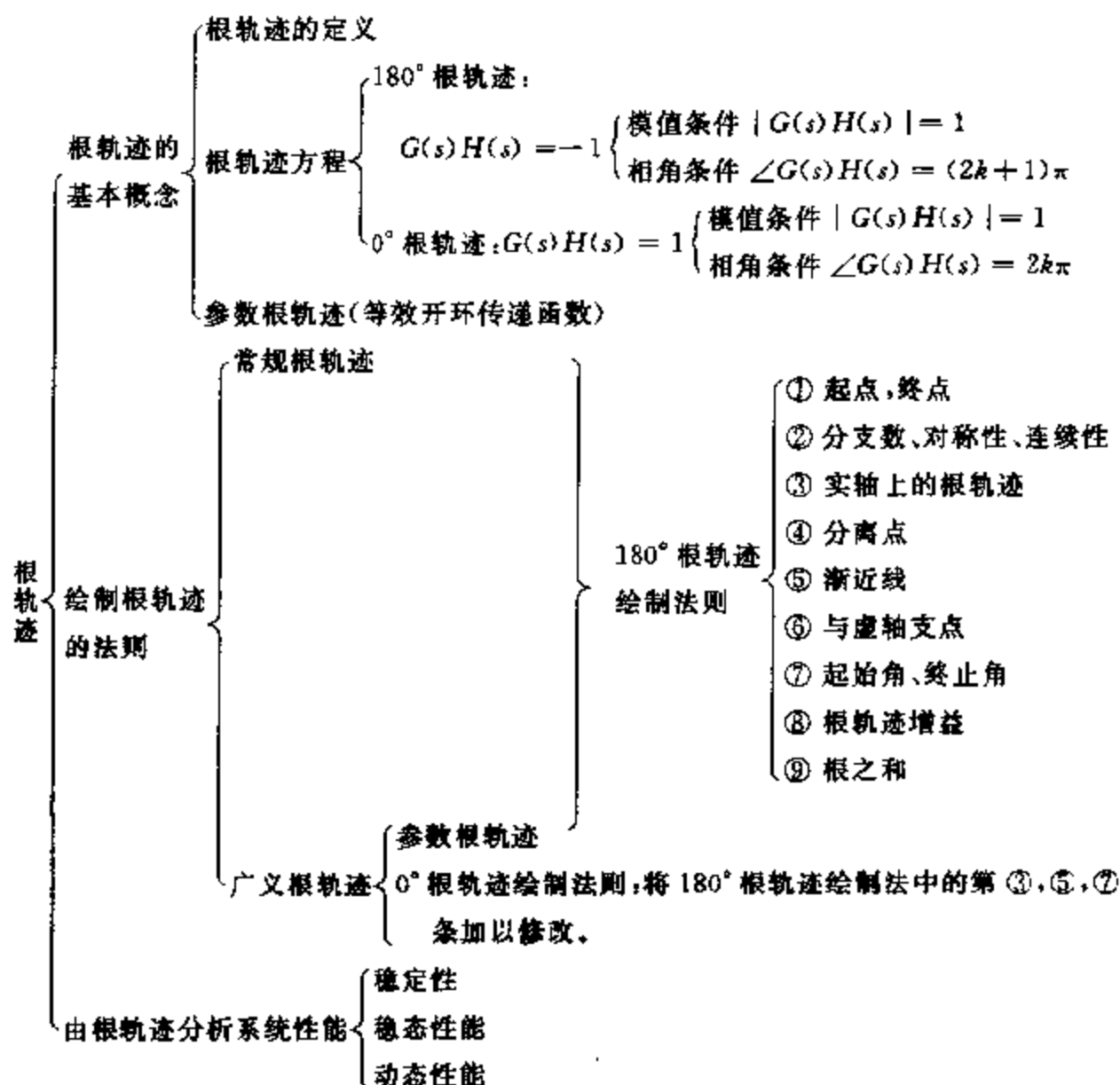
#### 3. 动态性能

闭环极点分布与动态性能的关系可参见表 4.1。

表 4.1 二阶系统动态性能随极点位置的变化趋势

极点移动轨迹	极点坐标		系统参数		动态性能		
	$\zeta \omega_n$	$\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$	$\zeta$	$\omega_n$	$\sigma\%$	$t_s$	
	I	↑	—	↑	↑	↓	↓
	II	—	↑	↓	↑	↑	—
	III	↑	↑	—	↑	—	↓
	IV	↓	↑	↓	—	↑	↑

## 4.2 知识结构图



## 4.3 考点及典型题选解

本章主要考点有: 绘制根轨迹(包括求分离点、临界阻尼对应的  $K^*$  值; 与虚轴交点及临界稳定的根轨迹增益);

利用根轨迹法确定系统稳定的  $K^*$  (或  $K$ ) 值范围; 确定某一  $K^*$  值对应的闭环极点。



### 4.3.1 典型题

#### 1. 已知反馈系统的开环传递函数

$$G(s)H(s) = \frac{K^*}{s(s+1)(s+2)}$$

试绘制系统的根轨迹图,详细列写根轨迹的计算过程,其中包括零点、极点,渐近线及与实轴交点,根轨迹分离点及与虚轴交点,渐近线与实轴夹角。求出根轨迹与虚轴相交时的  $K^*$  及相应的开环增益  $K$ 。

#### 2. 已知负反馈系统的闭环特征方程

$$K_1 + (s+14)(s^2+2s+2) = 0$$

(1) 绘制系统根轨迹图( $0 < K_1 < \infty$ );

(2) 确定使复数闭环主导极点的阻尼系数  $\zeta = 0.5$  的  $K_1$  值。

#### 3. 已知某单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{K^*}{s^2(s+1)}$ , 试绘制系统的

根轨迹图,说明其稳定性。如果在负实轴上增加一个零点  $-a$  ( $0 \leq a \leq 1$ ),对系统的稳定性有何影响,试仍以根轨迹图来说明。

4. 试绘制以  $a$  为可变参数根轨迹的大致图形,并由根轨迹图回答下述问题:

(1) 确定系统临界稳定时的  $a$  值及使系统稳定的  $a$  值范围。

(2) 确定系统阶跃响应无超调时  $a$  的取值范围。

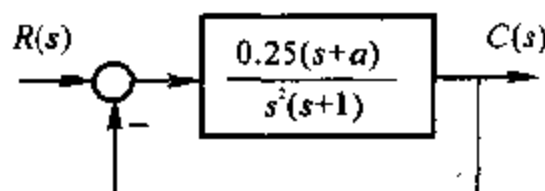


图 4.3.1 结构图

(3) 确定系统阶跃响应有超调时  $a$  的取值范围。

(4) 系统出现等幅振荡时的振荡频率。

#### 5. 已知单位负反馈系统的闭环根轨迹图如图 4.3.2 所示。

(1) 确定使系统稳定的根轨迹增益  $K^*$  的范围;

(2) 写出系统临界阻尼时的闭环传递函数。

#### 6. 设控制系统中前向通道和反馈通道传递函数分别为

$$G(s) = \frac{K_r(s^2 + 6s + 10)}{s^2 + 2s + 10}, \quad H(s) = 1$$

试证明该系统根轨迹位于一个圆的圆弧上,并指出该圆的半径和圆心坐标。

7. 某单位负反馈系统的开环传递函数为  $G(s) = \frac{4K(1-s)}{s[(K+1)s+4]}$ 。

(1) 概略绘制系统的根轨迹 ( $0 < K < \infty$ );

(2) 求系统阶跃响应中含分量  $e^{-\alpha} \cos(\omega t + \beta)$  时的  $K$  值范围 (其中,  $\alpha > 0, \omega > 0$ );

(3) 求出系统有一个闭环极点为  $-2$  时的闭环传递函数。

8. 某反馈控制系统,前向通路传递函数为  $G(s) = \frac{K^*(s+4)}{s(s+2)(s+3)}$ , 反馈通路传递函数为  $H(s) = \frac{s+2}{s+4}$ 。试绘制根轨迹;  $\zeta = 0.5$  时, 计算开环增益  $K$  值及对应的闭环传递函数。

9. 某单位反馈系统开环传递函数为

$$G(s) = \frac{-K^*(s+2)}{(s+3)(s^2+2s+2)}$$

试绘制根轨迹,并确定使系统稳定的开环增益  $K$  值范围。

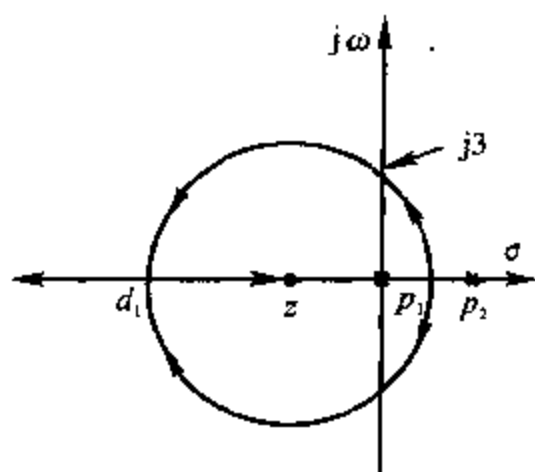


图 4.3.2

### 4.3.2 典型题解析

1. ① 根轨迹起于开环极点  $0, -1, -2$ , 终于开环零点 (为三个无限零点)。

② 渐近线与实轴交点和夹角为

$$\begin{cases} \sigma_a = -1 \\ \varphi_a = 180^\circ, \pm 60^\circ \end{cases}$$

③ 分离点  $d = -0.423$

④ 与虚轴交点

$$W_c = \pm \sqrt{2}, \quad K_c' = 6, \quad K_c = 3$$

2. (1) ① 分支数  $n = 3$

② 实轴上  $(-\infty, -14]$  为根轨迹

③ 渐近线

$$\begin{cases} \sigma_s = -\frac{16}{3} \\ \varphi_s = 180^\circ, \pm 60^\circ \end{cases}$$

④ 出射角  $\theta_{p_1} = 86^\circ, \theta_{p_2} = -86^\circ$

(2)  $K_1 = 21.7$

3. (1) 实轴上根轨迹  $(-\infty, -1]$

$$\text{渐近线} \begin{cases} \sigma_s = -\frac{1}{3} \\ \varphi_s = \pm 60^\circ, 180^\circ \end{cases}$$

系统不稳定。

(2) 根轨迹由 3 条变 2 条, 且向左半  $s$  平面移, 闭环极点全部在左半  $s$  平面,  $K^* > 0$  时系统稳定。

$$4. (1) \text{等效开环传递函数 } G^* = \frac{0.25a}{s(s^2 + s + 0.25)}$$

$\omega_c = 0.5, a_c = 1$ ; 稳定的  $a$  值范围:  $0 < a < 1$ ;

(2) 系统阶跃响应无超调  $a$  值范围:  $0 < a < \frac{1}{54}$ ;

(3) 系统阶跃响应有超调  $a$  值范围:  $\frac{1}{54} < a < 1$ ;

(4) 等幅振荡频率  $\omega_c = 0.5 \text{ rad/s}$

5. (1)  $K^* > 2.25$

$$(2) \Phi(s) = \frac{20.25(s+4)}{(s-9)^2}$$

6.  $\sigma^2 + \omega^2 = (\sqrt{10})^2$ , 圆心  $(0, 0)$ , 半径  $\sqrt{10}$ 。

$$7. (1) \text{等效开环传递函数 } G^*(s) = \frac{K(s-2)^2}{s(s+4)}$$

$$\text{分离点} \quad d = -1, \quad K_d = \frac{1}{3}$$

$$\text{与虚轴交点为} \quad K = 1, \quad \omega = \pm\sqrt{2}$$

实轴上根轨迹为  $(-4, 0]$ , 圆点在实轴 0.5 处, 半径为 1.5 的圆弧。

$$(2) \frac{1}{3} < K < 1$$

$$(3) \varphi(s) = \frac{\frac{1}{4}(s-2)^2}{(s+2)\left(s+\frac{1}{2}\right)}$$

8. (1) 实轴上根轨迹  $[-3, 0]$

分离点  $d = -\frac{3}{2}$

注意: 由于开环传递函数中出现零、极点对消现象, 该根轨迹不能完全反映闭环特征根。

$$(2) \Phi(s) = \frac{9(s+4)}{(s^2+3s+9)(s+2)}$$

9. (1) 应绘制  $0^\circ$  根轨迹

实轴上根轨迹  $(-x, -3], [-2, \infty)$ 。

渐近线  $\begin{cases} \sigma_a = -1 \\ \varphi_a = 0^\circ, 180^\circ \end{cases}$

分离点  $d = -0.8$

起始角  $\theta_{p_1} = -71.6^\circ, \theta_{p_2} = 71.6^\circ$

· (2)  $0 < K < 1$

## 4.4 课后习题全解

4.4.1 设单位反馈控制系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K^*}{s+1}$$

试用解析法绘出  $K^*$  从零变到无穷时的闭环根轨迹图, 并判断下列点是否在根轨迹上:

$$(-2+j0), (0+j1), (-3+j2)$$

解 闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{K^*}{s+1+K^*}$$

则闭环特征方程为

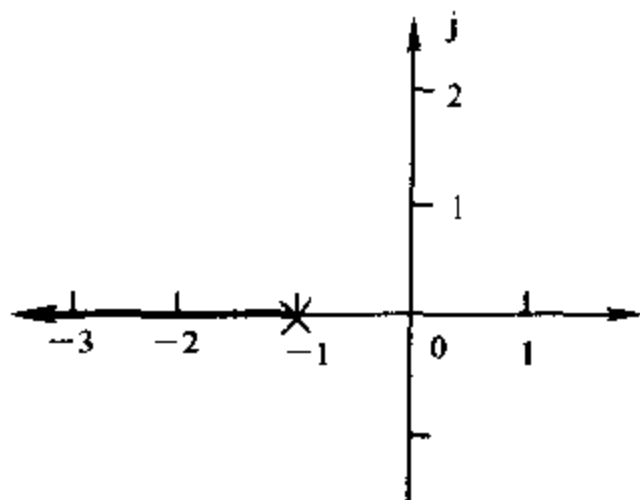
$$D(s) = s+1+K^* = 0$$

闭环特征根为

$$s = -1 - K^*$$

当  $K^* = 0$  时,  $s = -1$ ;  $K^* = 1$ ,  $s = -2$ ;  $K^* = 2$ ,  $s = -3$ ;  $\dots K^* \rightarrow \infty, s \rightarrow -\infty$ 。

可逐个描点得闭环根轨迹如图解 4.4.1 所示, 从图中明显可见, 只有  $(-2, j0)$  在根轨迹上。



图解 4.4.1

4.4.2 设单位反馈控制系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K(3s+1)}{s(2s+1)}$$

试用解析法绘出开环增益  $K$  从零增加到无穷时的闭环根轨迹图。

解 闭环特征方程为

$$D(s) = s(2s+1) + K(3s+1) = 0$$

$$s_1 = -\frac{1}{4} [3K+1 + \sqrt{(3K+1)^2 - 8K}]$$

$$s_2 = -\frac{1}{4} [3K+1 - \sqrt{(3K+1)^2 - 8K}]$$

当  $K=0$  时,  $s_1 = -\frac{1}{2}$ ; 当  $K$  增加时,  $s_1$  减小; 当  $K \rightarrow \infty$  时,  $s_1 \rightarrow -\infty$ 。

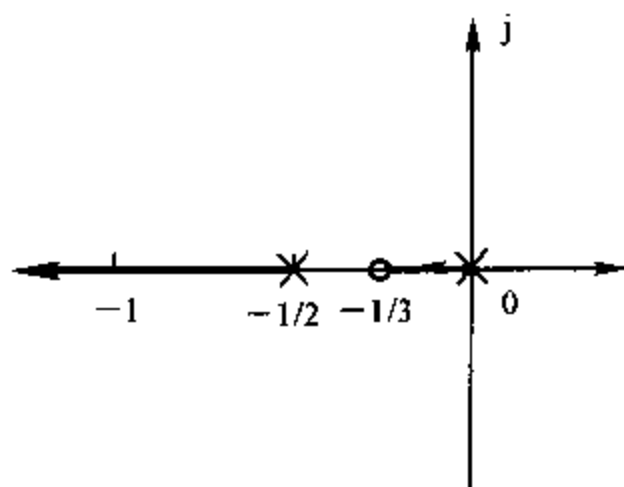
当  $K=0$  时,  $s_2 = 0$ ; 当  $K$  增加时,  $s_2$  减小; 当  $K \rightarrow \infty$  时, 用罗必塔法则求极限:

$$s_2 = \lim_{K \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{4} \right) \frac{1 - \frac{\sqrt{(3K+1)^2 - 8K}}{3K+1}}{\frac{1}{3K+1}} =$$

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{12} \right) \frac{12K-2}{\sqrt{9K^2-2K+1}} = \lim_{K \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{12} \right) \frac{12 - \frac{2}{K}}{\sqrt{9 - \frac{2}{K} + \frac{1}{K^2}}} = -\frac{1}{3}$$

可绘出闭环根轨迹如图解 4.4.2 所示。

4.4.3 已知开环零、极点分布如图 4.4.28 所示, 试概略绘出相应的闭环根轨迹图。



图解 4.4.2

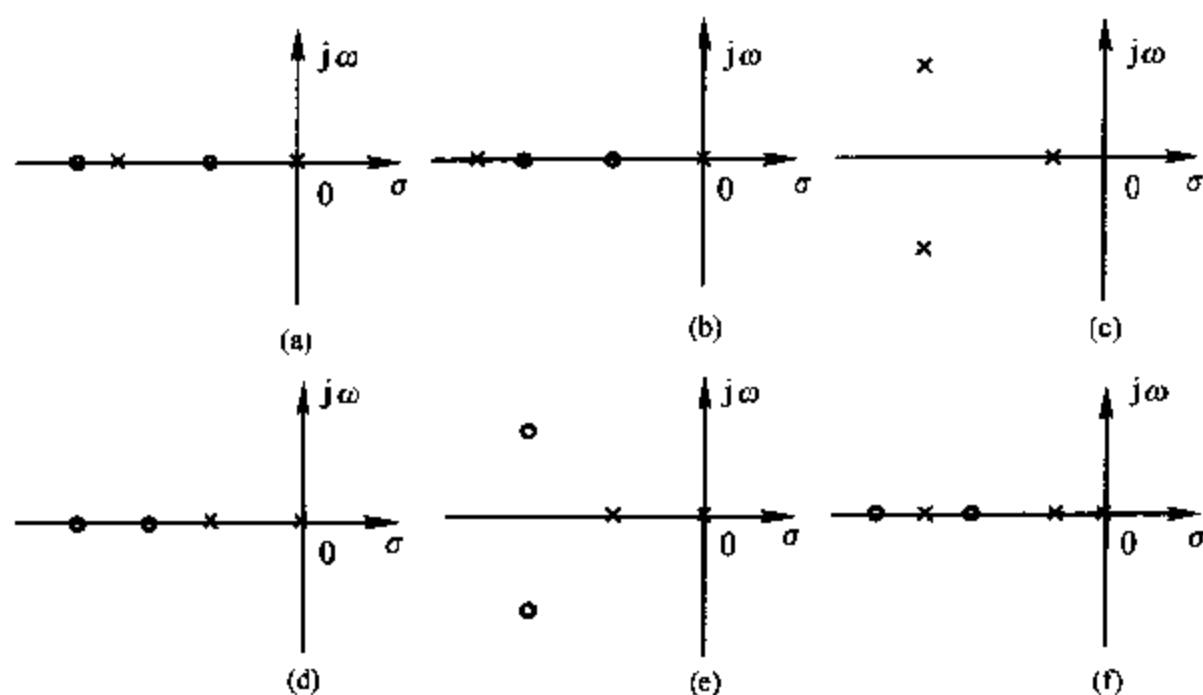


图 4.4.28 开环零、极点分布图

解 相应的闭环根轨迹图见图解 4.4.3。

4.4.4 设单位反馈控制系统开环传递函数如下,试概略绘出相应的闭环根轨迹图(要求确定分离点坐标  $d$ ):

$$(1) G(s) = \frac{K}{s(0.2s+1)(0.5s+1)};$$

$$(2) G(s) = \frac{K(s-1)}{s(2s+1)};$$

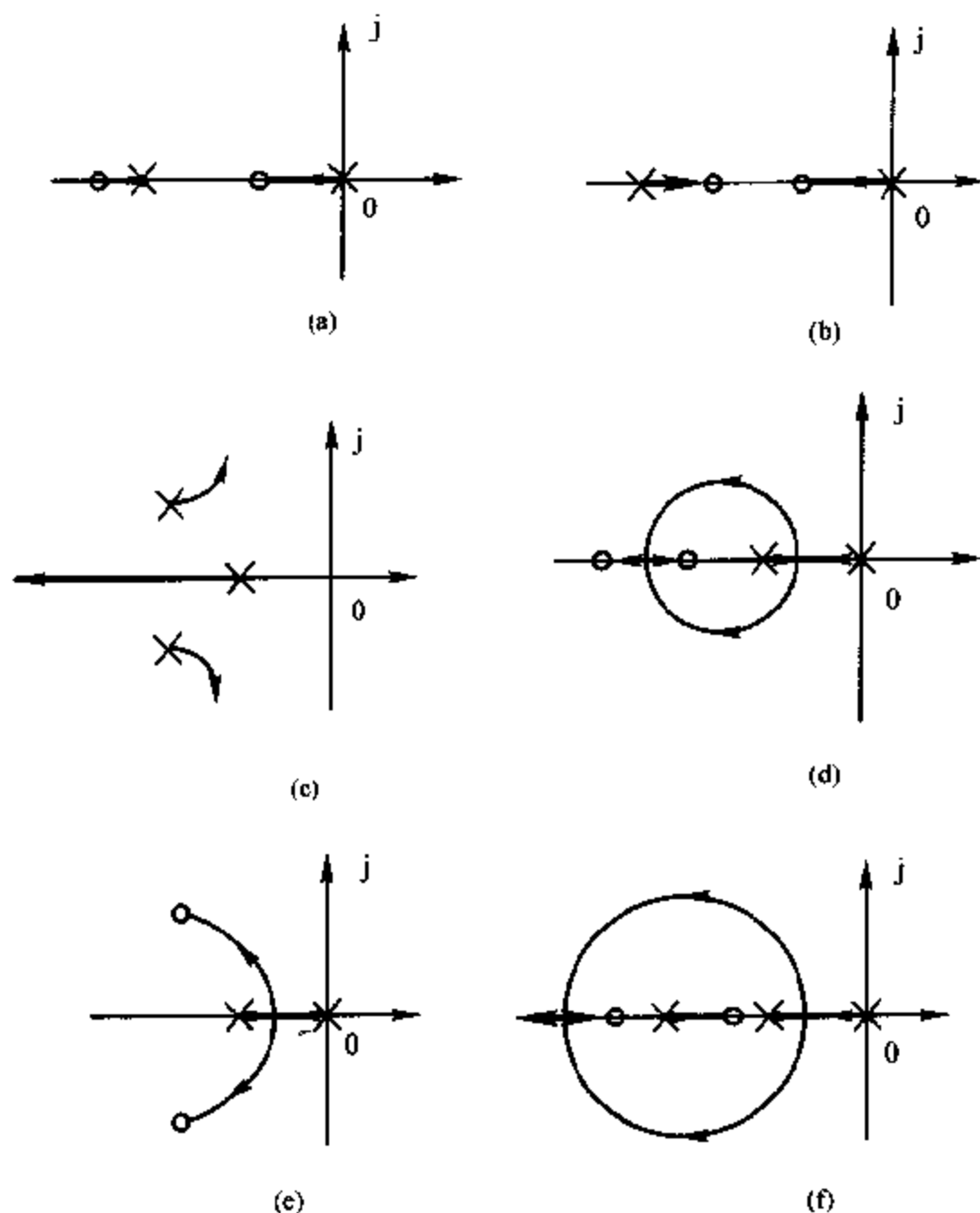


图 解 4.4.3 根轨迹图

$$(3) G(s) = \frac{K^*(s+5)}{s(s+2)(s+3)}$$

$$\text{解} \quad (1) G(s) = \frac{K}{s(0.2s+1)(0.5s+1)} = \frac{K^*}{s(s+2)(s+5)}, K^* = 10K$$

①  $n = 3$ , 根轨迹有 3 条分支;

② 起点:  $p_1 = 0, p_2 = -2, p_3 = -5$ ; 终点:  $n - m = 3$ , 3 条根轨迹趋向于无穷远处;

③ 实轴上根轨迹:  $[-2, 0], (-\infty, -5]$ ;

$$\textcircled{4} \text{ 渐近线 } \begin{cases} \sigma_a = \frac{0-2-5}{3} = -\frac{7}{3} \\ \varphi_a = \frac{(2K+1)\pi}{3} = \pm \frac{\pi}{3}, \pi \end{cases}$$

⑤ 分离点:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d+2} + \frac{1}{d+5} = 0$$

整理得

$$3d^2 + 14d + 10 = 0$$

解得

$$d_1 = -3.79 (\text{舍去})$$

$$d_2 = -0.88$$

作出根轨迹如图解 4.4.4(a) 所示。

$$(2) \quad G(s) = \frac{K(s+1)}{s(2s+1)} = \frac{K^*(s+1)}{s\left(s+\frac{1}{2}\right)}, \quad K^* = \frac{K}{2}$$

①  $n=2$ , 根轨迹有 2 条分支;

② 起点:  $p_1=0, p_2=-\frac{1}{2}$ ; 终点:  $z_1=-1, n-m=1$  条趋于无穷远处;

③ 实轴上根轨迹:  $[-0.5, 0], (-\infty, -1]$

④ 分离点:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d+\frac{1}{2}} = \frac{1}{d+1}$$

整理得

$$d^2 + 2d + \frac{1}{2} = 0$$

解得

$$\begin{cases} d_1 = -0.29 \\ d_2 = -1.707 \end{cases}$$

作出根轨迹如图解 4.4.4(b) 所示。

$$(3) \quad G(s) = \frac{K^*(s+5)}{s(s+2)(s+3)}$$

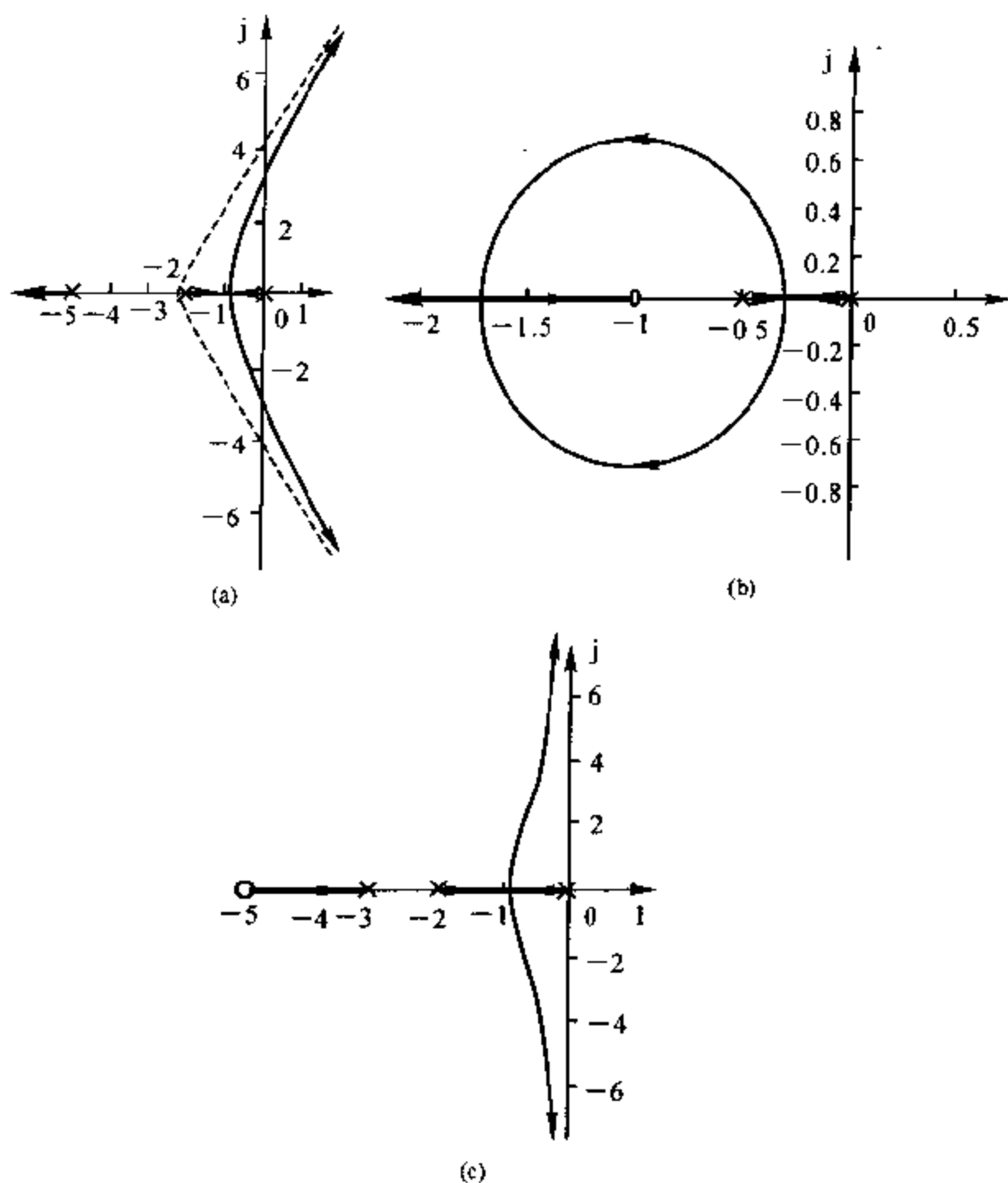
①  $n=3$ , 有 3 条根轨迹分支;

② 起点:  $p_1=0, p_2=-2, p_3=-3$ ; 终点:  $z_1=-5, n-m=2$  条根轨迹趋于无穷远;

③ 实轴上根轨迹:  $[-2, 0], [-5, -3]$ ;

④ 渐近线:





图解 4.4.4

$$\begin{cases} \sigma_a = \frac{-2-3+5}{3-1} = 0 \\ \varphi_a = \frac{(2K+1)\pi}{3-1} = \pm \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

⑤ 分离点:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d+2} + \frac{1}{d+3} = \frac{1}{d+5}$$

试根得  $d \approx -0.89$

作出根轨迹如图解 4.4.4(c) 所示。

4.4.5 已知据单位反馈控制系统开环传递函数如下,试概略画出相应的闭环根轨迹图(要求算出起始角  $\theta_{p_i}$ ):

$$(1) G(s) = \frac{K^*(s+2)}{(s+1+j2)(s+1-j2)},$$

$$(2) G(s) = \frac{K^*(s+20)}{s(s+10+j10)(s+10-j10)}.$$

解 (1)

①  $n = 2$ , 根轨迹有 2 条;

② 起点:  $p_1 = -1-j2, p_2 = -1+j2$ ; 终点:  $z_1 = -2$ , 有  $n-m = 1$  条根轨迹趋于无穷远;

③ 实轴上根轨迹:  $(-\infty, -2]$ ;

④ 分离点:

$$\frac{1}{d+1+j2} + \frac{1}{d+1-j2} = \frac{1}{d+2}$$

整理得

$$d^2 + 4d - 1 = 0$$

解得

$$\begin{cases} d_1 = 0.236 & (\text{舍去}) \\ d_2 = -4.26 \end{cases}$$

⑤ 起始角:

$$\theta_{p_1} = 180^\circ + \varphi_{p_2 p_1} - \theta_{z_1 p_1} = 180^\circ + \arctan 2 - 90^\circ =$$

$$180^\circ + 63.43^\circ - 90^\circ = 153.43^\circ$$

$$\theta_{p_2} = -153.43^\circ$$

根轨迹如图解 4.4.5(a) 所示。

(2) ①  $n = 3$ , 根轨迹有 3 条分支; 有  $n-m = 2$  条趋于无穷远处;

② 实轴上根轨迹:  $[-20, 0]$

③ 渐近线:

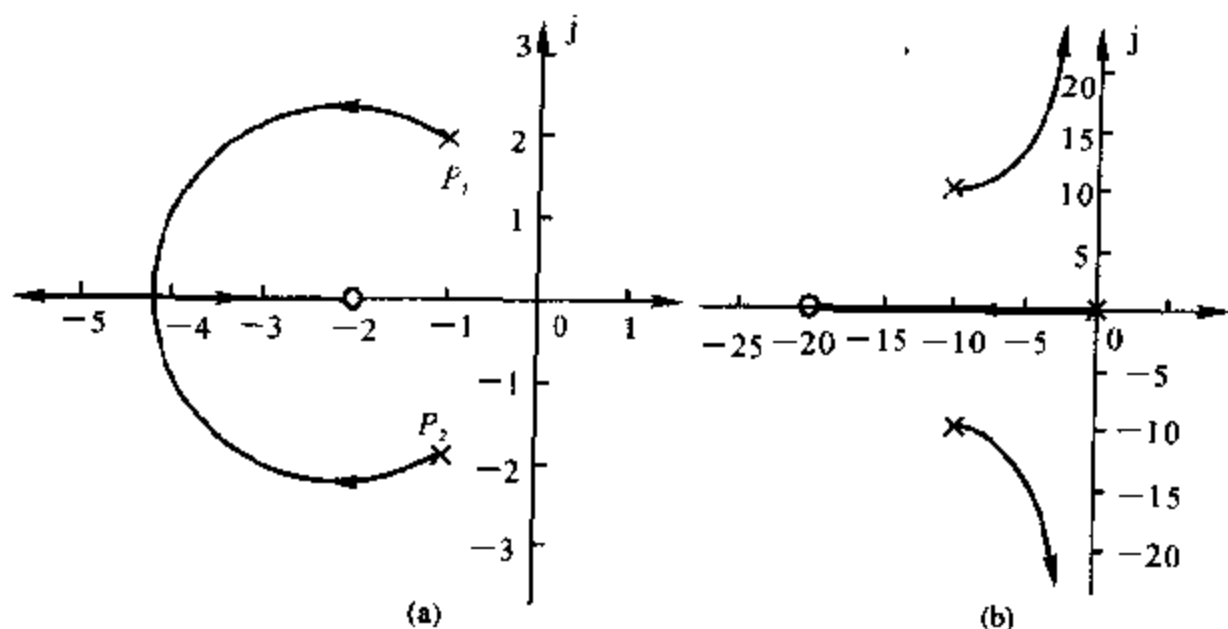
$$\begin{cases} \sigma_s = \frac{-10-j10-10+j10+20}{3-2} = 0 \\ \varphi_s = \frac{(2K+1)\pi}{3-2} = \pm \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

④ 起始角:

$$\theta_{p_2} = 180^\circ + \varphi_{p_1 p_2} + \varphi_{p_3 p_2} - \theta_{z_1 p_2} = 180^\circ + 45^\circ + 90^\circ - 135^\circ = 0^\circ$$

$$\theta_{p_3} = 0^\circ$$

根轨迹如图解 4.4.5(b) 所示。



图解 4.4.5

4.4.6 设单位反馈控制系统的开环传递函数如下,要求:

(1) 确定  $G(s) = \frac{K^*}{s(s+1)(s+10)}$  产生纯虚根的开环增益;

(2) 确定  $G(s) = \frac{K^*(s+z)}{s^2(s+10)(s+20)}$  产生纯虚根为  $\pm j1$  的  $z$  值和  $K^*$  值;

(3) 概略绘出  $G(s) = \frac{K^*}{s(s+1)(s+3.5)(s+3+j2)(s+3-j2)}$  的闭环根

轨迹图(要求确定根轨迹的分离点、起始角和与虚轴的交点)。

解 (1)

①  $n = 3$ , 根轨迹有 3 条分支, 3 条均趋于无穷远处;

② 实轴上根轨迹:  $(-\infty, -10], [-1, 0]$ ;

③ 渐近线:

$$\begin{cases} \sigma_a = \frac{-1-10}{3} = -\frac{11}{3} \\ \varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{3} = \pm \frac{\pi}{3}, \pi \end{cases}$$

④ 分离点:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d+1} + \frac{1}{d+10} = 0$$

整理得

$$3d^2 + 22d + 10 = 0$$

解得

$$\begin{cases} d_1 = -0.487 \\ d_2 = -6.85 \quad (\text{舍去}) \end{cases}$$

⑤ 与虚轴交点:

$$D(s) = s(s+1)(s+10) + K^* =$$

$$s^3 + 11s^2 + 10s + K^* = 0$$

令  $s = j\omega$ , 则

$$\begin{cases} \operatorname{Re}[G(j\omega)] = -11\omega^2 + K^* = 0 \\ \operatorname{Im}[G(j\omega)] = -\omega^3 + 10\omega = 0 \end{cases}$$

图解 4.4.6(a)

$$\text{解得根轨迹与虚轴交点: } \begin{cases} \omega = \pm \sqrt{10} \\ K^* = 110 \end{cases}$$

$$\text{产生纯虚根的开环增益: } K = \frac{K^*}{10} = 11$$

根轨迹如图解 4.4.6(a) 所示。

$$(2) D(s) = s^2(s+10)(s+20) + K^*(s+z) =$$

$$s^4 + 30s^3 + 200s^2 + K^*s + K^*z = 0$$

令  $s = j1$  代入  $D(s) = 0$ , 并令其实部、虚部分别为零, 即

$$\begin{cases} \operatorname{Re}D(j1) = 1 - 200 + K^*z = 0 \\ \operatorname{Im}D(j1) = -30 + K^* = 0 \end{cases}$$

解得

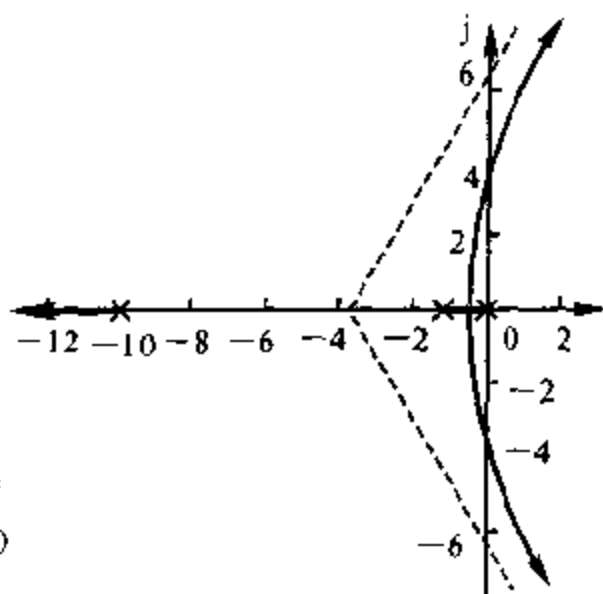
$$\begin{cases} K^* = 30 \\ z = 6.63 \end{cases}$$

根轨迹如图解 4.4.6(b) 所示。

(3) ①  $n = 5$ , 有 5 条根轨迹分支, 5 条均趋于无穷远处。

② 渐近线

$$\begin{cases} \sigma_a = \frac{-1 - 3.5 - 3 - j2 - 3 + j2}{5} = -2.1 \\ \varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{5} = +36^\circ, \pm 108^\circ, 180^\circ \end{cases}$$



③ 分离点:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d+1} + \frac{1}{d+3.5} + \frac{1}{d+3+j2} + \frac{1}{d+3-j2} = 0$$

试根得  $d \approx -0.4$

④ 与虚轴交点:

将  $s = j\omega$  代入  $D(s) = 0$ , 并令其实部,  $-25 - 20 - 15 - 10 - 5$

虚部分别为零, 即

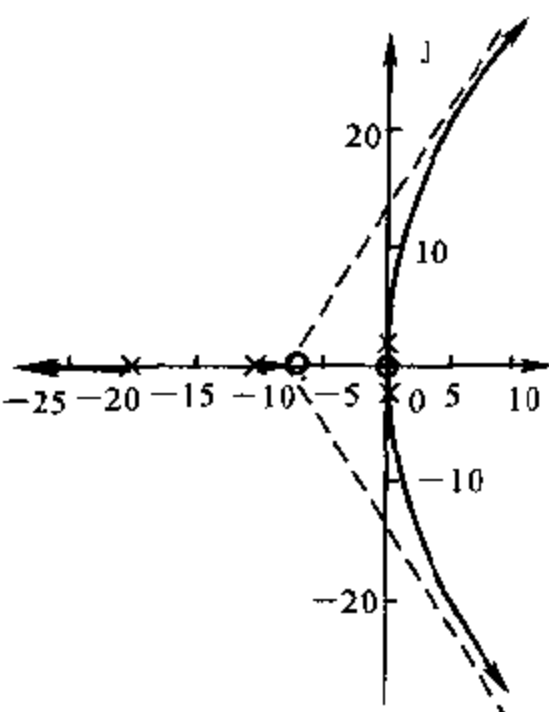
$$\operatorname{Re}[D(j\omega)] = 10.5\omega^4 - 79.5\omega^2 + K^* = 0$$

$$\operatorname{Im}[D(j\omega)] = \omega^5 - 43.5\omega^3 - 45.5\omega = 0$$

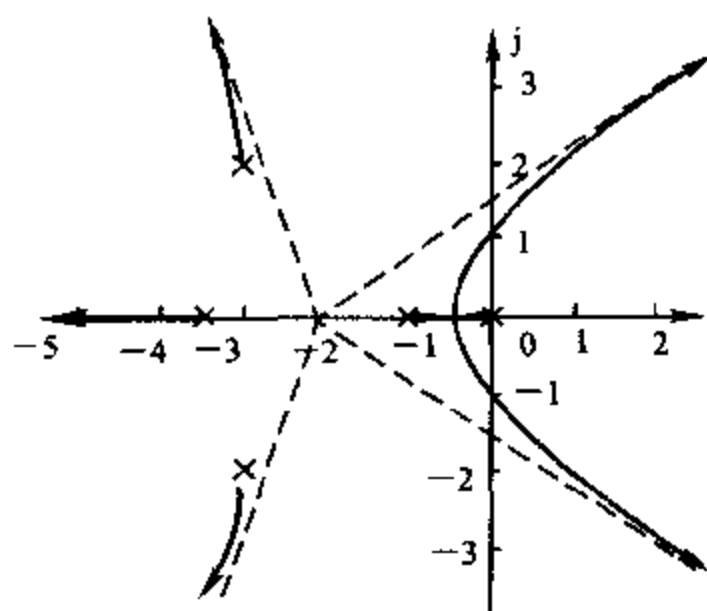
解得  $K^* = 75$

$$\omega = 1.05$$

根轨迹如图解 4.4.6(c) 所示。



图解 4.4.6(b)



图解 4.4.6(c)

4.4.7 设单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K^*(s+2)}{s(s+1)}$$

其根轨迹图见图 4-8(见参考文献[1]、146 页)。试从数学上证明:复数根轨迹部分是以  $(-2, j0)$  为圆心, 以  $\sqrt{2}$  为半径的一个圆。

证明 闭环特征方程为

$$D(s) = s(s+1) + K^*(2+2) = s^2 + (1+K^*)s + 2K^* = 0$$

$$\lambda = \frac{-(1+K^*) \pm \sqrt{(1+K^*)^2 - 8K^*}}{2} =$$

$$\frac{-(1+K^*) \pm j\sqrt{8K^* - (1+K^*)^2}}{2} = \sigma \pm j\omega$$

$$\sigma = \frac{-(1+K^*)}{2} \quad (1)$$

$$\omega = \pm \frac{1}{2} \sqrt{8K^* - (1+K^*)^2} \quad (2)$$

由式(1)得

$$K^* = -2\sigma - 1 \quad (3)$$

将式(3)代入式(2),整理得:  $(\sigma+2)^2 + \omega^2 = 2$

4.4.8 已知开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K^*}{s(s+4)(s^2+4s+20)}$$

试概略画出闭环系统根轨迹图。

解 
$$G(s)H(s) = \frac{k^*}{s(s+4)(s+2+j4)(s+2-j4)}$$

①  $n=4$ , 有4条根轨迹分支, 且均趋于无穷远处;

② 实轴上的根轨迹,  $[-4, 0]$

③ 渐近线:

$$\begin{cases} \sigma_a = \frac{-4-2-j4-2+j4}{4} = -2 \\ \varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{4} = \pm \frac{\pi}{4}, \pm \frac{3}{4}\pi \end{cases}$$

④ 分离点:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d+4} + \frac{1}{d+2+j4} + \frac{1}{d+2-j4} = 0$$

整理得

$$4d^3 + 24d^2 + 72d + 80 = 0$$

解得

$$d_1 = -2, \quad d_{2,3} = -2 \pm j\sqrt{6}$$

⑤ 起始角

$$\theta_{p_2} = 180^\circ - \theta_{p_1 p_2} - \theta_{p_3 p_2} - \theta_{p_4 p_2} =$$

$$180^\circ - (180^\circ - \arctan 2) - \arctan 2 - 90^\circ = -90^\circ$$

$$\theta_{p_1} = 90^\circ$$

⑥ 与虚轴交点:

$$D(s) = s^4 + 8s^3 + 36s^2 + 80s + K^* = 0$$

令  $s = j\omega$ , 则

$$\begin{cases} \operatorname{Re}[D(j\omega)] = \omega^4 - 36\omega^2 + K^* = 0 \\ \operatorname{Im}[D(j\omega)] = -8\omega^3 + 80\omega = 0 \end{cases}$$

得 
$$\begin{cases} \omega = \pm \sqrt{10} \\ K^* = 260 \end{cases}$$

根轨迹如图解 4.4.8 所示。

4.4.9 已知开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K^*(s+2)}{(s^2+4s-9)^2}$$

试概略绘制其闭环系统根轨迹图。

解

$$G(s) = \frac{k^*(s+2)}{(s+2+j\sqrt{5})^2(s+2-j\sqrt{5})^2}$$

①  $n=4$ , 有 4 条根轨迹分支,

有  $n-m=3$  条趋近于无穷远处;

② 实轴上根轨迹:  $(-\infty, 2]$ ;

③ 渐近线:

$$\begin{cases} \sigma_a = \frac{(-2+j\sqrt{5}-2-j\sqrt{5}) \times 2 + 2}{4-1} = -2 \\ \varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{4-1} = \pm \frac{\pi}{3}, \pi \end{cases}$$

④ 分离点:

$$\frac{2}{d+2+j\sqrt{5}} + \frac{2}{d+2-j\sqrt{5}} = \frac{1}{d+2}$$

整理得

$$3d^2 + 12d + 7 = 0$$

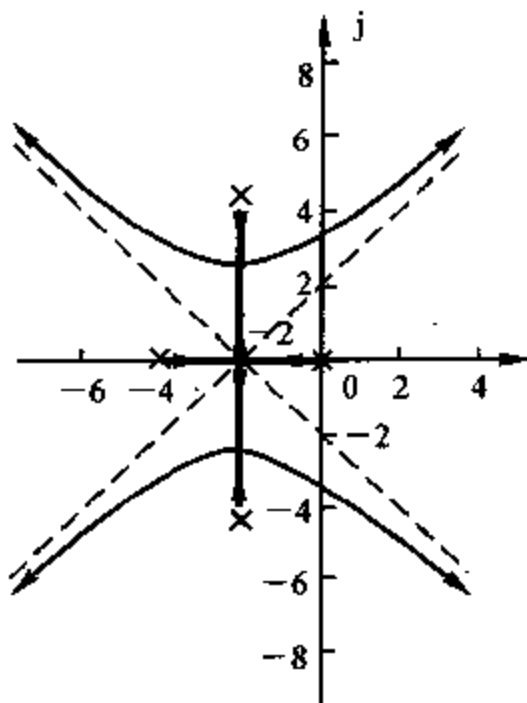
解得

$$d_1 = -0.709 \quad (\text{舍去})$$

$$d_2 = -3.291$$

⑤ 起始角: 由相角条件

$$\sum \varphi - \sum \theta = (2k+1)\pi$$



图解 4.4.8

$$90^\circ - (2\theta_{p_{1,2}} + 90^\circ \times 2) = (2k+1)\pi$$

$$\theta_{p_{1,2}} = \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi$$

$$\theta_{p_{3,4}} = -\frac{\pi}{4}, -\frac{3}{4}\pi$$

⑥ 与虚轴交点:

$$D(s) = (s^2 + 4s + 9)^2 + K^*(s+2) =$$

$$s^4 + 8s^3 + 34s^2 + (72 + K^*)s + (81 + 2K^*)$$

列劳思表:

$s^4$	1	34	$81 + 2K^*$
$s^3$	8	$72 + K^*$	0
$s^2$	$\frac{300 - K^*}{8}$	$81 + 2K^*$	
$s^1$	$\frac{9\,216 - (K^*)^2}{(200 - K^*)/8} = 0$		
$s^0$	$81 + 2K^*$		

劳思表出现全 0 行则与虚轴有交点, 劳思表中只可能  $s^1$  行出现全 0。令

$$\frac{9\,216 - (K^*)^2}{200 - K^*} = 0$$

得  $K^* = 96$

将  $K^*$  值代入  $D(s) = 0$ , 可得

$$\omega = \pm \sqrt{21} = \pm 4.583$$

根轨迹如图解 4.4.9 所示。

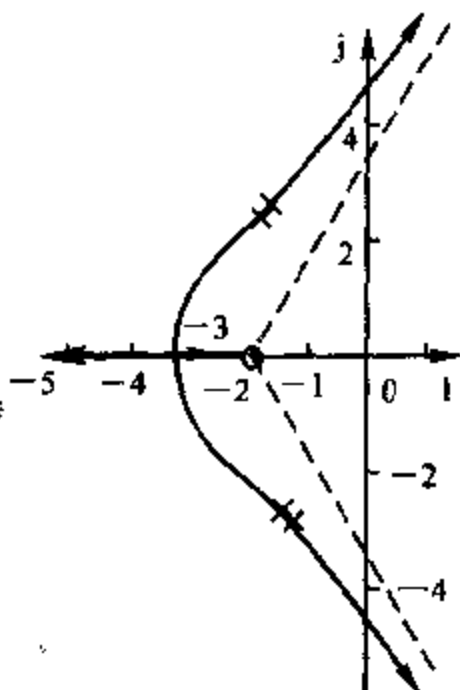
4.4.10 设单位反馈控制系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s(0.01s+1)(0.02s+1)}$$

要求:

- (1) 画出准确根轨迹(至少校验三点);
- (2) 确定系统的临界稳定开环增益  $K_c$ ;
- (3) 确定与系统临界阻尼比相应的开环增益  $K$ 。

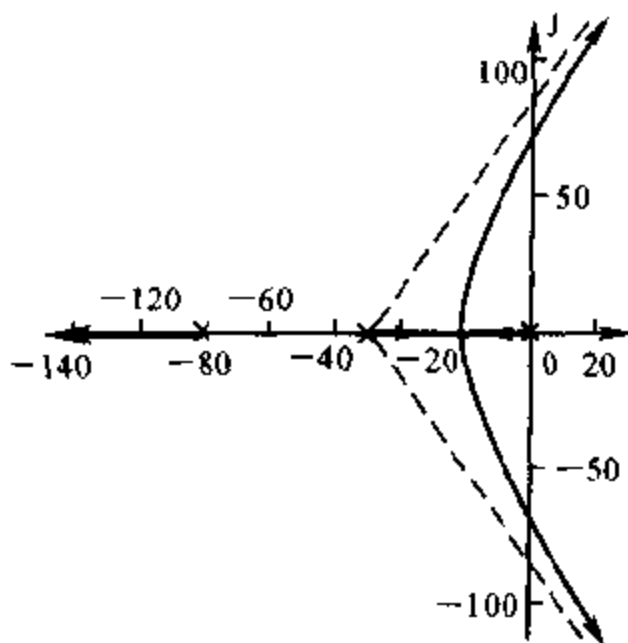
解 (1)  $G(s) = \frac{5\,000K}{s(s+50)(s+100)}$



图解 4.4.9



- ①  $n = 3$ , 有 3 条根轨迹, 且均趋于无穷远处;  
 ② 实轴上的根轨迹:  $(-\infty, -100], [-50, 0]$ ;



图解 4.4.10

- ③ 渐近线:

$$\begin{cases} \sigma_a = \frac{-50 - 100}{3} = -50 \\ \varphi_k = \frac{(2k+1)\pi}{3} = \pm \frac{\pi}{3}, \pi \end{cases}$$

- ④ 分离点:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d+50} + \frac{1}{d+100} = 0$$

整理得

$$3d^2 + 300d + 5\,000 = 0$$

解得

$$d_1 = -21.3$$

$$d_2 = 21.3 (\text{舍去})$$

根轨迹如图解 4.4.10 所示。

- (2) 临界开环增益  $K_c$  为根轨迹与虚轴交点对应的开环增益。

$$D(s) = s^3 + 150s^2 + 5\,000s + 5\,000K = 0$$

令  $s = j\omega$ , 代入  $D(s) = 0$ , 并令其实部、虚部分别为零, 即

$$\begin{cases} \operatorname{Re}[D(j\omega)] = -150\omega^2 + 5\,000K = 0 \\ \operatorname{Im}[D(j\omega)] = -\omega^3 + 5\,000\omega = 0 \end{cases}$$

解得  $\omega_{1,2} = \pm \sqrt{5000} = \pm 70.71$ ,  $\omega_3 = 0$  (舍去)

$$K_c = 150$$

(3) 系统处于临界阻尼比  $\zeta = 1$ , 相应闭环根位于分离点处, 即要求分离点  $d$  对应的  $K$  值。将  $s = d = -21.3$  代入幅值条件:

$$K = |s| |0.01s + 1| |0.02s + 1| = 9.622$$

4.4.11 一单位反馈系统, 其开环传递函数为

$$G(s) = \frac{6.9(s^2 + 6s + 25)}{s(s^2 + 8s + 25)}$$

试用根轨迹法计算闭环系统根的位置。

$$\text{解 } G(s) = \frac{K^* (s^2 + 6s + 25)}{s(s^2 + 8s + 25)} = \frac{K^* (s + 3 + j4)(s + 3 - j4)}{s(s + 4 + j3)(s + 4 - j3)}$$

①  $n = 3$ , 有 3 条根轨迹分支, 有  $n - m = 1$  条趋于无穷远处;

② 出射角、入射角:

$$\begin{aligned} \theta_{p_1} &= 180^\circ + \varphi_{z_1 p_1} + \varphi_{z_2 p_1} - \theta_{p_3 p_1} - \theta_{p_2 p_1} = \\ &180^\circ - 143.13^\circ + 98.1^\circ - 90^\circ - 225^\circ \approx -90^\circ \end{aligned}$$

$$\theta_{p_2} \approx 90^\circ$$

$$\begin{aligned} \varphi_{z_1} &= 180^\circ - \varphi_{z_2 z_1} + \theta_{p_1 z_1} + \theta_{p_2 z_1} + \theta_{p_3 z_1} = \\ &180^\circ - 90^\circ + 45^\circ + 81.87^\circ + 126.87^\circ \approx -16.26^\circ \end{aligned}$$

$$\varphi_{z_2} = 16.26^\circ$$

根轨迹如图解 4.4.11 所示。

4.4.12 设反馈控制系统中

$$G(s) = \frac{K^*}{s^2(s+2)(s+5)}, \quad H(s) = 1$$

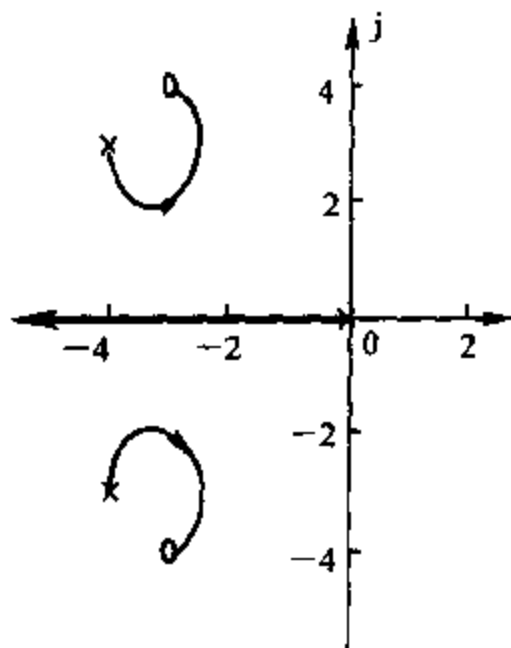
要求:

(1) 概略绘出系统根轨迹图, 并判断闭环系统的稳定性;

(2) 如果改变反馈通路传递函数, 使  $H(s) = 1 + 2s$ , 试判断  $H(s)$  改变后的系统稳定性, 研究由于  $H(s)$  改变所产生的效应。

解 (1) ①  $n = 4$ , 有 4 条根轨迹分支, 且 4 条均趋于无穷远处;

② 实轴上的根轨迹:  $[-5, -2]$ ;



图解 4.4.11

## ③ 渐近线

$$\begin{cases} \sigma_a = \frac{-2-5}{4} = -\frac{7}{4} \\ \varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{4} = \pm \frac{\pi}{4}, \pm \frac{3}{4}\pi \end{cases}$$

## ④ 分离点:

$$\frac{2}{d} + \frac{1}{d+2} + \frac{1}{d+5} = 0$$

整理得

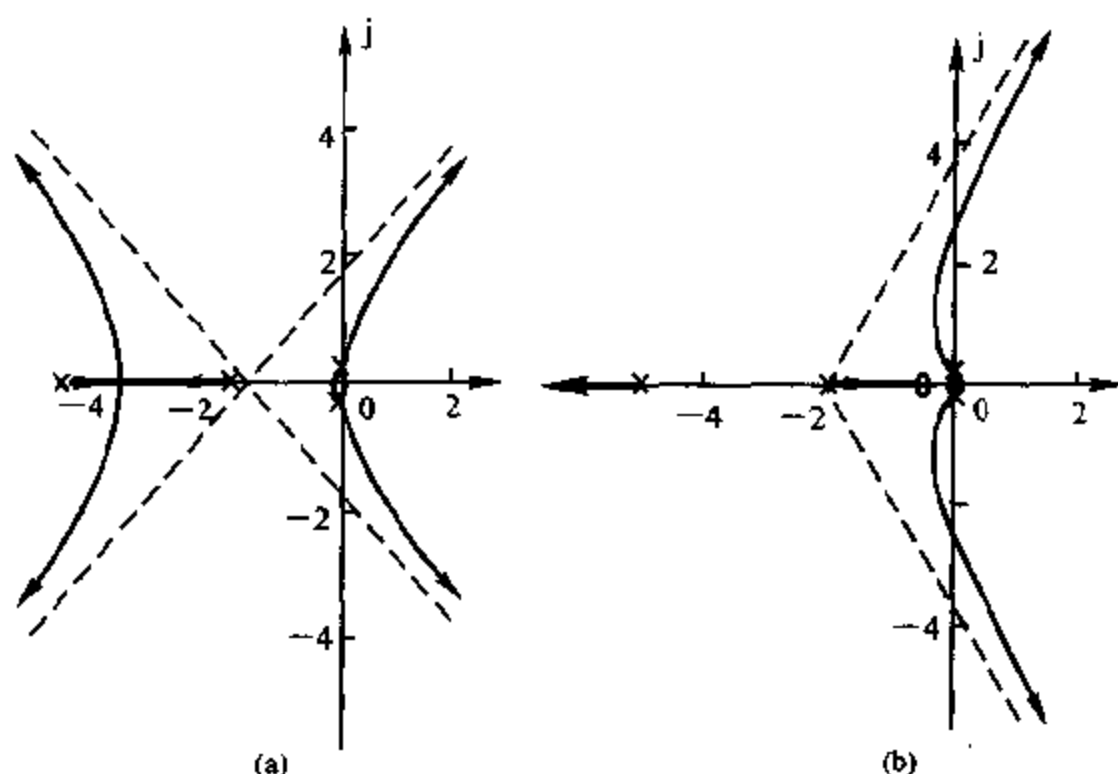
$$4d^2 + 21d + 20 = 0$$

解得

$$d_1 = -4$$

$$d_2 = 4 \quad (\text{舍去})$$

根轨迹如图解 4.4.12(a) 所示。



图解 4.4.12

由于系统是结构不稳定系统,故对于任何  $K^* > 0$  系统均不稳定。从根轨迹图中也可看出,当  $K^* > 0$  时,有 2 条根轨迹分支在虚轴右边。

(2) 当  $H(s) = 1 + 2s$  时

$$G(s)H(s) = \frac{K^*(2s+1)}{s(s+2)(s+5)} = \frac{2K^*(s+0.5)}{s(s+2)(s+5)}$$

- ①  $n = 4$ , 有 4 条根轨迹分支, 其中有  $n - m = 3$  条趋于无穷远处;  
 ② 实轴上的根轨迹:  $(-\infty, -5], [-2, -0.5]$   
 ③ 渐近线

$$\begin{cases} \sigma_a = \frac{-2-5+0.5}{4-1} = -\frac{13}{6} = -2.17 \\ \varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{4-1} = \pm \frac{\pi}{3}, \pi \end{cases}$$

- ④ 与虚轴交点:

$$D(s) = s^4 + 7s^3 + 10s^2 + 2K^*s + K^* = 0$$

列劳斯表

$s^4$	1	10	$K^*$
$s^3$	7	$2K^*$	0
$s^2$	$\frac{70-2K^*}{7}$	$K^*$	
$s^1$	$\frac{K^*(91-4K^*)}{70-2K^*}$	0	
$s^0$	$K^*$		

$s^1$  行为全 0 行, 令  $\frac{K^*(91-4K^*)}{70-2K^*} = 0$ , 得

$$K_1^* = \frac{91}{4}, \quad K_2^* = 0 \text{ (舍去)}$$

故当  $0 < K^* < \frac{91}{4}$  时系统稳定。根轨迹与虚轴交点坐标可由辅助方程求得。

$$F(s) = \frac{70-2K^*}{7}s^2 + K^* = 0$$

解得

$$\omega = \pm j2.55$$

当  $H(s) = 2s+1$  时, 相当于在系统中附加了一个  $z = -0.5$  的开环零点, 从而使根轨迹向  $s$  平面左边弯曲, 改善了系统的稳定性。

**4.4.13** 试绘出下列多项式方程的根轨迹:

- (1)  $s^3 + 2s^2 + 3s + Ks + 2K = 0$ ;  
 (2)  $s^3 + 3s^2 + (K+2)s + 10K = 0$ 。

解 (1)  $D(s) = s^3 + 2s^2 + 3s + K(s+2) = 0$

做等效开环传递函数

$$G^*(s) = \frac{K(s+2)}{s^3 + 2s^2 + 3s} = \frac{K(s+2)}{s(s+1+j\sqrt{2})(s+1-j\sqrt{2})}$$

①  $n = 3$ , 有 3 条根轨迹, 有  $n - 3 = 2$  条趋于无穷远处;

② 实轴上根轨迹:  $[-2, 0]$ ;

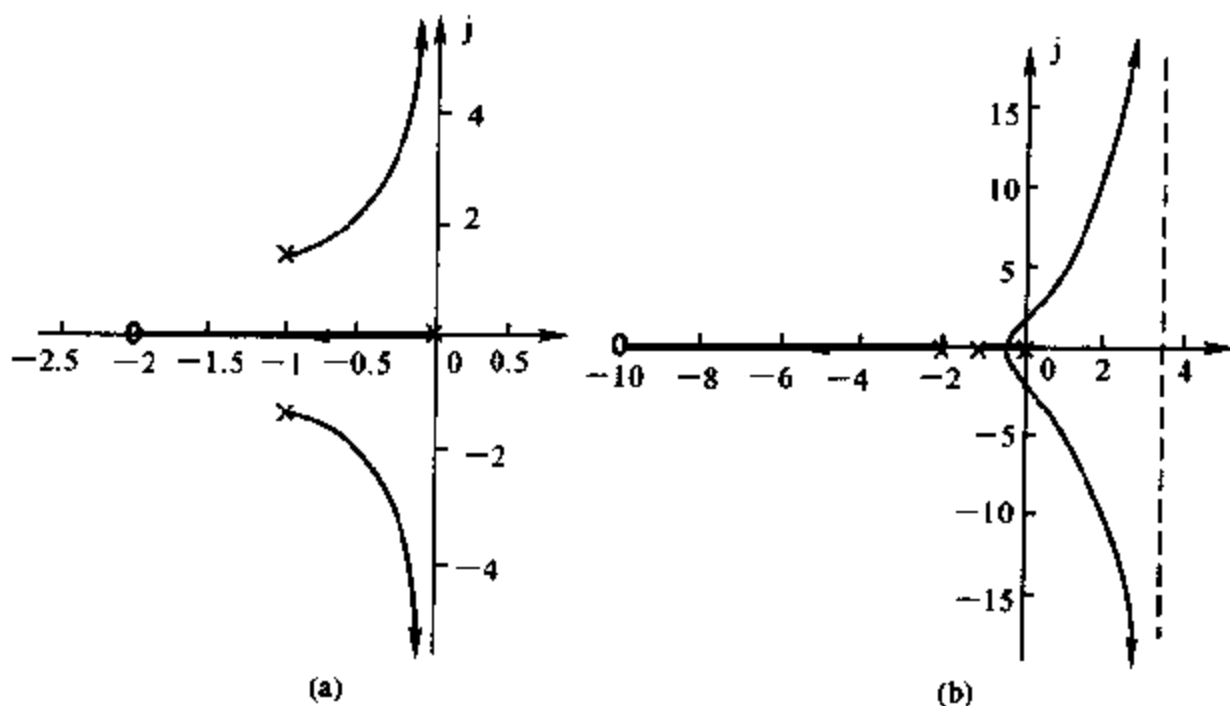
③ 渐近线:

$$\begin{cases} \sigma_a = \frac{-1 + j\sqrt{2} - 1 - j\sqrt{2} + 2}{3 - 1} = 0 \\ \varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{3-1} = \pm \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

④ 出射角:  $\theta_{p_2} = 180^\circ + 54.73^\circ - 90^\circ - 125.3^\circ \approx 19.5^\circ$

$$\theta_{p_3} = -19.5^\circ$$

根轨迹如图解 4.4.13(a) 所示。



图解 4.4.13

$$(2) D(s) = s^3 + 3s^2 + (K+2)s + 10K = s(s^2 + 3s + 2) + K(s+10) = 0$$

做等效开环传递函数

$$G^*(s) = \frac{K(s+10)}{s(s^2 + 3s + 2)} = \frac{K(s+10)}{s(s+1)(s+2)}$$

①  $n = 3$ , 有 3 条根轨迹,  $n - m = 2$  条趋于无穷远处;

② 实轴上的根轨迹:  $[-10, -2], [-1, 0]$ ;

③ 渐近线

$$\begin{cases} \sigma_n = \frac{-1-2+10}{3-1} = \frac{7}{2} \\ \varphi_n = \frac{(2k+1)\pi}{3-1} = \pm \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

④ 分离点:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d+1} + \frac{1}{d+2} = \frac{1}{d+10}$$

试根得

$$d = -0.433$$

⑤ 与虚轴交点:

$$D(s) = s^3 + 3s^2 + (K+2)s + 10K = 0$$

令  $s = j\omega$ , 代入  $D(s) = 0$ , 并令其实部、虚部为零, 即

$$\operatorname{Re}[D(j\omega)] = -3\omega^2 + 10K = 0$$

$$\operatorname{Im}[D(j\omega)] = -3\omega^3 + (K+2)\omega = 0$$

解得

$$K = \frac{6}{7}, \quad \omega = \pm 1.69$$

根轨迹如图解 4.4.13(b) 所示。

**4.4.14** 设系统开环传递函数如下, 试画出  $b$  从零变到无穷时的根轨迹图:

$$(1) G(s) = \frac{20}{(s+4)(s+b)};$$

$$(2) G(s) = \frac{30(s+b)}{s(s+10)}.$$

解 (1)  $D(s) = s^2 + 4s + bs + 4b + 20 = s^2 + 4s + 20 + b(s+4) = 0$

做等效开环传递函数

$$G^*(s) = \frac{b(s+4)}{s^2 + 4s + 20} = \frac{b(s+4)}{(s+2+j4)(s+2-j4)}$$

①  $n=2$ , 有 2 条根轨迹分支,  $n-m=1$  条趋于无穷远处;

② 实轴上的根轨迹:  $(-\infty, -4]$ ;

③ 分离点:

$$\frac{1}{d+2+j4} + \frac{1}{d+2-j4} = \frac{1}{d+4}$$

整理得

$$d^2 + 8d - 4 = 0$$

解得

$$d_1 = -8.47$$

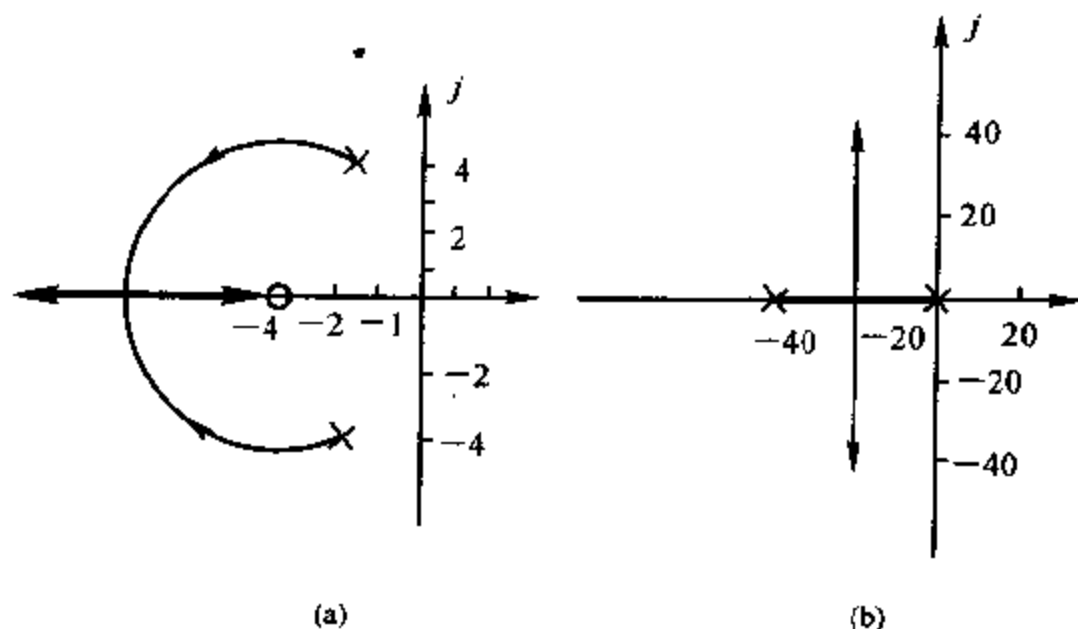
$$d_2 = 0.47 (\text{舍去})$$

④ 出射角:

$$\theta_{p_1} = 180^\circ + \arctan 2 - 90^\circ = 135^\circ$$

$$\theta_{p_2} = -135^\circ$$

根轨迹如图解 4.4.14(a) 所示。



图解 4.4.14

$$(2) D(s) = s(s+10) + 30(s+b) = s^2 + 40s + 30b = 0$$

做等效开环传递函数

$$G^*(s) = \frac{30b}{s^2 + 40s} = \frac{30b}{s(s+40)}$$

①  $n = 2$ , 有 2 条根轨迹分支, 且均趋于无穷远处;

② 实轴上根轨迹:  $[-40, 0]$ ;

③ 分离点:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d+40} = 0$$

解得

$$d = -20$$

根轨迹如图解 4.4.14(b) 所示。

**4.4.15** 设控制系统的结构图如图 4.4.29 所示, 试概略绘制其根轨迹图。

**解** 系统为正反馈, 应画零度根轨迹

①  $n = 2$ , 有 2 条根轨迹分支;

② 实轴上根轨迹:  $(-\infty, -2]$ ,  $[-2, -1]$ ,  $[-1, \infty)$ ;

根轨迹如图解 4.4.15 所示。

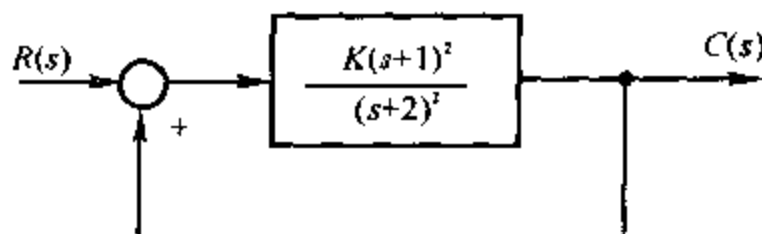


图 4.4.29 控制系统

4.4.16 设单位反馈控制系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K^*(1-s)}{s(s+2)}$$

试绘制其根轨迹图,并求出使系统产生重实根和纯虚根的  $K^*$  值。

解 该系统应画零度根轨迹。

①  $n=2$ , 有 2 条根轨迹分支,  $n-m=1$  条根轨迹趋于无穷远处;

② 实轴上的根轨迹:  $[-2, 0]$ ,

$[-1, \infty)$

③ 渐近线:

$$\begin{cases} \sigma_s = \frac{-2-1}{2-1} = -3 \\ \varphi_s = \frac{2k\pi}{2-1} = 0^\circ \end{cases}$$

④ 分离点:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d+2} = \frac{1}{d-1}$$

解得  $d_1 = -0.732$

$$d_2 = 2.732$$

⑤ 与虚轴交点:

将  $s = j\omega$ , 代入  $D(s) = 0$ , 令其实部、虚

部为零, 即

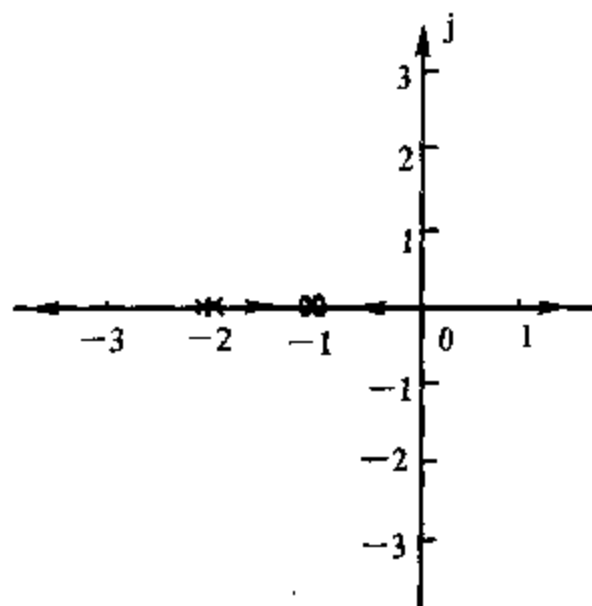
$$\operatorname{Re}[D(j\omega)] = -\omega^2 + K^* = 0$$

$$\operatorname{Im}[D(j\omega)] = (2 - K^*)\omega = 0$$

解得

$$\begin{cases} K^* = 2 \\ \omega = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

根轨迹如图解 4.4.16 所示。



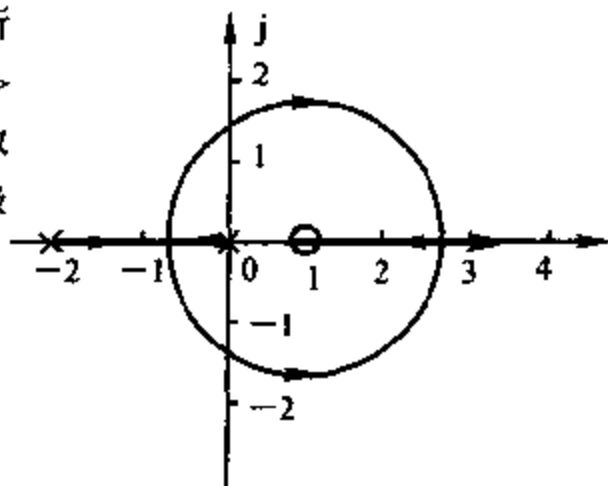
图解 4.4.15



4.4.17 设控制系统如图 4.4.30 所示,试概略绘出  $K'_t = 0, 0 < K'_t < 1, K'_t > 1$  时的根轨迹和单位阶跃响应曲线。若取  $K'_t = 0.5$ , 试求出  $K = 10$  时的闭环零、极点, 并估算系统的动态性能。

解 开环传递函数

$$G(s)H(s) = \frac{K(1+K'_t s)}{s(s+1)} = \frac{KK'_t \left(s + \frac{1}{K'_t}\right)}{s(s+1)}$$



图解 4.4.15

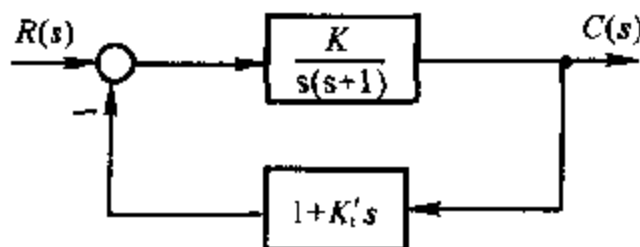


图 4.4.30 控制系统

(1) 当  $K'_t = 0$  时

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+1)}$$

- ①  $n = 2$ , 根轨迹有 2 条分支, 且 2 条均趋于无穷远处;
- ② 实轴上根轨迹:  $[-1, 0]$ ;
- ③ 分离点,

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d+1} = 0$$

解得

$$d = -\frac{1}{2}$$

分离点对应的  $K$  值为

$$K_d = |d| \left| d + \frac{1}{2} \right| = \frac{3}{4}$$

根轨迹如图解 4.4.17(a) 所示。

当  $0 < K \leq \frac{3}{4}$  时, 系统的单位阶跃响应为单调, 当  $K > \frac{3}{4}$  时, 系统的单位

阶跃响应为振荡衰减。

(2) 当  $0 < K'_t < 1$  时

$$G(s)H(s) = \frac{KK'_t \left(s + \frac{1}{K'_t}\right)}{s(s+1)}$$

①  $n = 2$ , 有 2 条根轨迹分支,  $n - m = 1$  条趋于无穷远处;

② 实轴上的根轨迹:  $(-\infty, -\frac{1}{K'_t}]$ ,  $[-1, 0]$ ;

③ 分离点:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d+1} = -\frac{1}{d + \frac{1}{K'_t}}$$

解得

$$d_1 = -\frac{1}{K'_t} + \frac{\sqrt{1-K'_t}}{K'_t}$$

$$d_2 = -\frac{1}{K'_t} - \frac{\sqrt{1-K'_t}}{K'_t}$$

两个分离点对应的开环增益分别为  $K_{d1}$ ,  $K_{d2}$ 。

根轨迹如图解 4.4.17(b) 所示。

当  $0 < K \leq K_{d1}$  及  $K \geq K_{d2}$  时系统单位阶跃响应为单调; 当  $K_{d1} < K < K_{d2}$  时系统单位阶跃响应为振荡衰减。

(3) 当  $K'_t > 1$  时

$$G(s)H(s) = \frac{KK'_t \left(s + \frac{1}{K'_t}\right)}{s(s+1)}$$

①  $n = 2$ , 有 2 条根轨迹分支,  $n - m = 1$  条趋于无穷远处;

② 实轴上根轨迹:  $(-\infty, -1]$ ,  $[-\frac{1}{K'_t}, 0]$ ;

根轨迹如图解 4.4.17(c) 所示。

系统单位阶跃响应均为单调。

(4) 当  $K'_t = 0.5$ ,  $K = 10$  时, 根轨迹如图解 4.4.17(b) 所示。

$$D(s) = s^2 + 6s + 10 = 0$$

所以闭环极点  $\lambda_{1,2} = -3 \pm j1$ , 无闭环零点, 因为

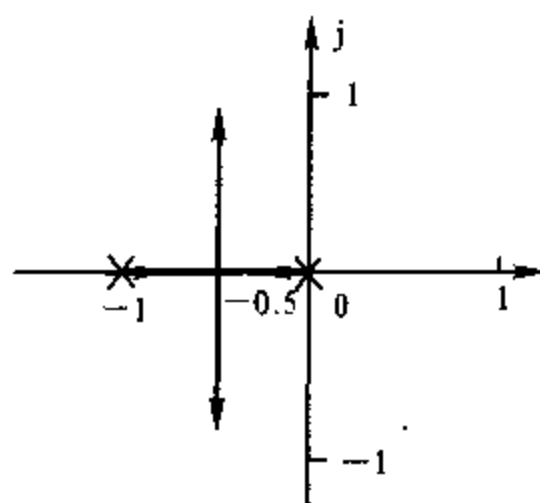
$$\sigma_1 = 3, \quad D = 1, \quad A = \sqrt{\sigma_1^2 + D^2} = \sqrt{10}$$

所以

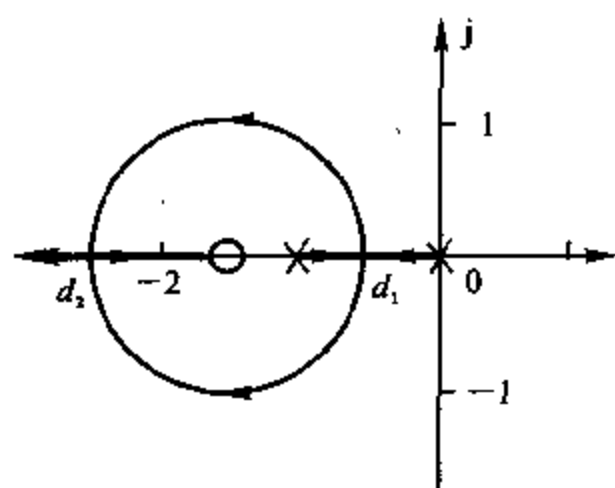
$$t_p = \frac{\pi}{D} = 3.14 \text{ s}$$

$$\sigma\% = 100e^{-\sigma_1 t_p}\% = 100e^{-9.42}\% \approx 0$$

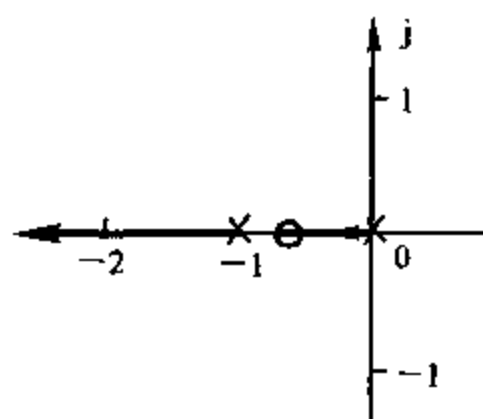
$$t_s = \frac{3 + \ln\left(\frac{A}{D}\right)}{\sigma_1} = 1.384 \text{ s}$$



(a)



(b)



(c)

图 解 4.4.17

4.4.18 设单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K^*}{s(s+a)}$$

试绘出  $K^*$  和  $a$  从零变到无穷大时的根轨迹簇。当  $K^* = 4$  时, 绘出以  $a$  为参变量的根轨迹。

解

$$D(s) = s^2 + as + K^* = 0$$

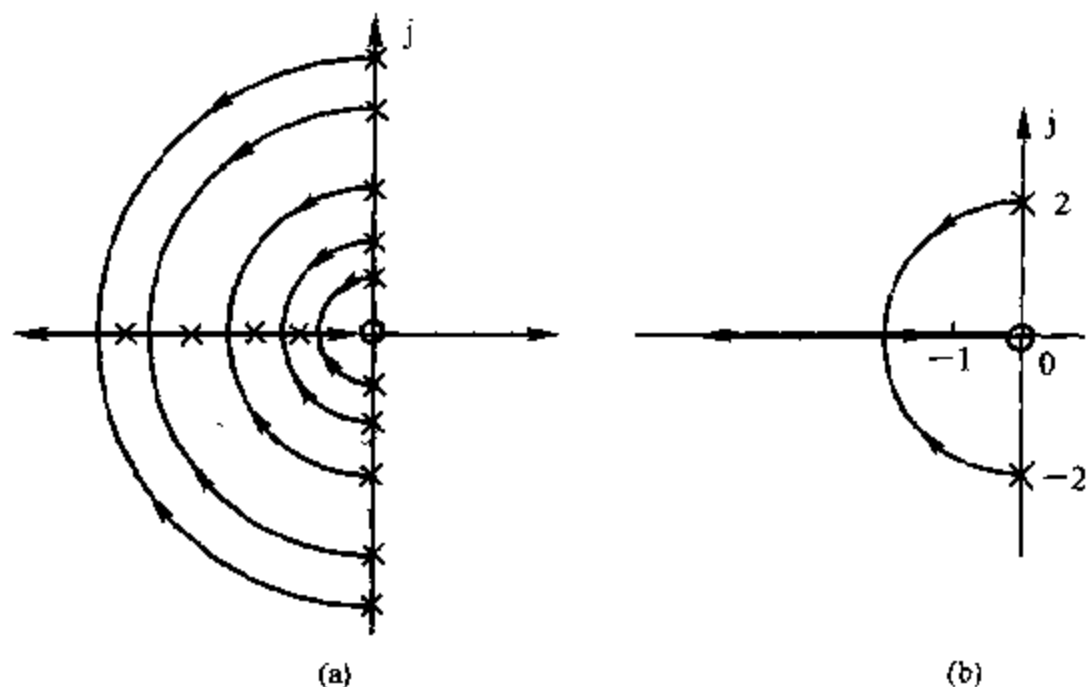
做等效开环传递函数

$$G^*(s) = \frac{as}{s^2 + K^*}$$

(1) 当  $K^* = 0$  时,  $G(s) = \frac{as}{s^2}$ , 当  $a$  从  $0 \rightarrow \infty$  时根轨迹为负实轴;

(2) 当  $K^* > 0$  时,  $G(s) = \frac{as}{s^2 - K^*}$ , 当  $a$  从  $0 \rightarrow \infty$  时可绘出根轨迹簇, 如图解 4.4.18(a) 所示。

(3) 当  $K^* = 4$  时,  $G(s) = \frac{as}{s^2 + 4} = \frac{as}{(s + j2)(s - j2)}$ , 当  $a$  从  $0 \rightarrow \infty$  时, 根轨迹如图解 4.4.18(b) 所示。



图解 4.4.18

4.4.19 设控制系统开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K^*(s+1)}{s^2(s+2)(s+4)}$$

试分别画出正反馈系统和负反馈系统的根轨迹图, 并指出它们的稳定情况有何不同。

解 (1) 负反馈系统根轨迹:

①  $n = 4$ , 有 4 条根轨迹分支,  $n - m = 3$  条  $\rightarrow \infty$ ;

② 实轴上的根轨迹:  $[-2, -1]$ ,  $(-\infty, -4]$ ;

③ 渐近线:

$$\begin{cases} \sigma_s = \frac{-2-4+1}{4-1} = -\frac{5}{3} \\ \varphi_s = \frac{(2k+1)\pi}{4-1} = \pm \frac{\pi}{3} \cdot \pi \end{cases}$$

④ 与虚轴交点:

$$D(s) = s^2(s+2)(s+4) + K^*(s+1) = s^4 + 6s^3 + 8s^2 + K^*s + K^* = 0$$

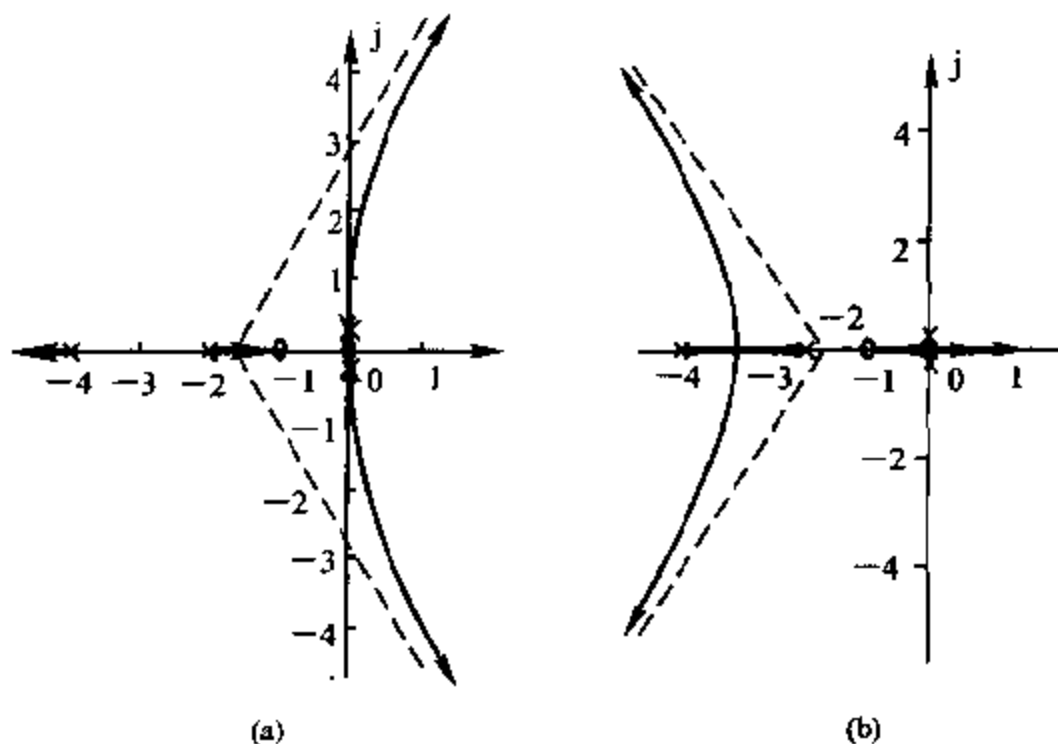
将  $s = j\omega$  代入  $D(s)$ , 并令其实部、虚部分别为零, 即

$$\begin{cases} \operatorname{Re}[D(j\omega)] = \omega^4 - 8\omega^2 + K^* = 0 \\ \operatorname{Im}[D(j\omega)] = -6\omega^3 + K^*\omega = 0 \end{cases}$$

解得

$$K^* = 12, \quad \omega = \pm\sqrt{2}$$

根轨迹如图解 4.4.19(a) 所示, 当  $0 < K^* < 12$  时系统稳定。



图解 4.4.19

(2) 正反馈系统为零度根轨迹:

- ①  $n = 4$ , 有 4 条根轨迹分支, 且有  $n - m = 3$  条  $\rightarrow \infty$ ;
- ② 实轴上根轨迹:  $[-4, -2]$ ,  $[-1, 0]$ ,  $[0, \infty)$ ;
- ③ 渐近线:

$$\begin{cases} \sigma_a = \frac{-2-4+1}{4-1} = -\frac{5}{3} \\ \varphi_a = \frac{2k\pi}{4-1} = 0, \pm \frac{2}{3}\pi \end{cases}$$

④ 分离点

$$\frac{2}{d} + \frac{1}{d+2} + \frac{1}{d+4} = \frac{1}{d+1}$$

试根得

$$d = -3.082$$

根轨迹如图解 4.4.19(b) 所示。当  $K^* > 0$  时, 不论为何值系统均不稳定。

4.4.20 设控制系统如图 4.4.31 所示, 其中  $G_c(s)$  为改善系统性能而加入的校正装置。若  $G_c(s)$  可从  $K_1s$ ,  $K_2s^2$  和  $\frac{K_3s^2}{s+20}$  三种传递函数中任选一种, 你选择哪一种? 为什么?

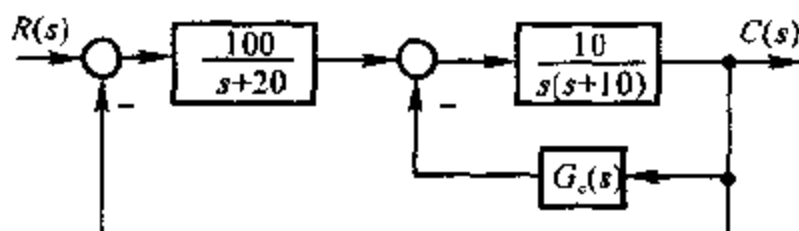


图 4.4.31 控制系统

$$\text{解 } G(s) = \frac{100}{s+20} \frac{\frac{10}{s(s+10)}}{1 + \frac{10G_c(s)}{s(s+10)}} = \frac{1\,000}{(s+20)[s^2 + 10s + 10G_c(s)]}$$

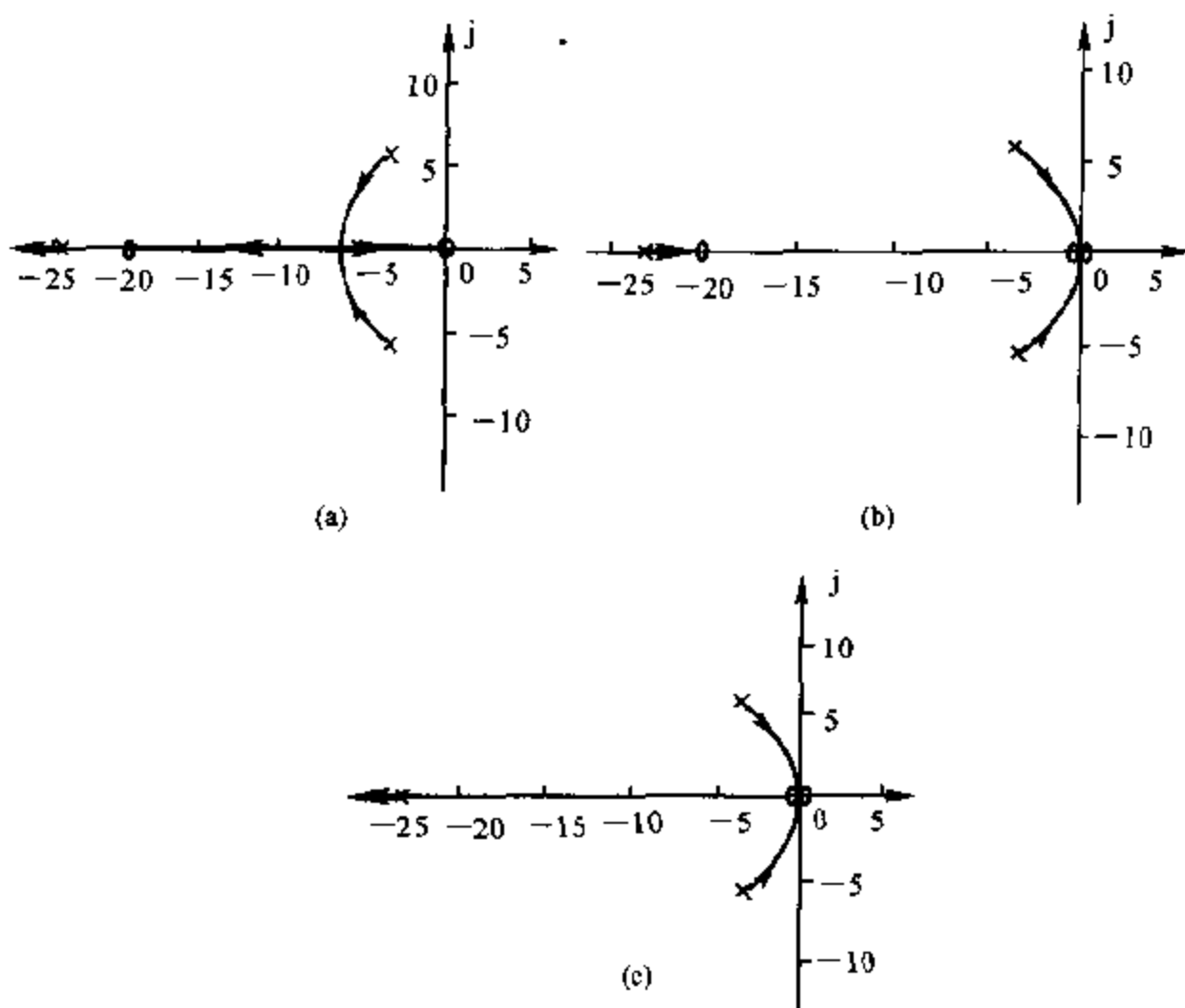
对应等效开环传递函数为

$$G^*(s) = \frac{10G_c(s)(s+20)}{s^3 + 30s^2 + 200s + 1\,000}$$

(1)  $G_c(s) = K_1s$  时

$$G^*(s) = \frac{10K_1s(s+20)}{s^3 + 30s^2 + 200s + 1\,000} = \frac{10K_1s(s+20)}{(s+23.25)(s+3.375+j5.625)(s+3.375-j5.625)}$$

绘制根轨迹如图解 4.4.20(a) 所示; 改变  $K_1$ , 可使主导极点  $\lambda_{1,2}$  处于  $\beta = 45^\circ$ ,  $\zeta = 0.707$  的性能最佳处。



图解 4.4.20

(2)  $G_c(s) = K_s s^2$  时

$$G^*(s) = \frac{10K_s s^2 (s+20)}{(s+23.25)(s+3.375+j5.625)(s+3.375-j5.625)}$$

绘制根轨迹如图解 4.4.20(b) 所示,  $K_s \uparrow$  时, 根轨迹越靠近虚轴, 稳定性变差。

(3)  $G(s) = \frac{K_s s^2}{s+20}$  时

$$G^*(s) = \frac{10K_s s^2}{(s+23.25)(s+3.375+j5.625)(s+3.375-j5.625)}$$

根轨迹如图解 4.4.20(c) 所示。

### 讨论

① 不论选择  $G_c(s)$  为哪一种, 均不改变系统型别, 故稳态误差相同。

② 对于  $G_c(s) = K_s s$  时, 可调整  $K_s$  使系统主导极点处于动态性能最佳位置, 而对于后两种情况,  $K_s \uparrow$ , 稳定性都差于第一种情况, 且在  $K_s = 0$  时, 主导

复数极点与实轴夹角

$$\theta = \arctan \frac{5.625}{3.375} \approx 73.47^\circ > 45^\circ$$

当  $K \uparrow$  时,  $\theta \uparrow$ , 故不可能使主导极点处于最佳位置。所以选择第一种情况为好。

4.4.21 设系统如图 4.4.32 所示。试作闭环系统根轨迹, 并分析  $K$  值变化对系统在阶跃扰动作用下响应  $c(t)$  的影响。

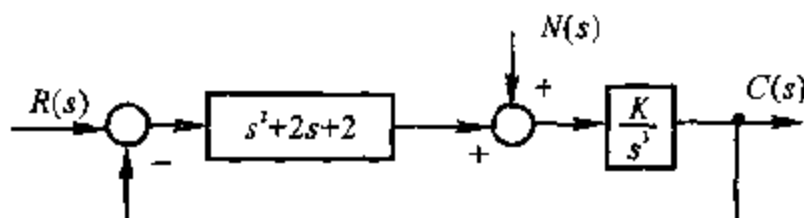


图 4.4.32 控制系统

解

$$n(t) = 1(t), \quad N(s) = \frac{1}{s}$$

在  $n(t)$  作用下, 系统闭环传递函数为

$$\Phi_o(s) = \frac{K}{s^3 + K(s^2 + 2s + 2)}$$

$$D(s) = s^3 + K(s^2 + 2s + 2)$$

等效开环传递函数为

$$G^*(s) = \frac{K(s^2 + 2s + 2)}{s^3} = \frac{K(s+1+j1)(s+1-j1)}{s^3}$$

根轨迹如图解 4.4.21 所示。

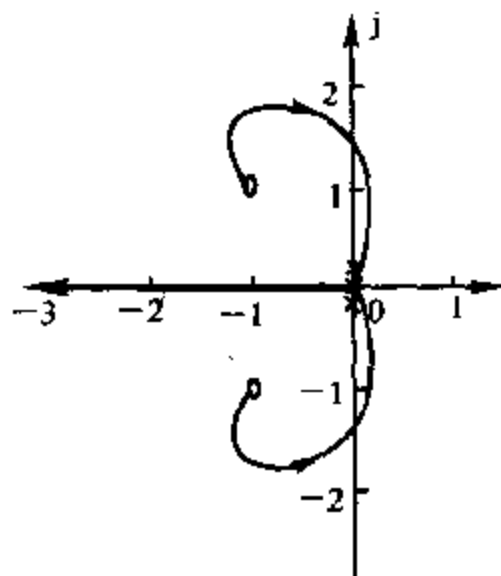
根轨迹与虚轴交点:

将  $s = j\omega$  代入  $D(s) = 0$ , 令其实部、虚部分别为零, 有

$$\begin{cases} \operatorname{Re}[D(j\omega)] = -K\omega^2 + 2K = 0 \\ \operatorname{Im}[D(j\omega)] = -\omega^3 + 2K\omega = 0 \end{cases}$$

解得  $\omega = \pm\sqrt{2}$ ,  $K = 1$

当  $K > 1$  时系统稳定, 当  $0 < K < 1$  时系统不稳定;  $K \uparrow$ ,  $\zeta \uparrow$ , 稳定性变好, 当  $K \rightarrow \infty$  时,  $\zeta \rightarrow 0.707$  ( $\beta \rightarrow 45^\circ$ ),  $c(t)$  振荡性减小, 快速性得以改善。



图解 4.4.21



## 第5章 线性系统的频域分析法

---

### 5.1 重点内容提要

#### 5.1.1 频率特性

频率特性是指线性系统或环节,在正弦信号作用下,其稳态输出与输入的幅值比、相角差对频率的关系。输出振幅与输入信号的振幅之比  $A(\omega)$  称为幅频特性,输出相位与输入信号的相位之差  $\varphi(\omega)$  称为相频特性。

频率特性与传递函数的关系是:

$$G(j\omega) = G(s) \Big|_{s=j\omega}$$

#### 5.1.2 频率特性的几何表示

##### 1. 幅相频率特性曲线

又称奈奎斯特(Nyquist)曲线或极坐标图。它是以  $\omega$  为参变量,以复平面上的矢量表示  $G(j\omega)$  的一种方法。

##### 2. 对数频率特性曲线

又称伯德(Bode)图。用对数幅频特性和对数相频特性表示频率特性。横坐标为  $\omega$ ,按常用对数  $\lg \omega$  分度。对数幅频特性的纵坐标为  $L(\omega) = 20\lg A(\omega)$ ,单位为分贝(dB);而对数相频特性的纵坐标表示  $\varphi(\omega)$ ,单位为度( $^\circ$ )。

##### 3. 对数幅相频率特性曲线

又称尼柯尔斯(Nichols)曲线。该方法是以  $\omega$  为参变量,  $\varphi(\omega)$  为横坐标,  $L(\omega)$  为纵坐标,把  $\varphi(\omega)$  和  $L(\omega)$  表示在一张图上。

#### 5.1.3 频率特性的绘制

##### 1. 典型环节的频率特性

表 5.1.1 给出了各典型环节的频率特性及图形表示。

## 2. 开环系统频率特性的绘制

系统的开环传递函数  $G_K(s)$  可看做是由各典型环节  $G_1(s), G_2(s), \dots, G_l(s)$  串联组成, 即

$$G_K(s) = G(s)H(s) = G_1(s)G_2(s)\cdots G_l(s)$$

若将  $s = j\omega$  代入, 则得系统的开环频率特性为

$$G_K(j\omega) = G_1(j\omega)G_2(j\omega)\cdots G_l(j\omega) =$$

$$\prod_{i=1}^l |G_i(j\omega)| e^{j\sum_{i=1}^l \varphi_i(\omega)}$$

由此可得开环系统的幅频特性和相频特性分别为

$$A(\omega) = |G_K(j\omega)| = \prod_{i=1}^l |G_i(j\omega)|$$

$$\varphi(\omega) = \sum_{i=1}^l \varphi_i(\omega)$$

上式表明开环系统的幅频特性等于各典型环节幅频特性之积, 开环系统的相频特性等于各典型环节相频特性之和。

(1) 开环系统幅相特性曲线(Nyquist图)绘制。方法: 当  $\omega$  从  $0 \rightarrow \infty$  变化时, 可由幅频和相频特性公式分别计算出各点所对应的  $|G_K(j\omega)|$  和  $\varphi(\omega)$ 。在复数平面逐点描绘, 可以画出开环系统的幅相特性曲线。但是这种方法计算麻烦, 一般不太用, 实际中常采用概略绘图的方法。

概略绘图法: 即由某些特殊点的幅相特性(如:  $\omega = 0$  起点,  $\omega = \infty$  终点,  $\omega = \frac{1}{T}$  转折频率及过负实轴的点)来绘制开环系统的幅相特性曲线。

可以分两种情况来讨论(设  $n > m$ ):

1) 0 型系统(即  $v = 0$ ) 幅相特性曲线的绘制:

起点( $\omega = 0$ ): 在实轴上( $K, j0$ ) 点,  $\varphi(0) = 0$ ;

终点( $\omega = \infty$ ): 终止于原点, 是沿  $\varphi(\infty) = (m - n) \times \frac{\pi}{2}$  方向趋于原点( $m, n$  分别为开环系统的零、极点数)。

说明: 当  $\omega$  从  $0 \rightarrow \infty$  变化过程中, 若  $m = 0$ , 则曲线平滑; 若  $m \neq 0$ , 则曲线可能呈现凹凸状。

2) 非 0 型系统(即  $v \neq 0$ ) 幅相特性曲线的绘制:

起点( $\omega = 0^+$ ): 起于无穷远处, 其幅值  $|G_K(j0^+)| = \infty$ , 相位  $\varphi(0^+) = v(-\frac{\pi}{2})$ ;

终点( $\omega = \infty$ ): 终止于原点, 即沿  $\varphi(\infty) = (m-n) \times \frac{\pi}{2}$  方向趋于原点。

说明: 同 0 型系统的说明。

(2) 开环系统对数频率特性曲线(Bode 图) 绘制。由幅、相频率特性公式可得开环系统对数幅频和对数相频特性分别为

$$L(\omega) = 20\lg |G_K(j\omega)| = \sum_{i=1}^l 20\lg |G_i(j\omega)|$$

$$\varphi(\omega) = \sum_{i=1}^l \varphi_i(\omega)$$

因此, 只要知道各典型环节的对数频率特性, 就很容易用叠加的办法求出开环系统的对数频率特性。(在此介绍 Bode 图的近似作图方法, 即以折线代替曲线。)

画 Bode 图步骤:

1) 首先将开环传递函数  $G_K(s)$  写成尾 1 标准形式(典型环节), 然后求出各环节的转折频率, 从小到大依次标在  $\omega$  轴上。

2) 画起始段(这是画 Bode 图的关键一步)。起始段是第一个转折频率之前的频率特性曲线, 它取决于系统的型别  $v$  和开环增益  $K$ 。在  $\omega = 1$ , 高度为  $20\lg K$  的点处, 作斜率等于  $v(-20)$  dB/dec 的直线(若  $v = 0$ , 作高度为  $20\lg K$  的水平线), 该直线和零分贝线的交点频率等于  $K^{\frac{1}{v}}$ ;

3) 从第一个转折频率开始沿  $\omega$  轴向右, 每经过一个转折频率, 对数幅频曲线  $L(\omega)$  的斜率变更一次。若为惯性环节, 斜率变更  $-20$  dB/dec, 为振荡环节时, 斜率变更  $-40$  dB/dec…… 以此类推;

4) 如果振荡环节的阻尼比  $\zeta$  不在  $0.38 \sim 0.71$  范围内时, 需对  $L(\omega)$  进行修正; 若两个惯性环节的转折频率离得很近, 则也应修正  $L(\omega)$ 。

对数相频特性曲线  $\varphi(\omega)$  的绘制, 只要将各典型环节的  $\varphi_i(\omega)$  相频特性叠加即可获得。

开环系统 Bode 图与开环传递函数是一一对应的, 两者可以相互确定。

### 5.1.4 稳定判据与稳定裕度

#### 1. 奈奎斯特稳定判据

该判据利用系统的开环幅相特性曲线判断闭环系统的稳定性。其内容为：闭环系统稳定的充要条件是

$$Z - P - 2N = 0$$

式中  $Z$  —— 闭环系统在右半  $s$  平面的极点数；

$P$  —— 开环系统在右半  $s$  平面的极点数；

$N$  —— 当  $\omega$  从 0 到  $\infty$  变化时开环幅相特性曲线围绕  $(-1, j0)$  点转过的圈数(以逆时针方向为正)。

说明：当开环系统含有积分环节时，上式不变，只需将幅相特性曲线相应频率，从  $\omega = 0$  到  $\omega = 0^+$  顺时针补充半径为  $\infty$ ，角度为  $\nu \times \frac{\pi}{2}$  的大圆弧。

## 2. 对数稳定判据

对数稳定判据是基于开环对数频率特性曲线判断闭环系统稳定性的一种方法，与奈奎斯特判据本质上是一样的。在确定  $N$  时，对数稳定判据采用下面公式

$$N = N^+ - N^-$$

式中  $N^+$  —— 正穿越次数。在  $L(\omega) > 0$  dB 的频段范围内，随  $\omega$  增加， $\varphi(\omega)$  按增大的方向(自下而上)穿越  $-180^\circ$  线为一次正穿越，用  $N^+ = 1$  表示；离开或终止于  $-180^\circ$  的正穿越为半次正穿越，用  $N^+ = \frac{1}{2}$  表示。

$N^-$  —— 负穿越次数。在  $L(\omega) > 0$  dB 的频段范围内，随  $\omega$  增加， $\varphi(\omega)$  按减小的方向(自上而下)穿越  $-180^\circ$  线为一次负穿越，用  $N^- = 1$  表示；离开或终止于  $-180^\circ$  的负穿越为半次负穿越，用  $N^- = \frac{1}{2}$  表示。

## 3. 稳定裕度

稳定裕度表征一个闭环系统的稳定程度，包括相角裕度  $\gamma$  和幅值裕度  $h$ ，分别定义为

$$\text{相角裕度} \quad \gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_c)$$

式中， $\omega_c$  为截止频率，是  $L(\omega)$  与 0 dB 线相交处的频率，也是幅相曲线  $G(j\omega)$  与单位圆交点处的频率。

$$\text{幅值裕度} \quad h = \frac{1}{|G_h(j\omega_g)|}$$

或  $h_{dB} = 20 \lg h = -20 \lg |G_K(j\omega_c)|$

式中,  $\omega_c$  为相角交界频率, 是  $\varphi(\omega)$  与  $-180^\circ$  线交点处的频率。

图 5.1.1 给出了稳定裕度的图形表示。

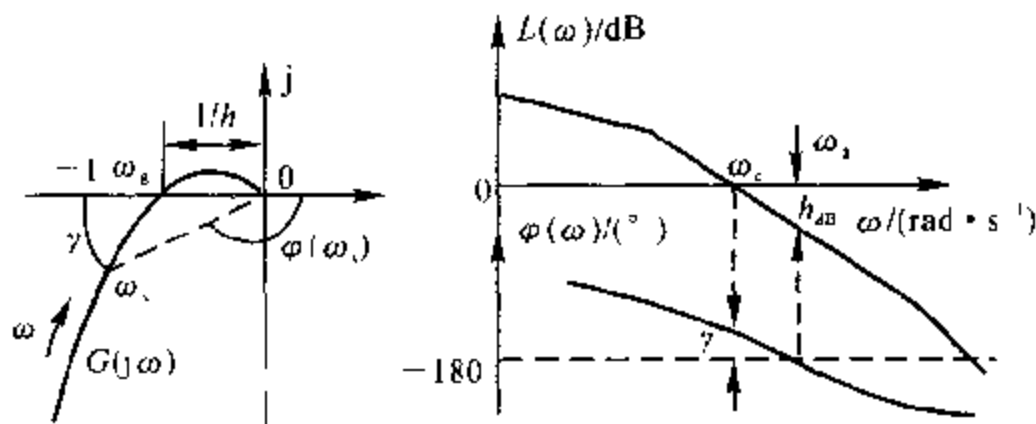


图 5.1.1 稳定裕度的图形表示

### 5.1.5 频域性能指标与时域动态性能指标的关系

#### 1. 典型二阶系统频域指标与时域指标的关系

$\zeta$  与  $\gamma$  或  $M_r$  的关系

$$\gamma = \arctan \frac{\zeta}{\sqrt{\sqrt{4\zeta^4 + 1} - 2\zeta^2}}$$

$$M_r = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

$\omega_n$  与  $\omega_c$  或  $\omega_b$  的关系

$$\omega_c = \omega_n \sqrt{\sqrt{1 - 4\zeta^2} - 2\zeta^2}$$

$$\omega_b = \omega_n \sqrt{(1 - 2\zeta^2) + \sqrt{2 - 4\zeta^2 + 4\zeta^4}}$$

另外,  $\omega_n$  也可以从开环对数幅频曲线,  $-40 \text{ dB/dec}$  (或其延长线) 与零分贝

线交点的频率获得, 即  $\omega_n = \sqrt{\frac{K}{T}}$ 。

#### 2. 高阶系统频域指标与时域指标之间的近似关系

$$\sigma = 0.16 + 0.4 \left( \frac{1}{\sin \gamma} - 1 \right), \quad 35^\circ \leq \gamma \leq 90^\circ$$

$$t_s = \frac{\pi}{\omega_c} \left[ 2 + 1.5 \left( \frac{1}{\sin \gamma} - 1 \right) + 2.5 \left( \frac{1}{\sin \gamma} - 1 \right)^2 \right]$$

### 3. 闭环频域指标与时域指标的关系

#### (1) 闭环频域指标:

1) 谐振峰值  $M_r$ , 是闭环幅频特性的最大值。峰值大, 意味着阻尼比小, 平稳性差。对应  $M_r$  的频率  $\omega_r$  为谐振频率。

2) 带宽频率  $\omega_b$ , 是指闭环幅频特性  $M(\omega)$  的数值衰减到  $0.707M_0$  时所对应的频率。 $\omega_b$  高, 表示系统的快速性好。

3) 零频值  $M_0$ , 是指频率等于零时的闭环幅值, 即  $M_0 = 20\lg |\Phi(j0)|$ 。

#### (2) 闭环频域指标与时域指标的关系:

$$\sigma\% = \left\{ 41 \ln \left[ \frac{M_r M(\frac{\omega_c}{4})}{M_0^2} \frac{\omega_b}{\omega_{0.5}} \right] + 17 \right\} \%$$

$$t_s = \left( 13.6 \frac{M_r \omega_b}{M_0 \omega_{0.5}} - 2.51 \right) \frac{1}{\omega_{c, L}} \quad (s)$$

式中,  $\omega_{0.5}$  为  $M(\omega)$  衰减至  $0.5M_0$  处的角频率。

**说明** 闭环频域指标可从尼柯尔斯图线求得, 也可以从闭环频率特性曲线得到。

## 5.1.6 三频段与系统性能的关系

三频段是指开环系统对数幅频特性曲线的低、中、高频区段, 如图 5.1.2 所示<sup>①</sup>。

(1) 低频段与系统稳态性能的关系。低频段通常是指开环对数幅频曲线在第一个转折频率之前的频段。这一段的特性由系统型别  $v$  和开环增益  $K$  决定 ( $v$  和  $K$  的求解见开环系统对数频率特性曲线画 Bode 图步骤 2)。因此, 当给定输入后, 根据  $L(\omega)$  低频段的形状, 就可用静态误差系数法求得系统的稳态误差  $e_{ss}$ 。

(2) 中频段与系统动态性能及稳定性的关系。中频段是指开环对数幅频曲线在截止频率  $\omega_c$  附近的区段。这段特性主要反映了闭环系统动态性能的信息。

希望  $L(\omega)$  在中频段的斜率为  $-20 \text{ dB/dec}$ , 并且占据较宽的频带, 此时系统将具有较大的相角裕度  $\gamma$ , 动态过程的  $\sigma\%$  小。 $\omega_c$  愈大, 系统的调节时间  $t_s$  愈短, 快速性愈好。

<sup>①</sup> 图中  $L(\omega)$  各线段斜率的单位为  $(\text{dB/dec})$ , 在以后出现的 Bode 图中均不标出。

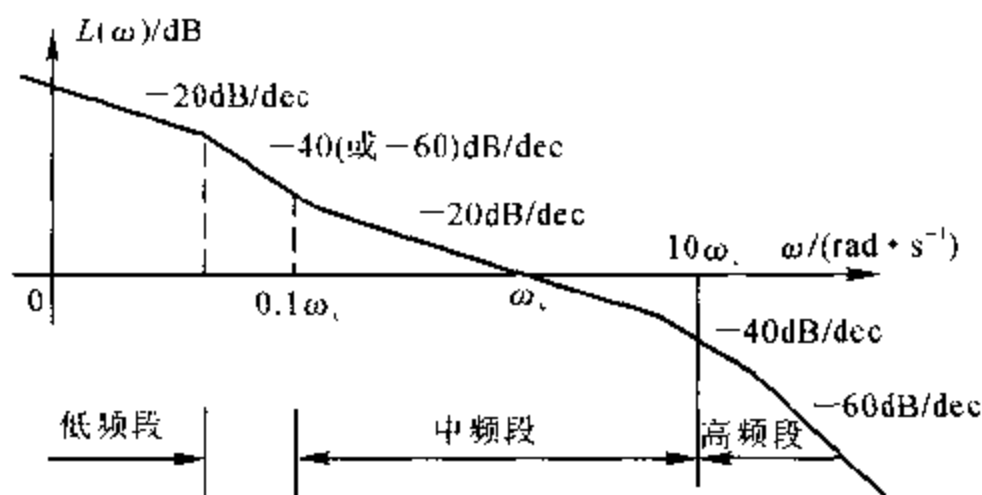


图 5.1.2 三频段

(3) 高频段与系统的抗干扰能力。高频段是指开环对数幅频曲线在中频段以后的区段。由于这一段的  $L_K(\omega) \ll 0$ , 即

$$|G_K(j\omega)| \ll 1$$

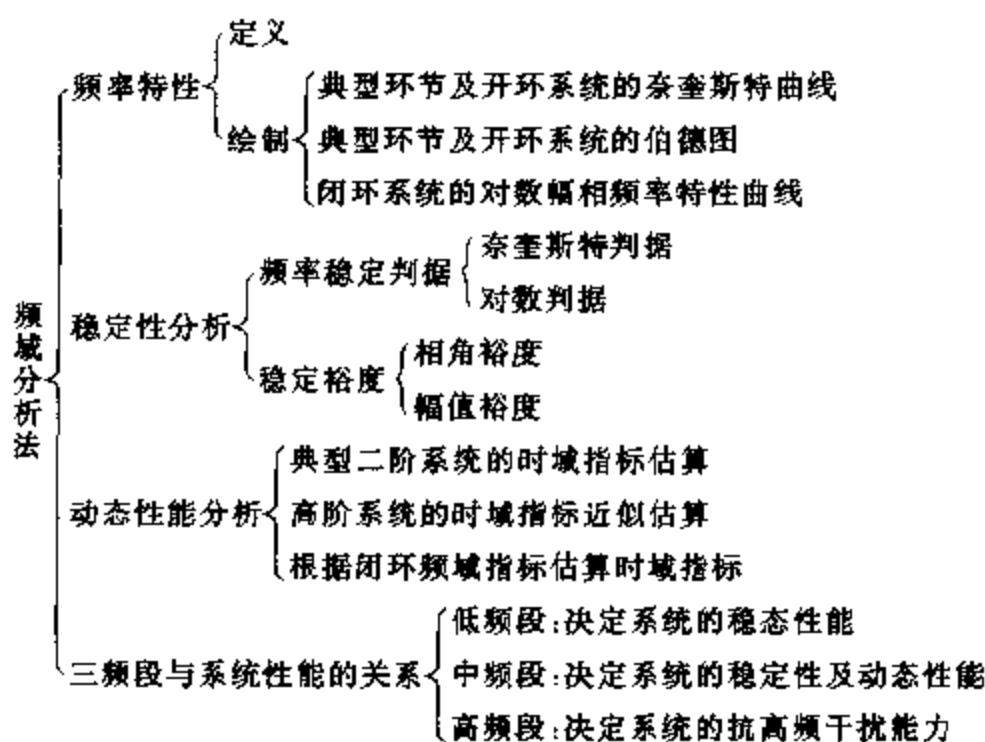
故对单位反馈系统, 有

$$|\Phi(j\omega)| = \frac{|G_K(j\omega)|}{|1 + G_K(j\omega)|} \approx |G_K(j\omega)|$$

闭环幅频近似等于开环幅频, 因此系统开环对数幅频特性在高频段的幅值, 直接反映了系统对输入端高频干扰信号的抑制能力。所以, 高频段的分贝值愈低, 系统的抗高频干扰能力愈强。

**说明** 二个频段的划分界限并没有严格的规定, 三频段理论也没有给出具体的设计指标, 但是三频段的概念为直接运用开环频率特性判别、估算系统的性能和设计控制系统指出了原则和方向。

## 5.2 知识结构图



## 5.3 考点及典型题选解

本章考点:应用频率特性计算系统的稳态响应;绘制开环系统的奈奎斯特曲线和伯德图,并由此判断闭环系统的稳定性;计算系统的相角裕度和幅值裕度;根据最小相位系统的对数幅频特性曲线,确定系统的传递函数;根据系统的频域指标估算时域动态性能。

### 5.3.1 典型题

1. 某 I 型单位反馈的典型欠阻尼二阶系统,输入正弦信号  $r(t) = \sin \omega t$ , 当调整频率  $\omega = 7.07 \text{ rad/s}$  时,系统稳态输出幅值达到最大值 1.154 7。

- (1) 求系统的动态指标 ( $\sigma\%$ ,  $t_s$ );
- (2) 求系统的截止频率和相角裕度;
- (3) 计算系统的速度稳态误差。

2. 已知最小相位系统的对数幅频特性如图 5.3.1 所示,试写出对应的传递



函数并概略绘制幅相特性曲线。

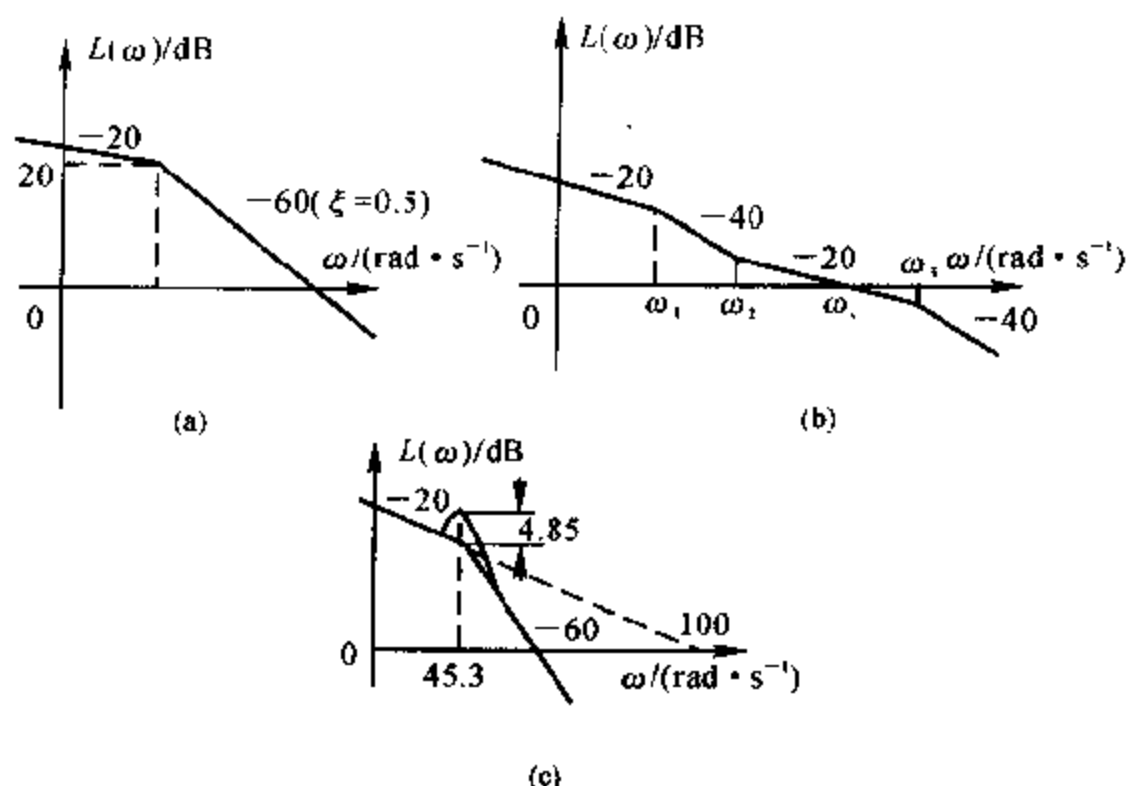


图 5.3.1 对数幅频特性

3. 已知  $G(s) = \frac{K(T_3s+1)}{s^2(T_1s+1)(T_2s+1)}$ , 试用奈奎斯特判据判断闭环系统的稳定性。

稳定性。

4. 某单位反馈系统有一个开环极点位于复平面  $s$  的右半部, 其余的开环零、极点均位于复平面的左半部。当系统的开环放大系数取  $K=1$  时, 其开环奈奎斯特曲线  $G(j\omega)$  如图 5.3.2 所示。

(1) 判断闭环系统的稳定性;

(2) 试确定使闭环系统稳定时, 开环放大系数  $K$  的取值范围 ( $K > 0$ )。

5. 已知开环系统传递函数

$$G(s) = \frac{K}{s(0.1s+1)(0.2s+1)(s+1)}$$

试求: (1)  $K=1$  时, 系统的幅值裕度和相角裕度;

(2) 闭环临界稳定时的开环增益;

(3) 在 (1) 的  $K$  值下, 如果开环传递函数中增加一个延迟时间  $\tau = 0.6 \text{ min}$  的延迟环节, 问系统是否稳定; 若使系统稳定, 延迟时间应不大于多少?

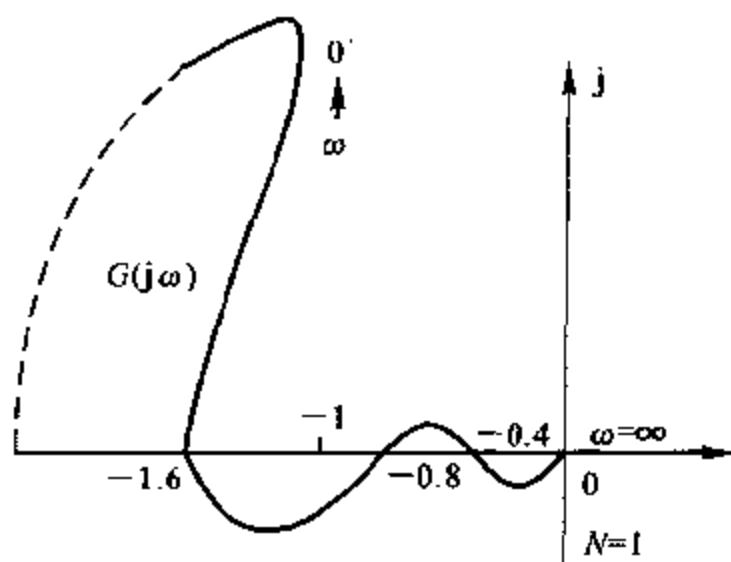


图 5.3.2 奈奎斯特曲线

6. 已知系统的开环对数频率特性如图 5.3.3 所示。

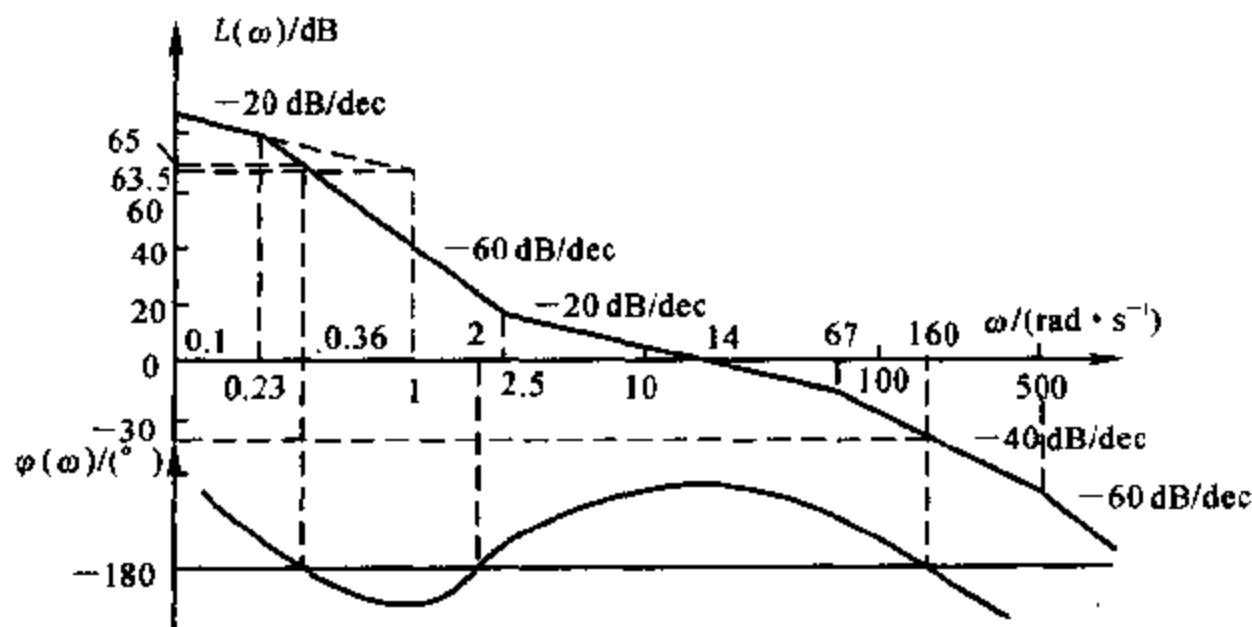


图 5.3.3 开环对数频率特性

- (1) 写出系统开环传递函数  $G(s)$  表示式；
- (2) 试分析系统的稳定性，并确定系统的相角裕度  $\gamma$  和幅值裕度  $h$ ；
- (3) 当开环增益  $K = 0 \rightarrow \infty$  变化时，系统稳定性有何变化；
- (4) 大致画出系统的闭环根轨迹。

7. 单位反馈系统的闭环渐近对数幅频特性如图 5.3.4 所示，要求系统具有

$30^\circ$  的相角裕量, 试计算开环增益应增大多少倍?

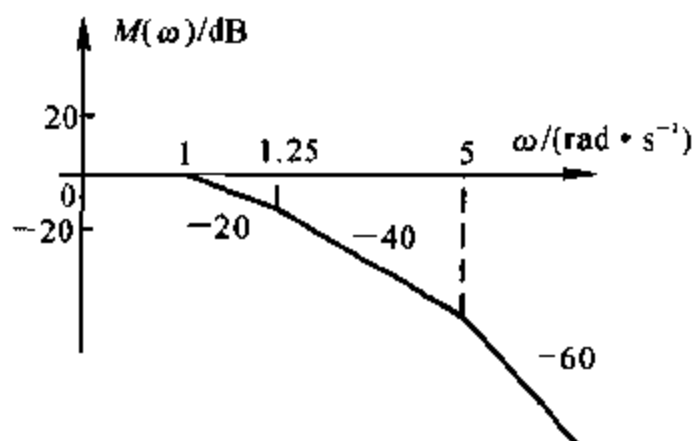


图 5.3.4 对数幅频特性

8. 已知某单位反馈系统结构图如图 5.3.5(a) 所示, 其单位阶跃响应曲线如图 5.3.5(b) 所示, 试确定开环增益  $K$  和时间常数  $T_1, T_2$ 。

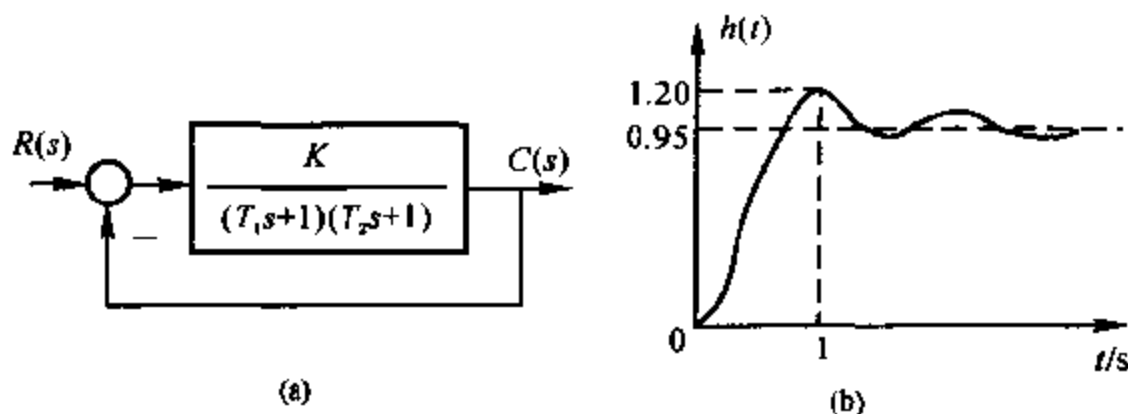


图 5.3.5 结构图及单位响应曲线

9. 已知某单位负反馈的最小相位系统, 有开环极点  $-40$  和  $-10$ , 且当开环增益  $K = 25$  时系统开环幅相频率特性  $G(j\omega)$  曲线如图 5.3.6 所示。

(1) 试写出开环传递函数  $G(s)$  的表达式;

(2) 做出其对数幅频特性渐近线  $L(\omega)$ , 求系统开环截止角频率  $\omega_c$ ;

(3) 能否调整开环增益  $K$  值, 使系统在给定输入信号  $r(t) = 1 + t$  作用下稳态误差  $e_{ss} \leq 0.01$ ?

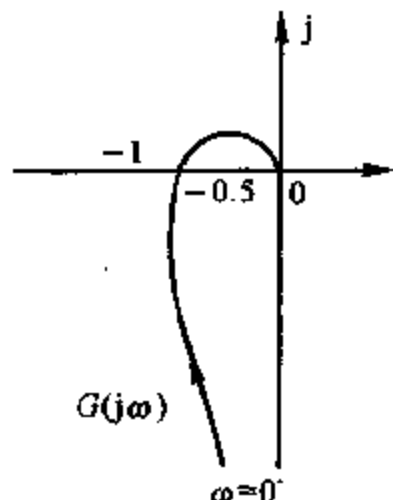


图 5.3.6 开环幅相曲线

## 5.3.2 典型题解析

$$1. \text{ 由 } \begin{cases} \omega_r = \omega_n \sqrt{1-2\zeta^2} = 0.707 \\ M_r = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1-\zeta^2}} = 1.1547 \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} \zeta = 0.5 \\ \omega_n = 10 \end{cases}$$

$$(1) \sigma\% = 16.3\%, \quad t_s = 0.7 \text{ s}$$

$$(2) G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)} = \frac{100}{s(s+10)} = \frac{10}{s\left(\frac{1}{10}s+1\right)} \rightarrow \omega_c = 10 \text{ rad/s}$$

$$\gamma = 45^\circ$$

$$(3) e_{ss} = \frac{1}{K} = 0.1$$

$$2. (a) G(s) = \frac{K}{s(T^2s^2 + 2\zeta Ts + 1)} = \frac{10}{s(s^2 + s + 1)}$$

$$(b) G(s) = \frac{K\left(\frac{s}{\omega_2} + 1\right)}{s\left(\frac{s}{\omega_1} + 1\right)\left(\frac{s}{\omega_3} + 1\right)}, \text{ 式中 } K = \frac{\omega_2\omega_c}{\omega_1}$$

$$(c) G(s) = \frac{K}{s(T^2s^2 + 2\zeta Ts + 1)}, \text{ 式中 } \begin{cases} K = 100 \\ 20\lg M_r = 4.85 \text{ dB} \\ \omega_r = 45.3 \text{ rad/s} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \zeta = 0.3 \\ T = \frac{1}{50} \end{cases}$$

$$3. G(j\omega) =$$

$$K \frac{T_1 T_2 \omega^4 - \omega^2 - (T_1 + T_2) T \omega^4 + j[(T_1 + T_2) \omega^3 + (T_1 T_2 \omega^2 - 1) T_3 \omega^3]}{(T_1 T_2 \omega^2 - 1)^2 \omega^3 + (T_1 + T_2)^2 \omega^6} =$$

$$U(\omega) + jV(\omega)$$

奈奎斯特曲线如图解 5.3.3 所示。

由图解 5.3.3 可知, 只有当  $T_3 > T_1 + T_2$ , 且  $|G(j\omega_g)| = |U(\omega_g)| < 1$  时闭环系统稳定。

$$4. (1) \text{ 因为 } P = 1, N = N^+ - N^- = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ 故 } Z = P - 2N = 0, \text{ 即闭}$$

环系统稳定。

$$(2) 0.625 < K < 1.25 \text{ 和 } 2.5 < K < \infty \text{ 时闭环系统稳定}$$

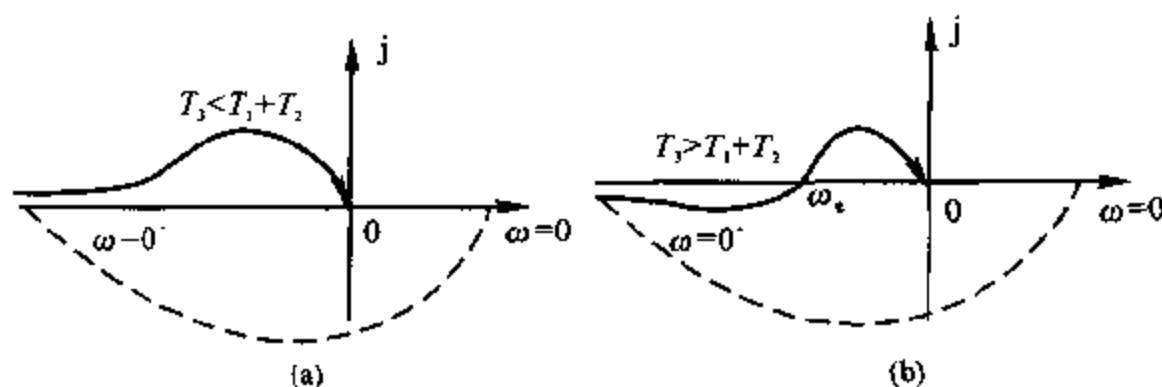


图 解 5.3.3

5. (1) 因  $\varphi(\omega_g) = -180^\circ \rightarrow \omega_g = 1.77 \text{ rad/s}$ , 故

$$h_{dB} = -20 \lg |G(j\omega_g)| \approx 10 \text{ dB}$$

又有  $K = 1$  时,  $\omega_c = 1 \text{ rad/s}$ , 所以

$$\gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_c) = 28^\circ$$

(2) 因

$$20 \lg K = 10 \text{ dB}$$

得到

$$K = 3.2$$

(3) 因为

$$-57.3^\circ \times 1 \times r = 28^\circ$$

所以

$$r \approx 0.5 \text{ min}$$

$$6. (1) \quad G(s) = \frac{1500 \left( \frac{s}{2.5} + 1 \right)^2}{s \left( \frac{s}{0.23} + 1 \right)^2 \left( \frac{s}{67} + 1 \right) \left( \frac{s}{500} + 1 \right)}$$

(2) 闭环稳定,  $\gamma = 58.23^\circ$ ,  $h_{dB} = 30 \text{ dB}$

(3)  $0 < K < 0.8435$  和  $150 < K < 47434$  稳定

$0.8435 < K < 150$  和  $47434 < K < \infty$  不稳定

(4) 略

7. 由图 5.3.4 可得系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{1}{(s+1) \left( \frac{s}{1.25} + 1 \right) \left( \frac{s}{5} + 1 \right)}$$

则系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{\Phi(s)}{1 - \Phi(s)} = \frac{0.5}{s \left( \frac{s}{2.825} + 1 \right) \left( \frac{s}{4.423} + 1 \right)}$$

又因

$$\gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_c) = 30^\circ$$

所以

$$\omega_c = 2.015 < 2.825$$

故有

$$\frac{0.5K}{\omega_c} = 1$$

即

$$K = 4.03$$

8. 由图 5.3.5(b) 可知

$$\text{由 } e_{ss} = r(t) - h(\infty) = 1 - 0.95 = 0.05 = \frac{1}{1+K}$$

得到

$$K = 19$$

由

$$\sigma\% = \frac{1.2 - 0.95}{0.95} \times 100\% = 26.3\%$$

得到

$$\zeta = 0.391$$

由

$$t_p = 1$$

得到

$$\omega_n = 3.4133$$

由图 5.3.5(a) 可知

$$G(s) = \frac{K}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$$

则

$$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{\frac{K}{T_1T_2}}{s^2 + \frac{T_1+T_2}{T_1T_2}s + \frac{1+K}{T_1T_2}}$$

因

$$\begin{cases} \frac{1+K}{T_1T_2} = \omega_n^2 \\ \frac{T_1+T_2}{T_1T_2} = 2\zeta\omega_n \end{cases}$$

故解得

$$\begin{cases} K = 19 \\ T_1 = 4.17 \\ T_2 = 0.4116 \end{cases}$$

9. (1)

$$G(s) = \frac{25}{s\left(\frac{s}{40} + 1\right)\left(\frac{s}{10} + 1\right)}$$

(2)

$$\omega_c = 15.8$$

则

$$\gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_c) = 10.7^\circ$$

$$h = \frac{1}{|G(j\omega_g)|} = \frac{1}{0.5} = 2$$

(3) 当  $K \geq 100$  时可实现所提要求。

## 5.4 课后习题全解

**5.4.1** 设系统闭环稳定, 闭环传递函数为  $\Phi(s)$ , 试根据频率特性的定义证明, 输入为余弦函数  $r(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$  时, 系统稳态输出为

$$c_{ss}(t) = A |\Phi(j\omega)| \cos[\omega t + \varphi + \angle\Phi(j\omega)]$$

**证明**  $r(t) = A\cos(\omega t - \varphi) = A(\cos\omega t \cos\varphi - \sin\omega t \sin\varphi)$

取拉氏变换可得

$$R(s) = A\left(\frac{s\cos\varphi}{s^2 + \omega^2} - \frac{\omega\sin\varphi}{s^2 + \omega^2}\right) = A \frac{s\cos\varphi - \omega\sin\varphi}{s^2 + \omega^2}$$

因为闭环稳定, 假设  $\Phi(s)$  的闭环极点均具有互异的负实根, 所以可将  $\Phi(s)$  写成如下形式

$$\Phi(s) = \frac{M(s)}{(s + s_1)(s + s_2)\cdots(s + s_n)}$$

又有  $c(s) = \Phi(s)R(s) = \frac{M(s)}{(s + s_1)(s + s_2)\cdots(s + s_n)} \cdot A \cdot \frac{s\cos\varphi - \omega\sin\varphi}{s^2 + \omega^2} =$

$$\sum_{i=1}^n \frac{D_i}{s + s_i} - \frac{B_1}{s + j\omega} + \frac{B_2}{s - j\omega}$$

式中  $B_1, B_2, D_i (i = 1, \cdots, n)$  为待定系数。

对上式取拉氏反变换得

$$c(t) = \sum_{i=1}^n D_i e^{-s_i t} + B_1 e^{-j\omega t} + B_2 e^{j\omega t}$$

当  $t \rightarrow \infty$  时, 系统的稳态输出为

$$c_{ss}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = B_1 e^{-j\omega t} + B_2 e^{j\omega t}$$

求待定系数  $B_1$  和  $B_2$ :

$$B_1 = \lim_{s \rightarrow -j\omega} A\Phi(s) \frac{s\cos\varphi - \omega\sin\varphi}{s - j\omega} = A\Phi(-j\omega) \left( \frac{\cos\varphi}{2} + \frac{\sin\varphi}{2j} \right) =$$

$$A |\Phi(j\omega)| e^{-j\angle\Phi(j\omega)} \left( \frac{\cos\varphi}{2} + \frac{\sin\varphi}{2j} \right)$$

同理得

$$B_2 = A |\Phi(j\omega)| e^{j\angle\Phi(j\omega)} \left( \frac{\cos\varphi}{2} - \frac{\sin\varphi}{2j} \right)$$

将  $B_1, B_2$  代入  $c_{ss}(t)$  中, 则有

$$\begin{aligned}
 c_{ss}(t) &= A |\Phi(j\omega)| \left( \frac{\cos\varphi}{2} e^{-j[\omega t + \angle\Phi(j\omega)]} - \frac{\sin\varphi}{2j} e^{-j[\omega t + \angle\Phi(j\omega)]} + \right. \\
 &\quad \left. \frac{\cos\varphi}{2} e^{j[\omega t + \angle\Phi(j\omega)]} - \frac{\sin\varphi}{2j} e^{j[\omega t + \angle\Phi(j\omega)]} \right) = \\
 &= A |\Phi(j\omega)| \{ \cos\varphi \cos[\omega t + \angle\Phi(j\omega)] - \sin\varphi \sin[\omega t + \angle\Phi(j\omega)] \} = \\
 &= A |\Phi(j\omega)| \cos[\omega t + \varphi + \angle\Phi(j\omega)]
 \end{aligned}$$

#### 5.4.2 若系统单位阶跃响应

$$h(t) = 1 - 1.8e^{-4t} + 0.8e^{-9t}$$

试确定系统的频率特性。

解 系统的脉冲响应为

$$k(t) = \frac{dh(t)}{dt} = 4 \times 1.8e^{-4t} - 9 \times 0.8e^{-9t} = 7.2e^{-4t} - 7.8e^{-9t}$$

可得系统的传递函数为

$$\Phi(s) = L^{-1}[k(t)] = \frac{7.2}{s+4} - \frac{7.8}{s+9} = \frac{36}{(s+4)(s+9)}$$

则系统的频率特性为

$$\Phi(j\omega) = \frac{36}{(j\omega+4)(j\omega+9)}$$

#### 5.4.3 设系统结构图如图 5.4.49 所示,试确定输入信号

$$r(t) = \sin(t+30^\circ) - \cos(2t-45^\circ)$$

作用下,系统的稳态误差  $e_{ss}(t)$ 。

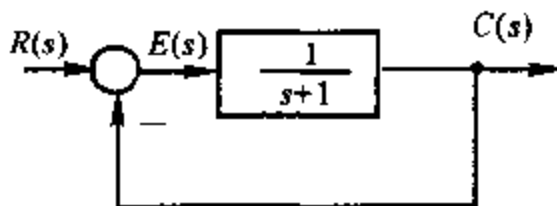


图 5.4.49 控制系统结构图

解 系统的误差传递函数为

$$\Phi_e(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{s+1}{s+2}$$

$$\text{则 } \Phi_e(j\omega) = \frac{j\omega+1}{j\omega+2} = \frac{j\omega+1}{j\omega+2} \cdot \frac{2-j\omega}{2-j\omega} = \frac{2-\omega^2}{4-\omega^2} + j \frac{\omega}{4+\omega^2}$$



$$|\Phi_c(j\omega)| = \sqrt{\frac{1+\omega^2}{4+\omega^2}}, \quad \varphi_c = \arctan \frac{\omega}{2+\omega^2}$$

当  $\omega = 1$  时,  $|\Phi_c(j1)| = \sqrt{\frac{2}{5}} = 0.63$

$$\varphi_{c1} = \arctan \frac{1}{3} = 18.4^\circ$$

当  $\omega = 2$  时,  $|\Phi_c(j2)| = \sqrt{\frac{5}{8}} = 0.79$

$$\varphi_{c2} = \arctan \frac{2}{6} = \arctan \frac{1}{3} = 18.4^\circ$$

所以有

$$e_{ss}(t) = |\Phi_c(j1)| \sin(t + 30^\circ + \varphi_{c1}) - |\Phi_c(j2)| \cos(2t - 45^\circ + \varphi_{c2}) = 0.63 \sin(t + 48.4^\circ) - 0.79 \cos(2t - 26.6^\circ)$$

#### 5.4.4 典型二阶系统的开环传递函数

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)}$$

当取  $r(t) = 2\sin t$  时, 系统的稳态输出

$$c_{ss}(t) = 2\sin(t - 45^\circ)$$

试确定系统参数  $\omega_n, \zeta$ 。

解 由题可知典型二阶系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

又知 
$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} = |\Phi(j\omega)| = 1 \\ \arctan \frac{2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} = \angle\Phi(j\omega) = -45^\circ \end{cases}$$

将  $\omega = 1$  代入并联立以上两式可解得

$$\zeta = 0.65, \quad \omega_n = 1.85$$

#### 5.4.5 已知系统开环传递函数

$$G(s)H(s) = \frac{K(\tau s + 1)}{s^2(Ts + 1)}, \quad K, \tau, T > 0$$

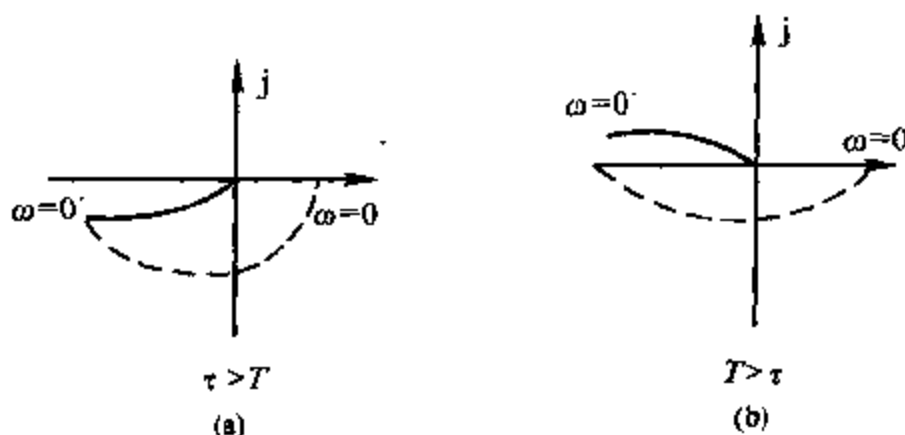
试分析并绘制  $\tau > T$  和  $T > \tau$  情况下的概略开环幅相曲线。

解 系统的开环频率特性为

$$GH(j\omega) = \frac{K(\tau j\omega + 1)}{(j\omega)^2(Tj\omega + 1)} = \frac{-K(1 + \tau T\omega^2) + jK\omega(T - \tau)}{\omega^2(1 + T^2\omega^2)}$$

为讨论方便起见,在此仅画出  $\omega = 0 \rightarrow +\infty$  的开环幅相曲线。如不特别说明以后各题都是如此。

因  $\nu = 2$ , 故  $\omega = 0 \rightarrow 0^+$  的部分为半径为无穷大的圆弧,如图解 5.4.5 中虚线所示。



图解 5.4.5

当  $\omega = 0^+$  时,  $GH(j0^+) = \infty$ ,  $\varphi(0^+) = -180^\circ$

当  $\omega = +\infty$  时,  $GH(j\infty) = 0$ ,  $\varphi(\infty) = -180^\circ$

显然,当  $\tau > T$  时,  $GH(j\omega)$  的实部和虚部始终为负,则开环幅相曲线不穿越负实轴,其曲线如图解 5.4.5(a) 所示;同理可绘出  $T > \tau$  时系统的开环幅相曲线如图解 5.4.5(b) 所示。

#### 5.4.6 已知系统开环传递函数

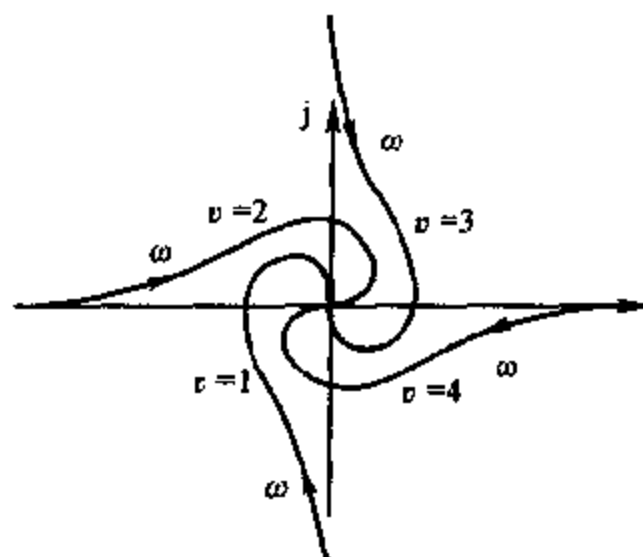
$$G(s)H(s) = \frac{1}{s^v(s+1)(s+2)}$$

试分别绘制  $\nu = 1, 2, 3, 4$  时系统的概略开环幅相曲线。

解 根据概略绘图的原则,可将  $\nu = 1, 2, 3, 4$  时开环幅相曲线的起点和终点位置列表如表解 5.4.6;同时考虑  $\omega = 0 \rightarrow 0^+$  时应补充半径为无穷大,相角为  $\nu \times (-90^\circ)$  的大圆弧。因此可绘出题目所要求的开环幅相曲线如图解 5.4.6 所示。

表解 5.4.6

$\nu$	$GH(j0^+)$	$\varphi(0^+)$	$GH(j(+\infty))$	$\varphi(+\infty)$
1	$\infty$	$-90^\circ$	0	$-270^\circ$
2	$\infty$	$-180^\circ$	0	$-360^\circ$
3	$\infty$	$-270^\circ$	0	$-420^\circ$
4	$\infty$	$-360^\circ$	0	$-540^\circ$



图解 5.4.6

 $\nu = 1, 2, 3, 4$  时系统开环概略幅相曲线

## 5.4.7 已知系统开环传递函数

$$G(s) = \frac{K(-T_2s+1)}{s(T_1s+1)}; \quad K, T_1, T_2 > 0$$

当取  $\omega = 1$  时,  $\angle G(j\omega) = -180^\circ$ ,  $|G(j\omega)| = 0.5$ 。当输入为单位速度信号时, 系统的稳态误差为 0.1, 试写出系统开环频率特性表达式  $G(j\omega)$ 。

解 当输入为单位速度信号时

$$e_{ss} = \frac{1}{K} = 0.1$$

所以

$$K = 10$$

$$\begin{aligned} \text{则 } G(s) &= \frac{10(-T_2s+1)}{s(T_1s+1)} \Big|_{s=j\omega} = \frac{10(1-jT_2)}{j(jT_1+1)} = \\ &= \frac{-10(T_1+T_2)}{1+T_1^2} + j \frac{10(T_1T_2-1)}{1+T_1^2} \end{aligned}$$

由题意可知

$$|G(j\omega)| = \sqrt{\left[\frac{-\omega(T_1 + T_2)}{1 + T_1^2}\right]^2 + \left[\frac{10(T_1 T_2 - 1)}{1 + T_1^2}\right]^2} = 10\sqrt{\frac{1 + T_2^2}{1 + T_1^2}} = 0.5$$

$$\angle G(j\omega) = \arctan \frac{\frac{10(T_1 T_2 - 1)}{1 + T_1^2}}{\frac{-10(T_1 + T_2)}{1 + T_1^2}} = \arctan \frac{T_1 T_2 - 1}{-(T_1 + T_2)} = -180^\circ$$

联立以上两式,可解得  $T_1 = 20, \quad T_2 = \frac{1}{20}$

所以有

$$G(s) = \frac{10(-T_2 s + 1)}{s(T_1 s + 1)} \Big|_{s=j\omega} = \frac{10(1 - j\omega T_2)}{j\omega(j\omega T_1 + 1)} = \frac{10\left(1 - j\frac{\omega}{20}\right)}{j\omega(j20\omega + 1)}$$

#### 5.4.8 已知系统开环传递函数

$$G(s)H(s) = \frac{10}{s(2s+1)(s^2+0.5s+1)}$$

试分别计算  $\omega = 0.5$  和  $\omega = 2$  时,开环频率特性的幅值  $A(\omega)$  和相位  $\varphi(\omega)$ 。

$$\begin{aligned} \text{解 } G(s)H(s) &= \frac{10}{s(2s+1)(s^2+0.5s+1)} = \frac{10}{2s^4+2s^3+2.5s^2+s} \Big|_{s=j\omega} = \\ &= \frac{10}{2\omega^4 - 2j\omega^3 - 2.5\omega^2 + j\omega} = \\ &= \frac{10(2\omega^4 - 2.5\omega^2) - 10j(\omega - 2\omega^3)}{(2\omega^4 - 2.5\omega^2)^2 + (\omega - 2\omega^3)^2} \end{aligned}$$

当  $\omega = 0.5$  时

$$\begin{aligned} GH(j\omega) &= \frac{10(2 \times 0.5^4 - 2.5 \times 0.5^2) - 10j(0.5 - 2 \times 0.5^3)}{(2 \times 0.5^4 - 2.5 \times 0.5^2)^2 + (0.5 - 2 \times 0.5^3)^2} = 16 - 8j \\ A(\omega) &= \sqrt{16^2 + 8^2} = 17.89 \\ \varphi(\omega) &= \arctan \frac{-8}{16} = -26.57^\circ \end{aligned}$$

当  $\omega = 2$  时

$$\begin{aligned} GH(j\omega) &= \frac{10(2 \times 2^4 - 2.5 \times 2^2) - 10j(2 - 2 \times 2^3)}{(2 \times 2^4 - 2.5 \times 2^2)^2 + (2 - 2 \times 2^3)^2} = 0.32 + j0.21 \\ A(\omega) &= \sqrt{0.32^2 + 0.21^2} = 0.38 \\ \varphi(\omega) &= \arctan \frac{0.21}{0.32} = 33.27^\circ \end{aligned}$$

## 5.4.9 已知系统开环传递函数

$$G(s)H(s) = \frac{10}{s(s+1)(s^2/4+1)}$$

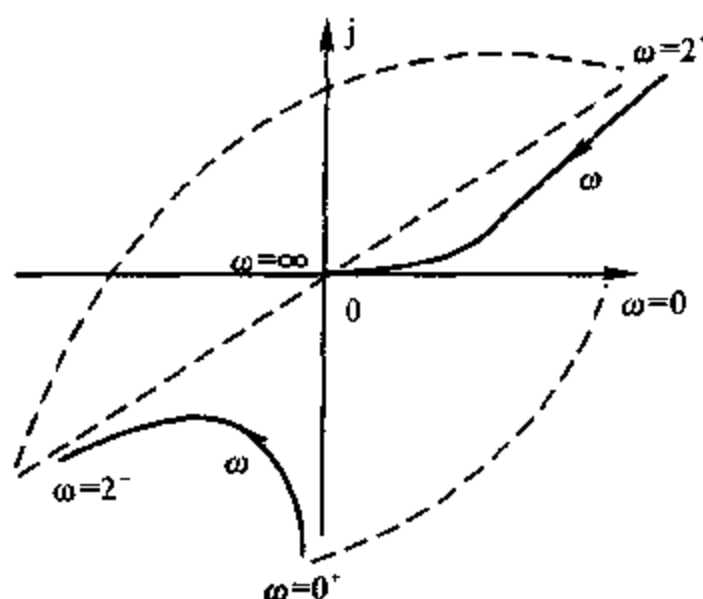
试绘制系统概略开环幅相曲线。

解 当  $\omega = 0^+$  时,  $|GH(j\omega)| = \infty$ ,  $\varphi(\omega) = -90^\circ$ ;

当  $\omega = +\infty$  时,  $|GH(j\omega)| = 0$ ,  $\varphi(\omega) = -360^\circ$ ;

当  $\omega$  从  $0 \rightarrow 0^+$  时需在幅相曲线上补充半径为无穷大, 相角等于  $90^\circ$  的大圆弧。

又考虑到当  $\omega = 2$  时,  $|GH(j\omega)| = \infty$ ,  $\varphi(\omega)$  不定, 因此可概略绘出系统的开环幅相曲线如图解 5.4.9 所示。



图解 5.4.9

## 5.4.10 已知系统开环传递函数

$$G(s)H(s) = \frac{(s+1)}{s\left(\frac{s}{2}+1\right)\left(\frac{s^2}{9}+\frac{s}{3}+1\right)}$$

要求选择频率点, 列表计算  $A(\omega)$ ,  $L(\omega)$  和  $\varphi(\omega)$ , 并据此在对数坐标纸上绘制系统开环对数频率特性曲线。

$$\begin{aligned} \text{解 } A(\omega) &= |GH(j\omega)| = \frac{\sqrt{\omega^2+1}}{\omega\sqrt{\frac{\omega^2}{4}+1}\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{9}\right)^2+\frac{\omega^2}{9}}} \\ L(\omega) &= 20\lg A(\omega) = 20\lg \frac{\sqrt{\omega^2+1}}{\omega\sqrt{\frac{\omega^2}{4}+1}\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{9}\right)^2+\frac{\omega^2}{9}}} \end{aligned}$$

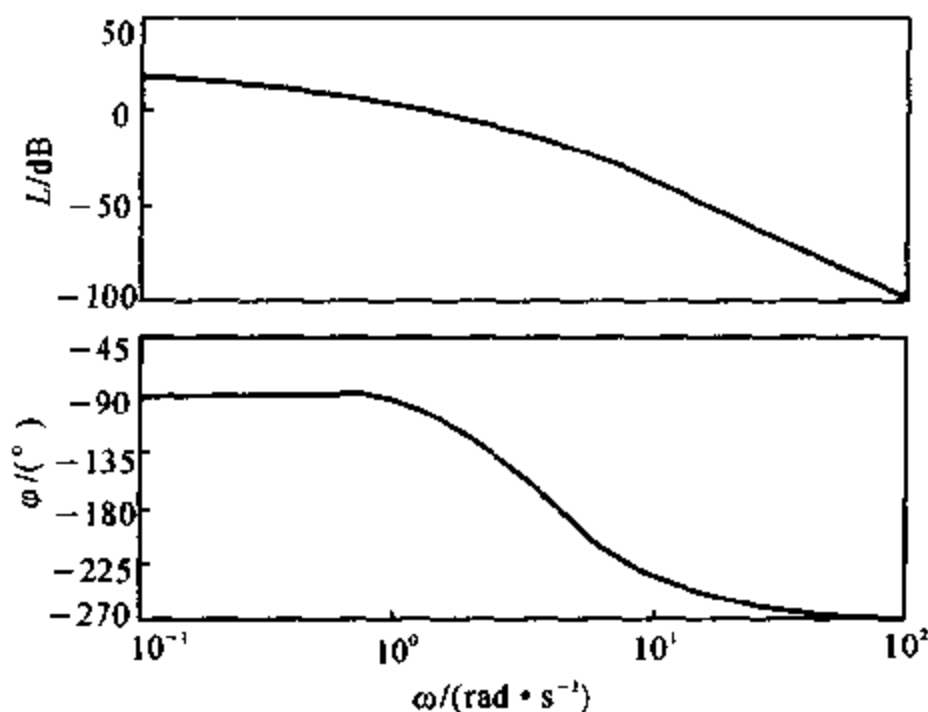
$$\varphi(\omega) = \arctan \omega - 90^\circ - \arctan \frac{\omega}{2} - \arctan \frac{\frac{\omega}{3}}{1 - \frac{\omega^2}{9}}$$

列表如表解 5.4.10。

表 解 5.4.10

$\omega$	0.5	1	2	4	5	10	30	40	60	95
$L(\omega)$	6.78	2.42	-0.876	-10.7	-16.5	-34.9	-64	-71.2	-81.5	-93.5
$\varphi(\omega)$	-87.2	-92.5	-121	-198	-216	-246	-262	-264	-266	-268

系统的开环对数频率特性如图解 5.4.10 所示。



图解 5.4.10

5.4.11 绘制下列传递函数的对数幅频渐近特性曲线，

$$(1) G(s) = \frac{2}{(2s+1)(8s+1)};$$

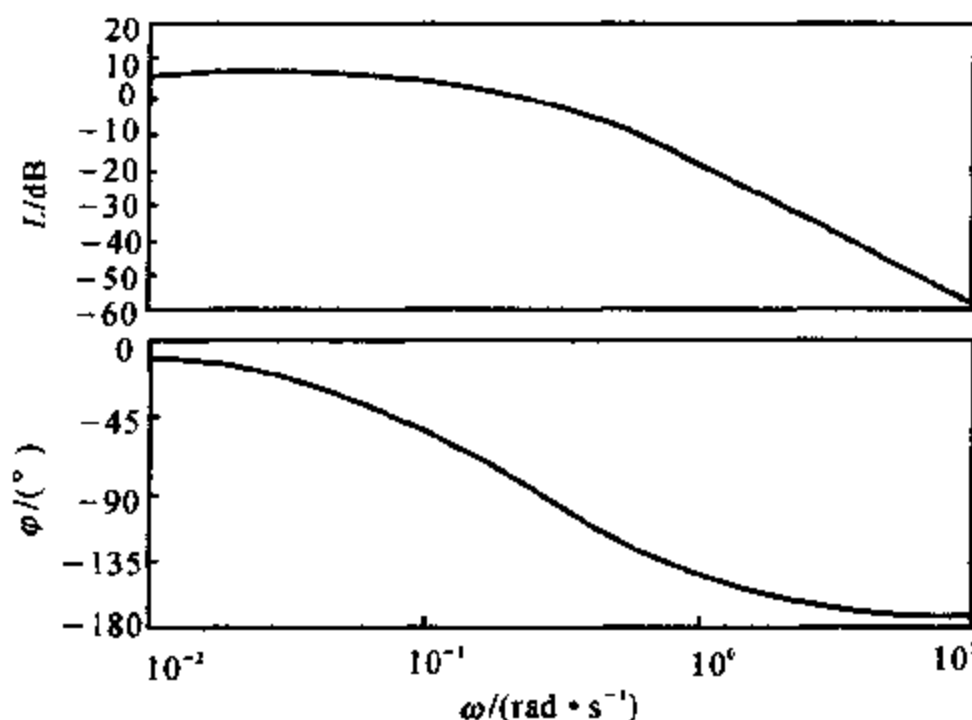
$$(2) G(s) = \frac{200}{s^2(s+1)(10s+1)};$$

$$(3) G(s) = \frac{8\left(\frac{s}{0.1} - 1\right)}{s(s^2 + s + 1)\left(\frac{s}{2} + 1\right)}$$

$$(4) G(s) = \frac{10\left(\frac{s^2}{400} + \frac{s}{10} + 1\right)}{s(s+1)\left(\frac{s}{0.1} + 1\right)}$$

解 (1)  $G(s) = \frac{2}{(2s+1)(8s+1)}$

对数幅频、相频渐近特性曲线如图解 5.4.11(1) 所示。



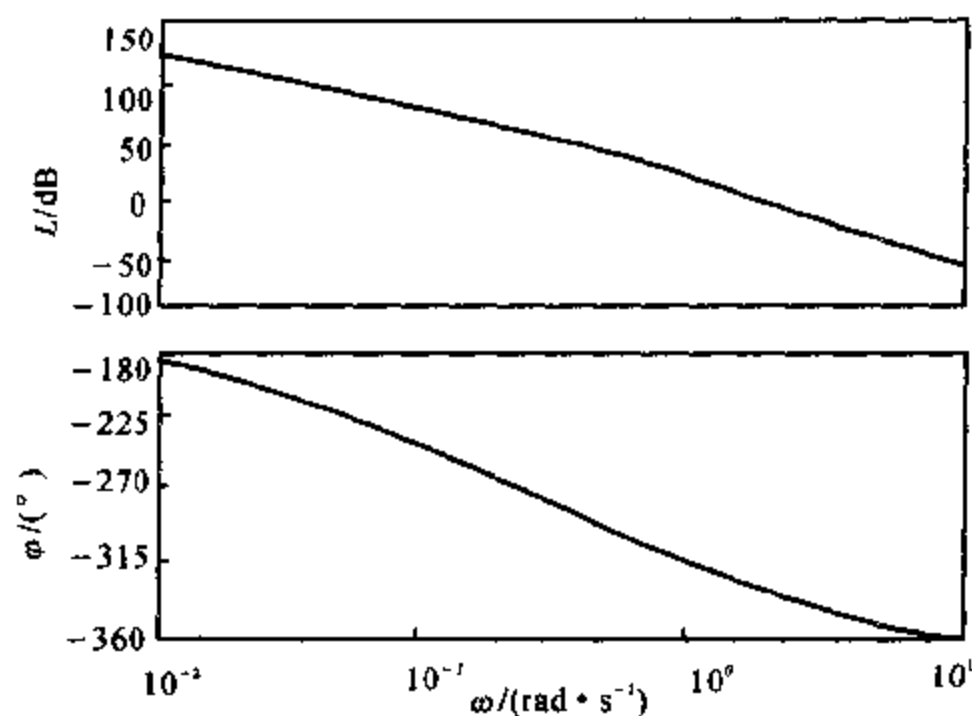
图解 5.4.11(1)

(2)  $G(s) = \frac{200}{s^2(s+1)(10s+1)}$

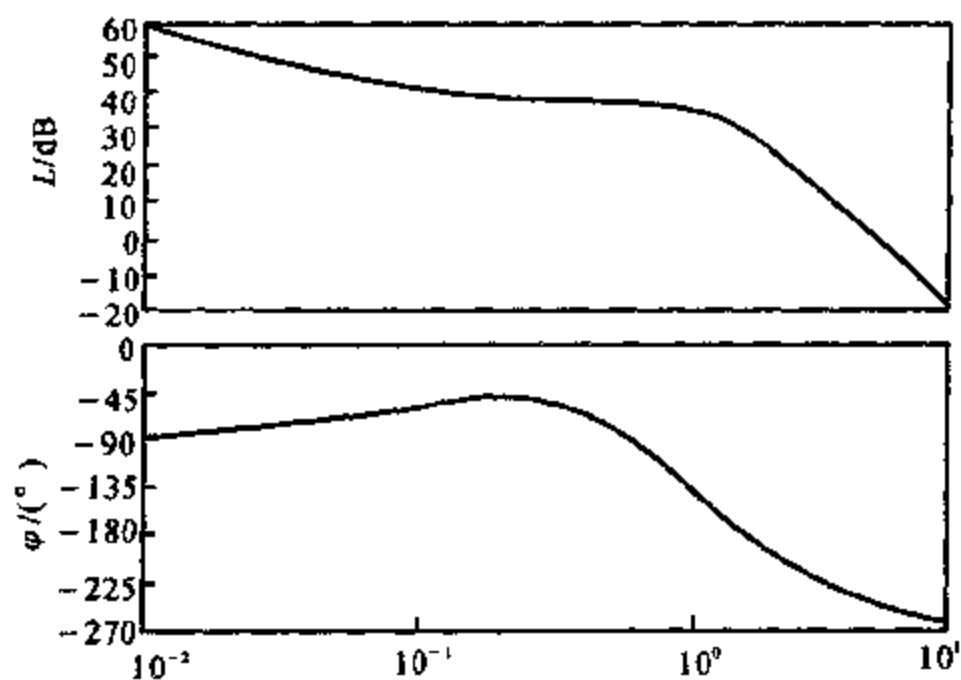
曲线如图解 5.4.11(2) 所示。

(3)  $G(s) = \frac{8\left(\frac{s}{0.1} + 1\right)}{s(s^2 + s + 1)\left(\frac{s}{2} + 1\right)}$

曲线如图解 5.4.11(3) 所示。



图解 5.4.11(2)

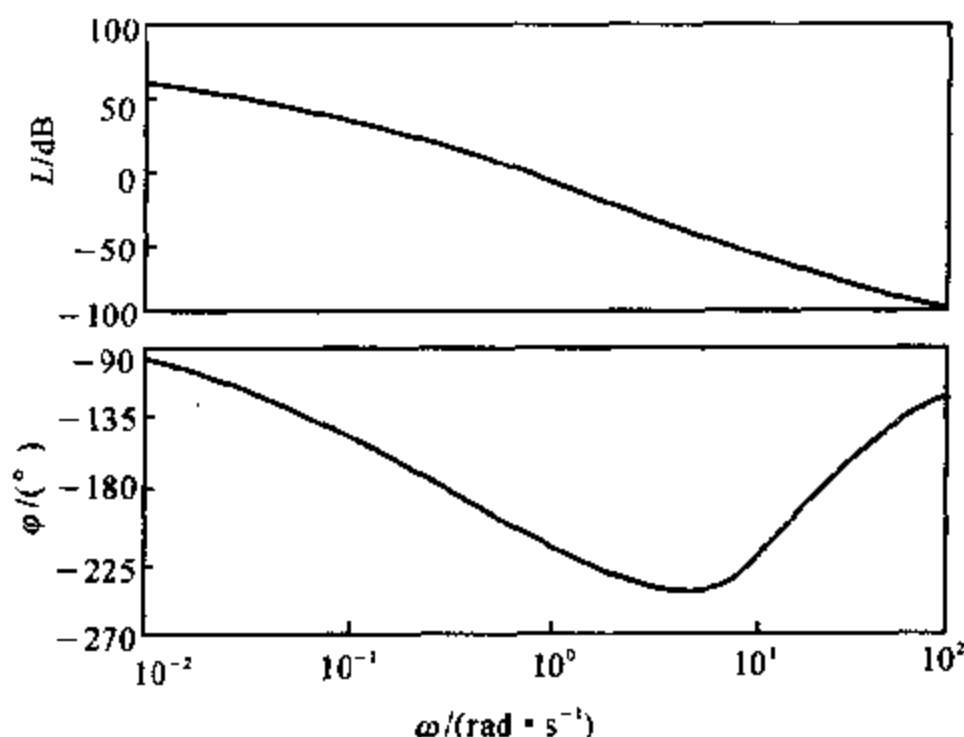


图解 5.4.11(3)



$$(4) \quad G(s) = \frac{10 \left( \frac{s^2}{400} + \frac{s}{10} + 1 \right)}{s(s+1) \left( \frac{s}{0.1} + 1 \right)}$$

曲线如图解 5.4.11(4) 所示。



图解 5.4.11(4)

**5.4.12** 已知最小相位系统的对数幅频渐近特性曲线如图 5.4.50 所示, 试确定系统的开环传递函数。

**解** (a) 由图可写出系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K \left( \frac{s}{\omega_2} + 1 \right)}{\left( \frac{s}{\omega_1} + 1 \right) \left( \frac{s}{100} + 1 \right)}$$

确定参数  $K$ ,  $\omega_1$  和  $\omega_2$ 。因

$$20 \lg K = 40 \text{ dB}$$

故

$$K = 100$$

又知  $\omega_2 = 1000\omega_1$ , 取  $\omega_1 = 0.01$ , 则  $\omega_2 = 10$ 。

所以有

$$G(s) = \frac{100 \left( \frac{s}{10} + 1 \right)}{\left( \frac{s}{0.01} + 1 \right) \left( \frac{s}{100} + 1 \right)}$$

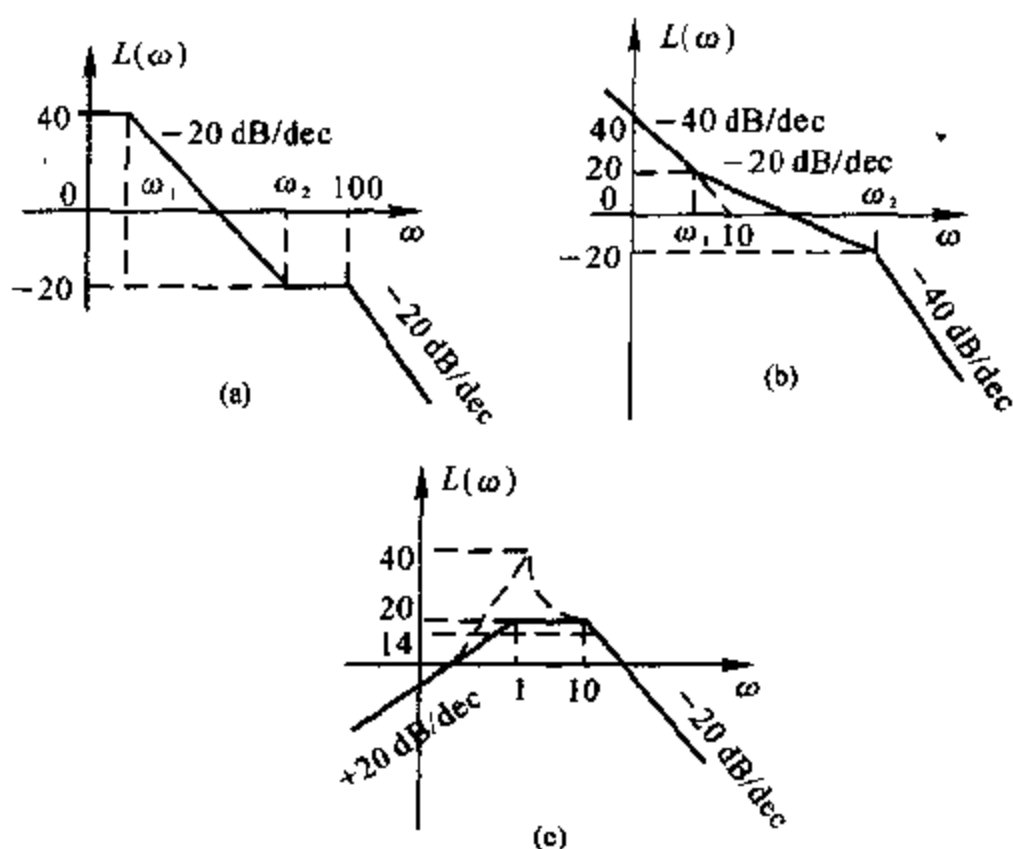


图 5.4.50 题 5.4.12 系统开环对数幅频渐近特性

(b) 同(a) 可写出

$$G(s) = \frac{K \left( \frac{s}{\omega_1} + 1 \right)}{s^2 \left( \frac{s}{\omega_2} + 1 \right)}$$

得到

$$K = \sqrt{10} = 3.16$$

所以可得系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{3.16 \left( \frac{s}{\omega_1} + 1 \right)}{s^2 \left( \frac{s}{\omega_2} + 1 \right)}$$

$$(c) \quad G(s) = \frac{Ks}{(T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1) \left( \frac{s}{10} + 1 \right)}$$

因

$$20 \lg K\omega \Big|_{\omega=1} = 20 \text{ dB}$$

故

$$K = 1$$

$$T = \frac{1}{\omega_n} = 1$$

$$20\lg M_r = 20 \text{ dB}$$

则 
$$M_r = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1-\zeta^2}} = 10$$

解得 
$$\zeta = 0.05$$

所以有 
$$G(s) = \frac{s}{(s^2 - 0.1s + 1)\left(\frac{s}{10} + 1\right)}$$

**5.4.13** 试用奈氏判据分别判断题 5.4.5, 5.4.6 系统的闭环稳定性。

**解** 题 5.4.5

(1) 当  $\tau > T$  时, 开环幅相曲线不包围  $(-1, j0)$  点, 即有

$$N = 0$$

又有

$$P = 0$$

故  $Z = P - 2N = 0$ , 即闭环系统不存在  $s$  右半平面极点, 故闭环系统稳定。

(2) 当  $T > \tau$  时,  $N = -1$ 。故  $Z = P - 2N = 2$ , 故闭环不稳定。

题 5.4.6

由题可知  $v = 1, 2, 3, 4$  时始终有  $N = -1$ , 且  $P = 0$ , 故

$$Z = P - 2N = 2$$

故闭环系统不稳定。

**5.4.14** 已知下列系统开环传递函数(参数  $K, T, T_i > 0; i = 1, 2, \dots, 6$ ):

(1) 
$$G(s) = \frac{K}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)(T_3s + 1)}$$

(2) 
$$G(s) = \frac{K}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$$

(3) 
$$G(s) = \frac{K}{s^2(Ts + 1)}$$

(4) 
$$G(s) = \frac{K(T_1s + 1)}{s^2(T_2s + 1)}$$

(5) 
$$G(s) = \frac{K}{s^3}$$

(6) 
$$G(s) = \frac{K(T_1s + 1)(T_2s + 1)}{s^3}$$

(7) 
$$G(s) = \frac{K(T_5s + 1)(T_6s + 1)}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)(T_3s + 1)(T_4s + 1)}$$

(8) 
$$G(s) = \frac{K}{Ts - 1}$$

$$(9) G(s) = \frac{-K}{Ts + 1};$$

$$(10) G(s) = \frac{K}{s(Ts - 1)}.$$

其系统开环幅相曲线分别如图 5.4.51(1) ~ (10) 所示, 试根据奈氏判据判定各系统的闭环稳定性, 若系统闭环不稳定, 确定其  $s$  右半平面的闭环极点数。

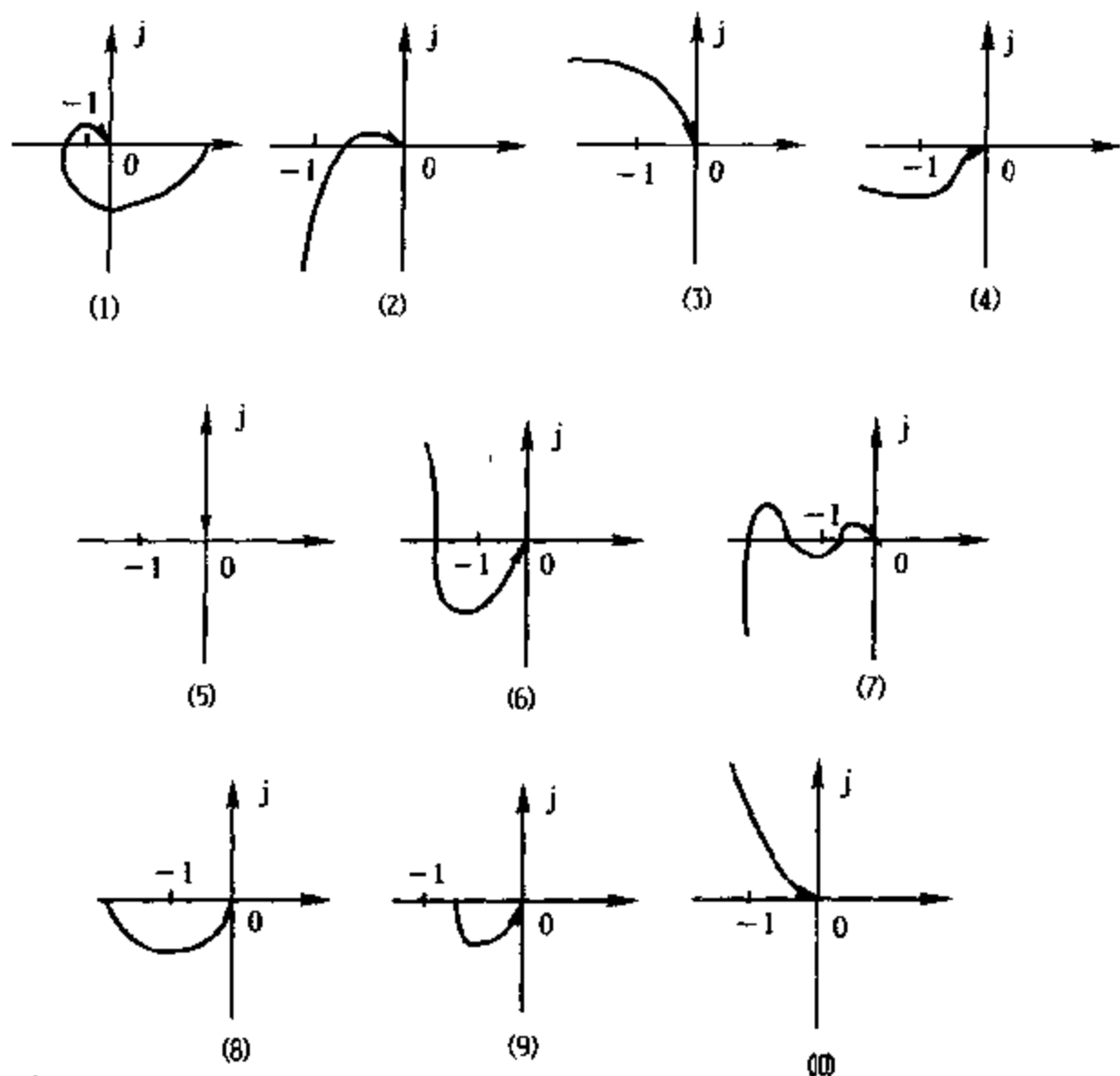


图 5.4.51 题 5.4.14 系统开环幅相曲线

解 (1) 因  $P = 0, N = -1$

故  $Z = P - 2N = 2$ , 闭环不稳, 有 2 个  $s$  右半平面闭环极点。

(2) 因  $P = 0, N = 0$

故  $Z = 0$ , 闭环稳定。

(3) 因  $P = 0, N = -1$

故  $Z = P - 2N = 2$ , 闭环不稳, 有 2 个  $s$  右半平面极点。

(4) 因  $P = 0, N = 0$

故  $Z = 0$ , 闭环稳定。

(5) 因  $P = 0, N = -1$

故  $Z = P - 2N = 2$ , 闭环不稳, 有 2 个右极点。

(6) 因  $P = 0, N = 0$

故  $Z = 0$ , 闭环稳定。

(7) 因  $P = 0, N = 0$

故  $Z = 0$ , 闭环稳定。

(8) 因  $P = 1, N = \frac{1}{2}$

故  $Z = P - 2N = 0$ , 闭环稳定。

(9) 因  $P = 1, N = 0$

故  $Z = P - 2N = 1$ , 闭环不稳, 有 1 个右极点。

(10) 因  $P = 0, N = -\frac{1}{2}$

故  $Z = P - 2N = 1$ , 闭环不稳, 有 1 个右极点。

**5.4.15** 根据奈氏判据确定题 5.4.9 系统的闭环稳定性。

**解** 因  $P = 0, N = -1$

故  $Z = P - 2N = 2$ , 闭环不稳定。

**5.4.16** 已知系统开环传递函数

$$G(s) = \frac{K}{s(Ts+1)(s+1)}, \quad K, T > 0$$

试根据奈氏判据, 确定其闭环稳定条件:

(1)  $T = 2$  时,  $K$  值的范围;

(2)  $K = 10$  时,  $T$  值的范围;

(3)  $K, T$  值的范围。

**解** 系统的开环幅相曲线如题 5.4.14 中(2)所示。若系统闭环稳定, 则幅相曲线不能包围  $(-1, j0)$  点。由

$$G(s) = \frac{K}{s(Ts+1)(s+1)}$$

可得 
$$G(j\omega) = \frac{-K\omega^2(T+1) + jK(T\omega^3 - \omega)}{(T+1)^2\omega^4 + (T\omega^3 - \omega)^2}$$

(1)  $T = 2$  时

$$G(j\omega) = \frac{-3K\omega^2 + jK(2\omega^3 - \omega)}{9\omega^4 + (2\omega^3 - \omega)^2} = U + jV$$

令  $V = 0$

得  $\omega = \frac{1}{\sqrt{2}}$

若使闭环稳定, 则  $U > -1$

可解得  $0 < K < 1.5$

(2)  $K = 10$  时

$$G(j\omega) = \frac{-10\omega^2(T+1) + 10j(T\omega^3 - \omega)}{(T+1)^2\omega^4 + (T\omega^3 - \omega)^2} = U + jV$$

令  $V = 0$

得  $\omega = \frac{1}{\sqrt{T}}$

闭环稳定, 则  $U > -1$

解得  $0 < T < \frac{1}{9}$

(3) 系统稳定的  $K, T$  范围:

由  $G(j\omega) = \frac{-K\omega^2(T+1) + Kj(T\omega^3 - \omega)}{(T+1)^2\omega^4 + (T\omega^3 - \omega)^2} = U + jV$

令  $V = 0$

得  $\omega = \frac{1}{\sqrt{T}}$

若闭环稳定, 则  $U > -1$

可解得  $0 < K < \frac{T+1}{T}, \quad 0 < T < \frac{1}{K-1}$

5.4.17 试用对数稳定判据判定题 5.4.10 系统的闭环稳定性。

解 因  $P = 0$ , 由对数相频曲线可知  $N = 0$ 。故  $Z = P - 2N = 0$ , 故闭环系统稳定。

5.4.18 已知两系统开环对数相频特性曲线如图 5.4.52 所示, 试分别确定系统的稳定性。鉴于改变系统开环增益可使系统截止频率变化, 试确定系统闭环稳定时, 截止频率  $\omega_c$  的范围。

解 由图可知两系统的相频特性  $\varphi(\omega_c)$  均在  $-90^\circ \sim -180^\circ$  之间, 因此根据式  $\gamma(\omega_c) = 180^\circ + \varphi(\omega_c)$ , 可知  $\gamma(\omega_c) > 0$ , 所以两系统均稳定。

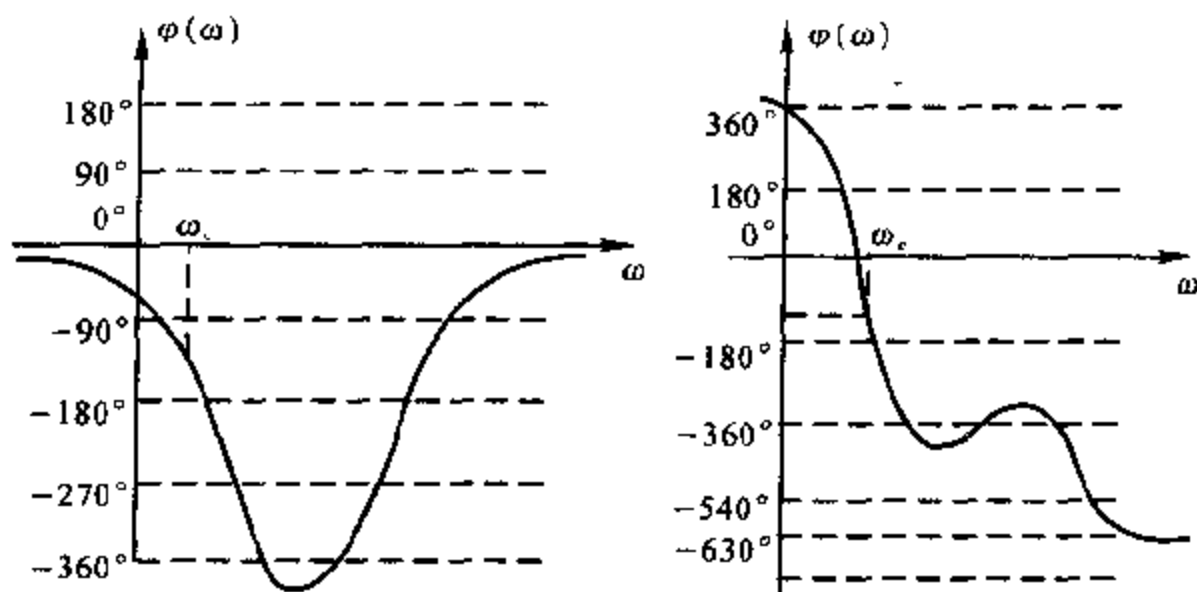


图 5.4.52 题 5.4.18 开环对数相频特性曲线

当改变开环增益  $K(K \uparrow \rightarrow \omega_c \uparrow \rightarrow \varphi(\omega_c) \downarrow \rightarrow \gamma \downarrow \rightarrow$  使系统稳定性变差, 反之  $K \downarrow$  使稳定性增加) 时, 将使闭环稳定性发生变化, 当  $\omega_c$  增加到使  $\varphi(\omega_c) = -180^\circ$ , 即  $\gamma(\omega_c) = 180^\circ + \varphi(\omega_c) = 0$  时, 系统则处于临界稳定。所以截止频率  $\omega_c$  的范围是在  $\gamma(\omega_c) \geq 0$  的区间内。

5.4.19 若单位反馈系统的开环传递函数

$$G(s) = \frac{Ke^{-0.8s}}{s+1}$$

试确定使系统稳定的  $K$  值范围。

解 因

$$G(j\omega) = \frac{Ke^{-j0.8\omega}}{j\omega+1}$$

故有

$$\begin{cases} |G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{\omega^2+1}} \\ \varphi(\omega) = -\arctan\omega - 0.8\omega \end{cases}$$

系统临界稳定时

$$|G(j\omega)| = 1, \quad \varphi(\omega) = -\pi$$

解得

$$\omega = \tan(\pi - 0.8\omega) = -\tan 0.8\omega$$

即

$$\omega = 2.45$$

代入

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1+\omega^2}} \Big|_{\omega=2.45} = 1$$

得

$$K = \sqrt{1+2.45^2} = 2.65$$

所以  $0 < K < 2.65$  系统稳定。

5.4.20 设单位反馈系统的开环传递函数

$$G(s) = \frac{5s^2 e^{-\tau}}{(s-1)^4}$$

试确定闭环系统稳定时, 延迟时间  $\tau$  的范围。

解 因为

$$G(j\omega) = \frac{-5\omega^2 e^{-j\tau\omega}}{(j\omega+1)^4}$$

$$\text{令} \quad \begin{cases} |G(j\omega)| = \frac{5\omega^2}{(1+\omega^2)^2} = 1 \\ \varphi(\omega) = 180^\circ - \tau\omega \times \frac{180^\circ}{\pi} - 4\arctan\omega = 180^\circ \end{cases}$$

可得

$$1 + \omega^2 = \sqrt{5}\omega$$

即

$$\omega_1 = 0.618, \quad \omega_2 = 1.618$$

由开环幅频特性检验可舍去  $\omega_1$ , 则由

$$\gamma(\omega_2) = 180^\circ + \varphi(\omega_2) = 180^\circ + 180^\circ - \tau\omega_2 \times \frac{180^\circ}{\pi} - 4\arctan\omega_2 > 0$$

解得

$$\tau < \frac{360^\circ - \arctan 1.618}{57.3^\circ \times 1.618} = 1.3685$$

所以闭环系统稳定的  $\tau$  的范围是

$$0 < \tau < 1.3685$$

5.4.21 设单位反馈控制系统的开环传递函数

$$G(s) = \frac{as+1}{s^2}$$

试确定相角裕度为  $45^\circ$  时参数  $a$  的值。

解 因

$$G(j\omega) = \frac{ja\omega+1}{-\omega^2}$$

由题意有

$$\gamma(\omega_c) = 180^\circ + \varphi(\omega_c) = 180^\circ - 180^\circ + \arctan a\omega_c = 45^\circ$$

故

$$a\omega_c = 1$$

代入

$$|G(j\omega_c)| = 1$$

可解得

$$\omega_c = 1.19$$

则可求得

$$a = \frac{1}{\omega_c} = \frac{1}{1.19} = 0.84$$

5.4.22 对于典型二阶系统, 已知参数  $\omega_n = 3$ ,  $\zeta = 0.7$ , 试确定截止频率  $\omega$ 。



和相角裕度  $\gamma$ 。

解 根据式(5-119)(见参考文献[1], 213 页)有

$$\omega_c = \omega_n (\sqrt{4\zeta^4 + 1} - 2\zeta^2)^{\frac{1}{2}} = 3 \times (\sqrt{4 \times 0.7^4 + 1} - 2 \times 0.7^2)^{\frac{1}{2}} = 1.944$$

再根据式(5-120)(见参考文献[1], 213 页)有

$$\gamma = \arctan \frac{2\zeta\omega_n}{\omega_c} = \arctan \frac{2 \times 0.7 \times 3}{1.944} = 65.16^\circ$$

5.4.23 对于典型二阶系统, 已知  $\sigma\% = 15\%$ ,  $t_s = 3$  s, 试计算相角裕度  $\gamma$ 。

解 本题可根据  $\sigma\%$  求得  $\zeta$ , 再求出  $\gamma$ 。

因为 
$$\sigma\% = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\%$$

当  $\sigma\% = 15\%$  时, 可解得  $\zeta = 0.517$ 。

根据式(5-120)可得

$$\begin{aligned} \gamma &= \arctan \left[ 2\zeta(\sqrt{4\zeta^4 + 1} - 2\zeta^2)^{-\frac{1}{2}} \right] = \\ &\arctan \left[ 2 \times 0.517(\sqrt{4 \times 0.517^4 + 1} - 2 \times 0.517^2)^{-\frac{1}{2}} \right] = 53.16^\circ \end{aligned}$$

5.4.24 根据题 5.4.11 所绘对数幅频渐近特性曲线, 近似确定截止频率  $\omega_c$ , 并由此确定相角裕度  $\gamma$  的近似值。

解 (1) 因  $\omega_c = 0.25$

故 
$$\gamma = 180^\circ - \arctan 2\omega_c - \arctan 8\omega_c = 180^\circ - 26.57^\circ - 63.43^\circ = 90^\circ$$

(2) 因  $\omega_c = 2.1$

故 
$$\begin{aligned} \gamma &= 180^\circ - 180^\circ - \arctan \omega_c - \arctan 10\omega_c = \\ &-64.54^\circ - 87.27^\circ = -151.81^\circ \end{aligned}$$

(3) 因  $\omega_c = 5.4$

故 
$$\begin{aligned} \gamma &= 180^\circ - 90^\circ + \arctan \frac{\omega_c}{0.1} - 180^\circ + \arctan \frac{\omega_c}{\omega_c^2 - 1} - \arctan \frac{\omega_c}{2} = \\ &90^\circ + 88.94^\circ - 169.14^\circ - 69.68^\circ = -59.88^\circ \end{aligned}$$

(4) 因  $\omega_c = 1$

故 
$$\begin{aligned} \gamma &= 180^\circ - 90^\circ - \arctan \frac{\omega_c}{0.1} - \arctan \omega_c + \arctan \frac{2\zeta \frac{\omega_c}{\omega_n}}{\left(\frac{\omega_c}{\omega_n}\right)^2 - 1} = \\ &90^\circ - 84.29^\circ - 45^\circ + 5.72^\circ = -33.57^\circ \end{aligned}$$

5.4.25 某一控制系统, 若要求  $\sigma = 0.17$ ,  $t_s = 5$  s, 试由近似公式确定频域指标要求  $\omega_c$  和  $\gamma$ 。

解 由公式  $\sigma = 0.16 + 0.4\left(\frac{1}{\sin\gamma} - 1\right)$

可得  $\gamma = \arcsin \frac{0.4}{\sigma + 0.24} = \arcsin \frac{0.4}{0.17 + 0.24} = 77.3^\circ$

又由公式  $t_n = \frac{\left[2 + 1.5\left(\frac{1}{\sin\gamma} - 1\right) + 2.5\left(\frac{1}{\sin\gamma} - 1\right)^2\right]\pi}{\omega_c}$

可得  $\omega_c = \frac{\left[2 + 1.5\left(\frac{1}{\sin\gamma} - 1\right) + 2.5\left(\frac{1}{\sin\gamma} - 1\right)^2\right]\pi}{t_n} =$   

$$\frac{[2 + 1.5 \times 0.025 + 2.5 \times 0.025^2] \times 3.14}{5} =$$
  

$$\frac{2.04}{5} = 10.2$$

## 第6章 线性系统的校正方法

### 6.1 重点内容提要

校正就是在系统中加入一些其参数可以根据需要而改变的机构或装置,使系统整体特性发生变化,从而满足给定的各项性能指标。

#### 6.1.1 校正方式

按照校正装置在系统中的连接方式,控制系统校正方式可分为串联校正、反馈校正和复合校正等。

以  $G_c(s)$  表示校正装置的传递函数,  $G(s)$  表示被控对象的传递函数,可得以下几种校正联接。

串联校正如图 6.1.1 所示,  $G_c(s)$  可以设计成超前、滞后和滞后-超前等环节,其特点及作用见表 6.1.1。

反馈校正如图 6.1.2 所示。

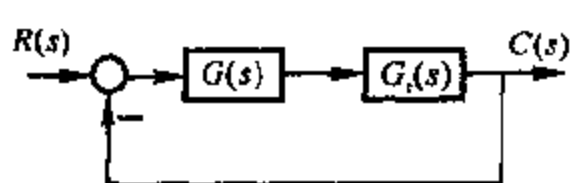


图 6.1.1 串联校正

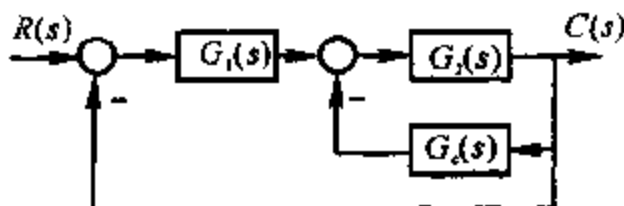


图 6.1.2 反馈校正

反馈校正可以削弱系统非线性特性的影响,提高响应速度,降低对参数变化的敏感性以及抑制噪声的影响。

复合校正可分为按输入补偿和按干扰补偿两种方式,分别如图 6.1.3 和图 6.1.4 所示。

前置校正可以改善系统的动态性能,提高系统稳态精度,从而较好地解决稳定与精度的矛盾。

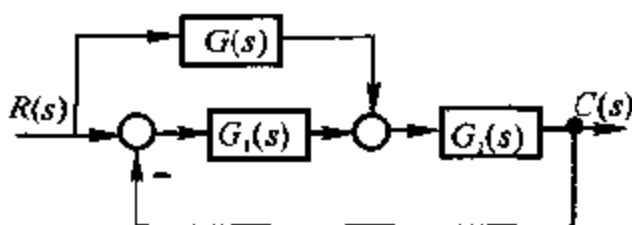


图 6.1.3 按输入补偿的校正

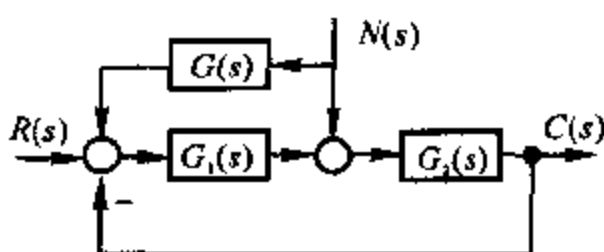


图 6.1.4 干扰补偿

按干扰补偿的目的是为了提高系统的准确度。通过直接或间接测量出干扰信号,并经过适当变换,使干扰对系统的影响得到全部或部分的补偿。

### 6.1.2 常用校正装置及特性

表 6.1.1 列出了常用的三种串联校正装置及特性。

表 6.1.1 三种校正装置及特性

	超前校正装置	滞后校正装置	滞后-超前校正装置
网络			

续 表

	超前校正装置	滞后校正装置	滞后-超前校正装置
传递函数	$G(s) = \frac{1}{a} \frac{aTs + 1}{Ts + 1}$ $a = \frac{R_1 + R_2}{R_2} > 1$ $T = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C$	$G(s) = \frac{bTs + 1}{Ts + 1}$ $b = \frac{R_2}{R_1 + R_2} < 1$ $T = (R_1 + R_2)C$	$G(s) = \frac{T_a s + 1}{aT_a s + 1} \times \frac{T_b s + 1}{bT_b s + 1}$ $ab = 1$ $\omega_a = 1/T_a$ $\omega_b = 1/T_b$
对数频率特性			
主要参数	$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{a}T}$ $\varphi_m = \arcsin \frac{a-1}{a+1}$	$\varphi = \arctan(bT\omega) - \arctan(T\omega)$	零相角频率 $\omega_a = \frac{1}{\sqrt{T_a T_b}}$
特点及作用	1. 特点: 具有正相移和正幅值斜率 2. 作用: 正相移和正幅值斜率改善了中频段的斜率, 增大了稳定裕量, 从而提高了快速性, 改善了平稳性 3. 缺点: 抗干扰能力下降, 改善稳态精度作用不大 4. 适用于稳态精度已满足要求但动态性能较差的系统	1. 特点: 具有负相移和负幅值斜率 2. 作用: 幅值的压缩使得有可能调大开环增益, 从而提高稳定精度, 也能提高系统的稳定裕量 3. 缺点: 使频带变窄, 降低了快速性 4. 适用于稳态精度要求较高或平稳要求严格的系统	首先要将滞后效应设置在低频段, 超前特性设置在中频段, 以确保滞后校正和超前校正优势的充分发挥, 从而全面提高系统的动态性能和稳态精度

### 6.1.3 串联校正装置的设计步骤

串联校正装置的设计方法和步骤并没有一成不变的格式,往往需要经过反复才能得到满意的方案,其解又不是惟一的。为了较快地掌握初步设计系统的能力,表 6.1.2 总结了常用的三种串联校正装置的设计步骤,供参考。

表 6.1.2 串联校正装置的设计步骤

校正方式 \ 设计步骤	频 率 法
超前校正	<p>(1) 根据稳态误差要求,确定开环增益 <math>K</math> 值</p> <p>(2) 利用已知 <math>K</math> 值,绘制校正前的对数频率特性,并确定幅值、相角裕度</p> <p>(3) 确定需要增加的相位超前角 <math>\varphi_m = \gamma(\text{指标要求的}) - \gamma(\omega_c')</math> (校正前的) <math>+ \varepsilon</math> (修正量)</p> <p>(4) 确定超前网络最大超前角 <math>\varphi_m = \arcsin \frac{a-1}{1+a}</math> 对应的 <math>a</math> 值和对应的角频率 <math>\omega_m = \frac{1}{\sqrt{aT}}</math>,并选 <math>\omega_m</math> 为校正后的截止频率 <math>\omega_c'' = \omega_m</math></p> <p>(5) 据 <math>\omega = \frac{1}{T}</math> 和 <math>\omega = \frac{1}{aT}</math> 确定超前网络的转折频率</p> <p>(6) 验算并将原开环增益增加 <math>a</math> 倍,以补偿超前网络产生的幅值衰减</p>
滞后校正	<p>(1) 根据给定的稳态误差要求,确定开环增益 <math>K</math></p> <p>(2) 利用 <math>K</math> 值画出未校正系统的开环对数频率特性,算出校正前系统的幅值裕度和相角裕度</p> <p>(3) 给定不同的截止频率,算出对应的相角裕度,直到使 <math>\gamma</math> 满足要求。使 <math>\gamma</math> 满足要求时的 <math>\omega_c''</math> 值,即为校正后的截止频率</p> <p>(4) 根据对数幅频曲线在新的截止频率 <math>\omega_c''</math> 上需衰减到 0 dB,即衰减量为 <math>-20\lg b</math>,确定 <math>b</math> 值,再由 <math>\omega_2 = \frac{1}{bT}</math> 确定滞后网络的第二个转折频率,通常 <math>\omega_2</math> 为 <math>\omega_c''</math> 的 0.1 ~ 0.25 倍频程</p> <p>(5) 由 <math>\omega_1 = \frac{1}{T} = b\omega_2</math>,确定滞后网络的第一个转折频率</p> <p>(6) 验算</p>

续 表

校正装置	设计步骤	频率法
滞后-超前校正	<p>(1) 根据稳态误差要求,确定开环增益 <math>K</math></p> <p>(2) 画出校正前系统的开环对数频率特性,求出相角裕度,并与要求值进行比较</p> <p>(3) 确定校正后系统的截止频率 <math>\omega_c''</math>,一般选校正前相角为 <math>-180^\circ</math> 时所对应的角频率为 <math>\omega_c''</math></p> <p>(4) 确定滞后-超前校正装置超前部分的传递函数。首先由式 <math>-20\lg a + 20\lg  G(j\omega_c'')  + 20\lg T_b\omega_c'' = 0</math> 确定 <math>a</math>,再由 <math>\omega_b = \frac{1}{T_b} = \frac{\omega_c''}{\sqrt{a}}</math> 和 <math>\frac{a}{T_b}</math> 分别求出超前网络的两个转折频率,则超前部分的传递函数为 <math>G_{c1}(s) = \frac{T_b s + 1}{(T_b/a)s + 1}</math></p> <p>(5) 确定滞后-超前校正装置滞后部分的传递函数,取 <math>\omega_a = \frac{1}{T_a} = (0.1 \sim 0.25)\omega_c''</math> 和式 <math>\frac{1}{aT_a}</math> 分别求出滞后网络的两个转折频率,则滞后部分的传递函数为 <math>G_{c2}(s) = \frac{T_a s + 1}{aT_a s + 1}</math></p> <p>(6) 确定滞后-超前校正装置的传递函数</p> $G_c(s) = \frac{(T_a s + 1)(T_b s + 1)}{(aT_a s + 1)(\frac{T_b}{a}s + 1)} = G_{c1}(s)G_{c2}(s)$ <p>(7) 验算</p>	

#### 6.1.4 控制系统的性能指标

性能指标是用以设计控制系统的标准,因此要能反映系统实际性能的特点,又要便于测量和检验,所以,对于不同类型的系统、不同的研究和应用领域,采用不同的性能指标。这些性能指标尽管提法不同,但都体现了对系统静态特性和动态特性的要求,它大体上可以归纳为两类:时域指标和频域指标。

(1) 时域指标,包括静态和动态指标:

静态指标:指的是静态误差  $e_{ss}$  (指系统在跟踪典型输入时的静态误差)、无静差度  $v$  (由开环系统的类型确定) 以及静态误差系数 (包括静态位置误差系数

$K_p$ , 静态速度误差系数  $K_v$  和静态加速度误差系数  $K_a$  )。

动态指标: 主要指的是过渡过程时间  $t_s$  和超调量  $\sigma\%$ 。

(2) 频域指标, 包括开环和闭环频域指标:

开环频域指标: 指的是截止频率  $\omega_c$ 、相角裕度  $\gamma$  以及幅值裕度  $h$ 。比较常用的是  $\omega_c$  和  $\gamma$ 。

闭环频域指标: 主要指闭环谐振峰值  $M_r$ 、谐振频率  $\omega_r$  和带宽频率  $\omega_b$ 。

(3) 时域指标与频域指标的关系。(参见 5.1.5)

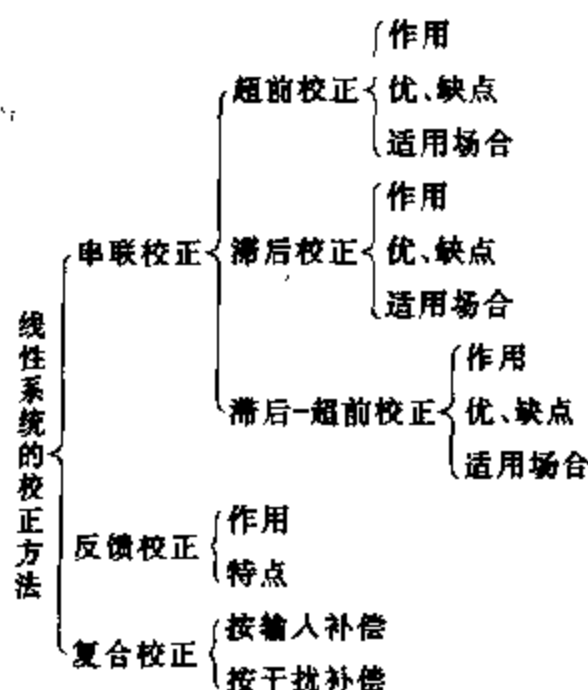
### 6.1.5 三频段理论在系统校正中的应用

关于三频段的概念以及与系统性能的关系, 在第 5 章重点内容提要 5.1.6 中已经作了详细的分析和讨论, 现不再重述。利用三频段的思想, 可以用“期望特性”校正方法对系统进行校正, 步骤如下:

- (1) 检查原系统所能达到的性能指标;
- (2) 做原系统的开环对数渐近幅频特性;
- (3) 根据精度要求确定开环增益;
- (4) 根据系统的指标要求和三频段的概念画出期望对数幅频曲线;
- (5) 确定串联校正装置的传递函数

$$20\lg |G_c| = 20\lg |G_{期望}| - 20\lg |G_o|$$

## 6.2 知识结构图





## 6.3 考点及典型题选解

本章考点有:已知系统校正前及校正后开环对数幅频特性,求校正装置传递函数;按给定指标设计串联校正装置;已知原系统开环传递函数,从给出的几种串联校正网络中选择一种网络,使校正后系统性能最好。

### 6.3.1 典型题

1. 已知两系统的开环对数幅频特性如图 6.3.1 所示,试问在系统(a)中加入何种的串联环节可以达到系统(b)。

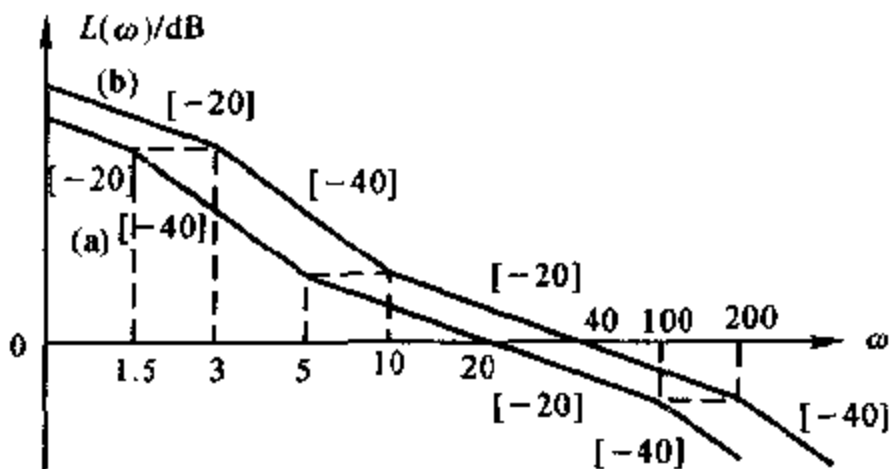


图 6.3.1 开环系统对数幅频特性

2. 如图 6.3.2 所示,最小相位系统开环对数幅频渐近特性为  $L'(\omega)$ , 串联校正装置对数幅频渐近特性为  $L_c(\omega)$ 。

(1) 求未校正系统开环传递函数  $G_0(s)$  及串联校正装置  $G_c(s)$ ;

(2) 在图中画出校正后系统的开环对数幅频渐近特性  $L''(\omega)$ , 并求出校正后系统的相位裕度  $\gamma''$ ;

(3) 简要说明这种校正装置的特点。

3. 单位负反馈系统开环传递函数为

$$G_c(s) = \frac{500K}{s(s+5)}$$

采用超前校正,使校正后系统速度误差系数  $K_v = 100/s$ , 相位裕度  $\gamma \geq 45^\circ$ 。

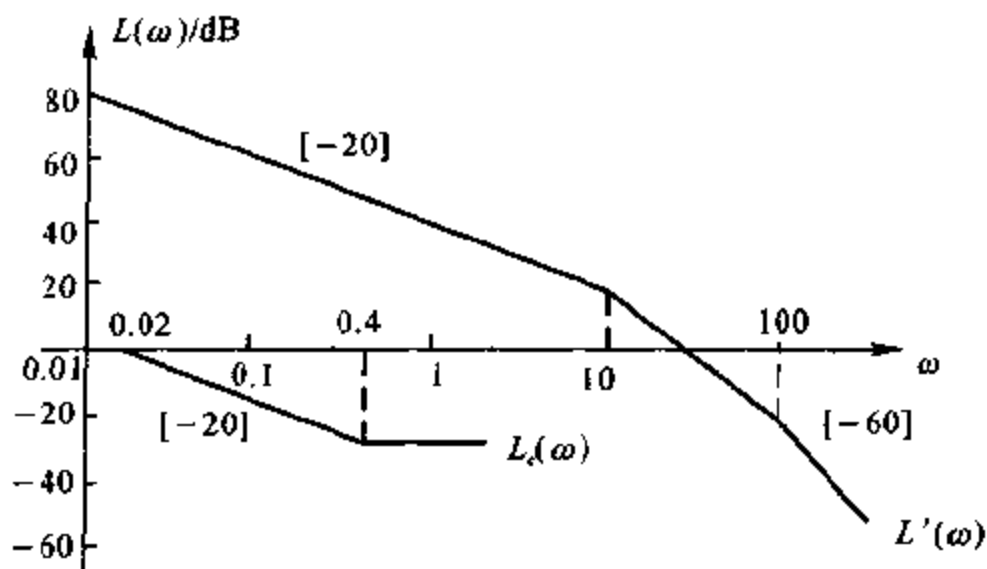


图 6.3.2 开环系统对数幅频特性

4. 单位负反馈最小相位系统开环相频特性表达式为

$$\varphi(\omega) = -90^\circ - \arctan \frac{\omega}{2} - \arctan \omega$$

(1) 求相角裕度为  $30^\circ$  时系统的开环传递函数；

(2) 在不改变截止频率  $\omega_c$  的前提下, 试选取参数  $K_c$  与  $T$ , 使系统在加入串联校正环节

$$C_c(s) = \frac{K_c(Ts + 1)}{s + 1}$$

后, 系统的相角裕度提高到  $60^\circ$ 。

5. 已知单位负反馈控制系统的开环传递函数为

$$G_0(s) = \frac{400}{s^2(0.01s + 1)}$$

试从以下三种串联校正网络中选择一种网络, 使校正后系统的稳定程度最好 (画出伯德图, 说明选择理由)。

$$(1) G_{c1}(s) = \frac{s + 1}{10s + 1}$$

$$(2) G_{c2}(s) = \frac{0.1s + 1}{0.002s + 1}$$

$$(3) G_{c3}(s) = \frac{(0.5s + 1)^2}{(10s + 1)(0.04s + 1)}$$

6. 系统如图 6.3.6 所示。

(1) 要使系统闭环极点在  $-5 \pm j5$  处, 求相应的  $K_1, K_2$  值;

(2) 设计  $G_1(s)$  使系统在  $r(t)$  单独作用下无稳态误差;

(3) 设计  $G_2(s)$  使系统在  $n(t)$  单独作用下无稳态误差。

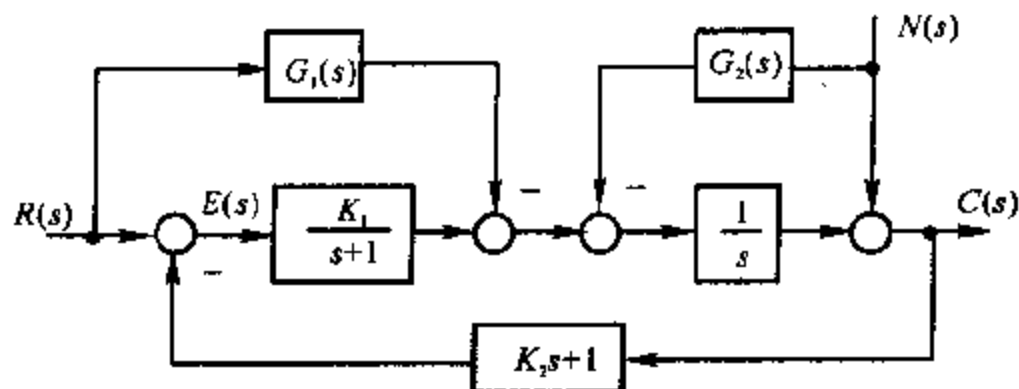


图 6.3.6 系统结构图

7. 图 6.3.7 是一采用 PD 串联校正的控制系统。

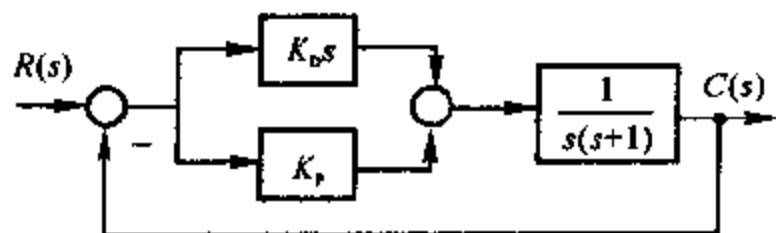


图 6.3.7 系统结构图

(1) 当  $K_p = 10, K_D = 1$  时, 求相角裕度;

(2) 若要求该系统剪切频率  $\omega_c = 5$ , 相位裕度  $\gamma = 50^\circ$ , 求  $K_p$  和  $K_D$  的值。

### 6.3.2 典型题解析

1. 写出校正前后的开环传递函数  $G(s)$  和  $G'(s)$

$$G_c(s) = \frac{G'(s)}{G(s)} = \frac{2\left(\frac{s}{1.5} + 1\right)\left(\frac{s}{100} + 1\right)}{\left(\frac{s}{3} + 1\right)\left(\frac{s}{5} + 1\right)\left(\frac{s}{200} + 1\right)}$$

$$2. (1) G_0(s) = \frac{K}{s\left(\frac{s}{10} + 1\right)\left(\frac{s}{100} + 1\right)}; \quad G_c(s) = \frac{\frac{s}{0.4} + 1}{\frac{s}{0.02} + 1}$$

(2) 略

(3) 采用串联滞后校正, 利用原系统  $L'(\omega)$  的  $-20 \text{ dB/dec}$  做校正后系统的中频段, 使相位裕度增加, 动态性能之平稳性变好, 截止频率降低, 快速性变差;

抗干扰能力增强。

3. 根据速度误差系数要求得出  $K = 1$ ; 未校正系统截止频率  $\omega_c = 22.4$ ; 未校正系统相位裕度  $\gamma_0 = 12.5^\circ$ 。校正装置提供最大超前角

$$\varphi_m = 45^\circ - 12.5^\circ + 5^\circ = 37.5^\circ$$

由此可求出校正装置传递函数

$$G_c(s) = \frac{\frac{s}{15.82} + 1}{\frac{s}{63.2} + 1}$$

$$4. (1) G_0(s) = \frac{0.8}{s\left(\frac{s}{2} + 1\right)(s+1)}$$

$$(2) T = 3.19, K_c = 0.467$$

5. 第二种校正网络好

$$6. (1) \text{ 令 } G_1(s) = 0, \quad G_2(s) = 0$$

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_1}{s^2 + (HK_1K_2)s + K_1}$$

$$D(s) = (s+5+j5)(s+5-j5) = s^2 + (HK_1K_2)s + K_1$$

$$K_1 = 50, \quad K_2 = 0.18$$

$$C(s) = \frac{-\frac{G_1}{s} + \frac{K_1}{s(s+1)}}{1 + \frac{K_1(K_2s+1)}{s(s+1)}} R(s) = \frac{-G_1(s+1) + K_1}{s^2 + (1+K_1K_2)s + K_1} R(s)$$

使系统无稳态误差, 则有

$$\frac{-G_1(s+1) + K_1}{s^2 + (1+K_1K_2)s + K_2} = 1$$

$$(2) \text{ 令 } G_2(s) = 0, \text{ 则}$$

$$G_1(s) = -\frac{s^2 + (1+K_1K_2)s}{s+1}$$

$$(3) \text{ 令 } G_2(s) = 0, \text{ 在干扰下无误差, 根据对于干扰作用的双通道原理, 有}$$

$$1 - \frac{G_2(s)}{s} = 0$$

则有

$$G_2(s) = s$$

$$7. (1) G(s) = \frac{K_P + K_D s}{s(s+1)} = \frac{10(1+0.1s)}{s(s+1)} = \frac{10\left(\frac{s}{10} + 1\right)}{s(s+1)}$$

求得

$$\omega_c = 3.16$$

$$\gamma = 33.15^\circ$$

$$(2) K_P = 25, K_D = 4$$

## 6.4 课后习题全解

6.4.1 设有单位反馈的火炮指挥仪伺服系统,其开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s(0.2s+1)(0.5s+1)}$$

若要求系统最大输出速度为  $12^\circ/\text{s}$ , 输出位置的容许误差小于  $2^\circ$ , 试求:

(1) 确定满足上述指标的最小  $K$  值, 计算该  $K$  值下系统的相角裕度和幅值裕度;

(2) 在前向通路中串接超前校正网络

$$G_c(s) = \frac{0.4s+1}{0.08s+1}$$

计算校正后系统的相角裕度和幅值裕度, 说明超前校正对系统动态性能的影响。

解 (1) 确定满足  $C_{\max} = 2 \text{ r/min} = \frac{2 \times 360^\circ}{60} = 12^\circ/\text{s}$  和  $e_{ss} \leq 2^\circ$  的  $K, \gamma, h$ :

$$K = K_V = \frac{C_{\max}}{e_{ss}} \geq 6 \text{ s}^{-1}$$

取

$$K = 6$$

$$G(s) = \frac{6}{s(0.2s+1)(0.5s+1)}$$

作开环对数幅频特性曲线如图解 6.4.1 所示。

由图可知

$$\omega_c = \sqrt{2 \times 6} = 3.46$$

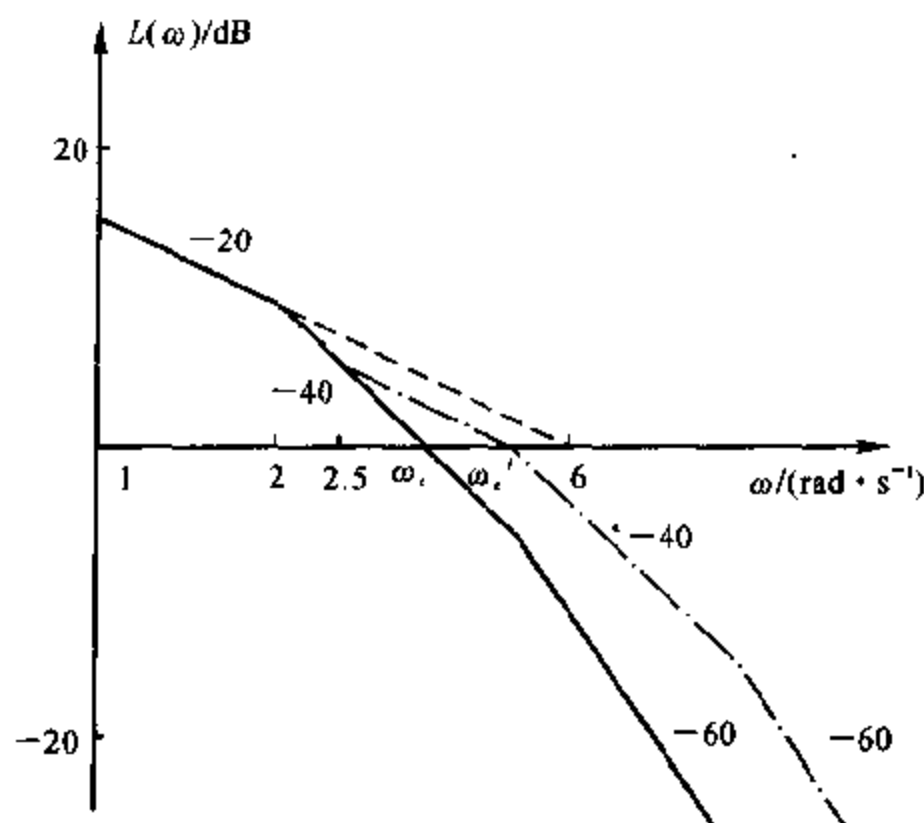
$$\gamma = \angle G(j3.46) = 90^\circ - \arctan 0.2\omega_c - \arctan 0.5\omega_c = -4.65^\circ$$

由  $\angle G(j\omega_g) = -180^\circ$  解得:  $\omega_g = 3.16$ 。

$$h = \frac{1}{|G(j\omega_g)|} = 1.16 = 0.065 \text{ dB}$$

(2) 加超前校正后开环传递函数为

$$G'(s) = G_c(s)G(s) = \frac{6(0.4s+1)}{s(0.08s+1)(0.2s+1)(0.5s+1)}$$



图解 6.4.1

作出校正后开环对数幅频特性曲线,如图解 6.4.1 中点划线所示,从图中可得

$$\omega_c = \sqrt{2.5\omega'_c}$$

故

$$\omega'_c = 4.8$$

$$\begin{aligned} \gamma' &= 90^\circ + \arctan 0.4\omega'_c - \arctan 0.08\omega'_c - \arctan 0.2\omega'_c - \arctan 0.5\omega'_c = \\ &= 90^\circ + 62.49^\circ - 221.01^\circ - 43.83^\circ - 67.38^\circ = 20.27^\circ \end{aligned}$$

由  $\angle G(j\omega'_g) = -180^\circ$  算出,  $\omega'_g = 7.5$ 。

$$h = \frac{1}{|G(j\omega'_g)|} = 7.8 \text{ dB}$$

说明超前校正可以增加相角裕度,从而减小超调量,提高系统稳定性,增大截止频率,从而缩短调节时间,提高系统快速性。

#### 6.4.2 设单位反馈系统的开环传递函数

$$G(s) = \frac{K}{s(s+3)(s+9)}$$

(1) 如果要求系统在单位阶跃输入作用下的超调量  $\sigma\% = 20\%$ , 试确定  $K$  值,

(2) 根据所求得的  $K$  值, 求出系统在单位阶跃输入作用下的调节时间  $t_s$ , 以及静态速度误差系数  $K_v$ ;

(3) 设计一串联校正装置, 使系统的  $K_v \geq 20 \text{ s}^{-1}$ ,  $\sigma\% \leq 15\%$ ,  $t_s$  减小 2 倍以上。

解 (1) 由高阶系统频域指标与时域指标的关系式(见参考文献[1]中式(6-9)及式(6-8))有:

$$\sigma = 0.16 + 0.4(M_r - 1)$$

$$M_r = \frac{\sigma - 0.16}{0.4} + 1 = \frac{0.2 - 0.16}{0.4} + 1 = 1.1$$

$$M_r = \frac{1}{\sin r}$$

$$\gamma = \arcsin \frac{1}{M_r} = 65.4^\circ$$

又因为  $\gamma = 180^\circ + \angle G(j\omega_c) = 180^\circ - 90^\circ - \arctan \frac{\omega_c}{3} - \arctan \frac{\omega}{9}$

$$\arctan \frac{\omega_c}{3} + \arctan \frac{\omega_c}{9} = 180^\circ - 90^\circ - 65.4^\circ = 24.6^\circ$$

$$\tan 24.6^\circ = \frac{\frac{\omega_c}{3} + \frac{\omega_c}{9}}{1 - \frac{\omega_c^2}{27}} = \frac{12\omega_c}{27 - \omega_c^2}$$

整理得

$$\omega_c^2 + 26.21\omega_c - 27 = 0$$

解得

$$\omega_c = 1 \quad (\omega_c = -2.72 \text{ 舍去})$$

开环增益为

$$\frac{K}{3 \times 9} = \omega_c = 1$$

故

$$K = 27$$

(2) 由参考文献[1]中式(6-10)有

$$t_s = \frac{[2 + 1.5(M_r - 1) + 2.5(M_r - 1)^2]\pi}{\omega_c} = 6.83 \text{ s}$$

$$K_v = \frac{K}{27} = 1$$

(3)

$$K_v = \frac{K}{27} \geq 20$$

$$K \geq 540, \text{ 取 } K = 540$$

$$\sigma\% \leq 0.15 = 0.16 + 0.4\left(\frac{1}{\sin \gamma} - 1\right)$$

$$\gamma \approx 90^\circ$$

$$t'_s \leq \frac{t_s}{2}$$

又由教材中式(6-10),当 $\zeta$ 一定时, $t_s$ 与 $\omega_c$ 成反比,则有

$$\omega'_c = 2\omega = 2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

作出 $K_v = 20$ 的原系统开环对数幅频特性曲线 $L(\omega)$ ,如图解6.4.2中 $L$ 所示(实线)

$$\omega_c = \sqrt{3 \times 20} = 7.75$$

$$\gamma = 180^\circ - 90^\circ - \arctan \frac{7.75}{3} - \arctan \frac{7.75}{9} = -19.55^\circ$$

在 $\omega'_c = 2$ 处,原系统相角储备:

$$\gamma(2) = 180^\circ - 90^\circ - \arctan \frac{2}{3} - \arctan \frac{2}{9} = 43.78^\circ$$

需采用迟后-超前校正方法。超前部分提供的最大超前角

$$\varphi_m = \gamma - \gamma(2) + 5^\circ = 90^\circ - 43.78^\circ + 5^\circ = 51.22^\circ$$

由公式 $\varphi_m = \arcsin \frac{a-1}{a+1}$ 得出

$$a \approx 10$$

过 $A(\omega'_c = 2)$ 做垂直线,与原系统幅频特性 $L$ 交于 $B$ 点,取 $BA = AC$ ,过 $C$ 做 $+20 \text{ dB/dec}$ 直线,取 $\omega_D = \frac{\omega'_c}{\sqrt{a}} = 0.63$ , $\omega_E = \sqrt{a}\omega'_c = 6.3$ ,过 $D$ 点做平行线至 $F$ 点,取 $\omega_F = \frac{\omega'_c}{10} = 0.2$ ,过 $F$ 点做 $-20 \text{ dB/dec}$ 直线,与 $0 \text{ dB}$ 线交于 $G$ 点, $\omega_G = 0.0063$ 。

可得校正装置传递函数为

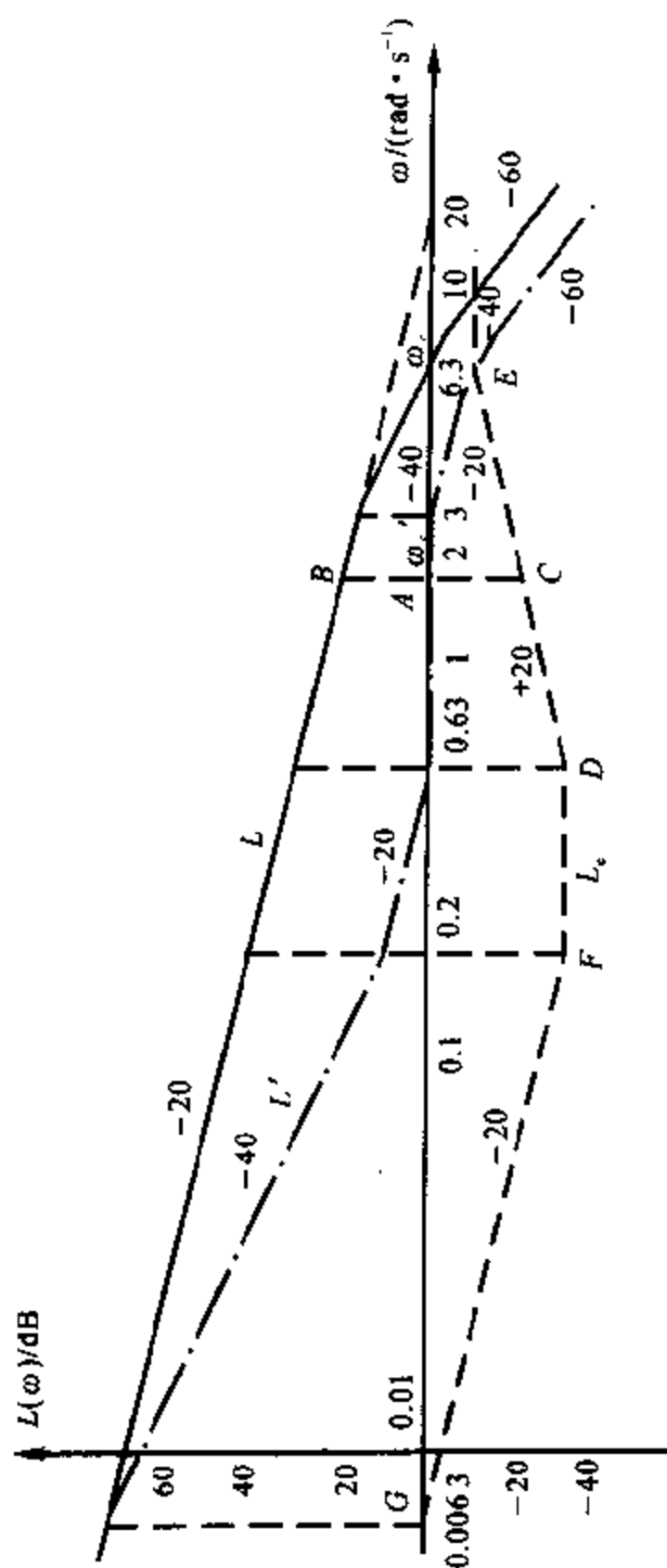
$$G_c(s) = \frac{\left(\frac{s}{0.2} + 1\right)\left(\frac{s}{0.63} + 1\right)}{\left(\frac{s}{0.0063} + 1\right)\left(\frac{s}{6.3} + 1\right)}$$

做出校正装置对数幅频特性曲线如图解6.4.2中虚线所示。

校正后系统开环传递函数如下,校正后系统开环对数幅频特性如图解6.4.2中点划线 $L'$ 所示。

$$G'(s) = G_c(s)G(s) = \frac{20\left(\frac{s}{0.2} + 1\right)\left(\frac{s}{0.63} + 1\right)}{s\left(\frac{s}{3} + 1\right)\left(\frac{s}{9} + 1\right)\left(\frac{s}{0.0063} + 1\right)\left(\frac{s}{6.3} + 1\right)}$$





图解 6.4.2

验算:

$$\begin{aligned}\gamma' &= 180^\circ + \arctan \frac{2}{0.2} + \arctan \frac{2}{0.63} - 90^\circ - \arctan \frac{2}{3} - \arctan \frac{2}{9} - \\ &\quad \arctan \frac{2}{0.0063} - \arctan \frac{2}{6.3} = \\ &= 180^\circ + 84.29^\circ + 72.52^\circ - 90^\circ - 33.69^\circ - 12.59^\circ - 89.82^\circ - 17.61^\circ = \\ &= 93.15^\circ > 90^\circ\end{aligned}$$

$$\sigma\% \approx 15\%$$

查相应曲线<sup>①</sup>  $t_s = \frac{6.3}{\omega_c} = 3.15 < 3.38$ , 符合要求。

#### 6.4.3 设单位反馈系统的开环传递函数

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)}$$

试设计一串联超前校正装置, 使系统满足如下指标:

- (1) 相角裕度  $\gamma \geq 45^\circ$ ;
- (2) 在单位斜坡输入下的稳态误差

$$e_{ss} < \frac{1}{15} \text{ rad}$$

- (3) 截止频率  $\omega_c \geq 7.5 \text{ rad/s}$ 。

解 (1) 
$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{K} < \frac{1}{15}$$

$$K > 15$$

取

$$K = 16$$

校正前系统开环传递函数

$$G(s) = \frac{16}{s(s+1)}$$

做出未校正系统开环幅频特性如图解 6.4.3 中实线 L 所示, 从 Bode 图中有未校正系统截止频率

$$\omega_c = 4$$

校正前系统相角裕度

$$\gamma = 180^\circ + \angle G_j(\omega_c) = 180^\circ - 90^\circ - \arctan \frac{4}{1} = 90^\circ - 75.96^\circ = 14.04^\circ$$

<sup>①</sup> 如《自动控制原理》(胡寿松主编, 第3版)P226, 图5-97。

取校正后截止频率为  $\omega_c' = 7.5$  对应 A 点, 过 A 点做垂直于 0 dB 线, 交未校正系统  $L$  于 B 点, 取  $AB = AC$ , 过 C 点做  $+20$  dB/dec 直线, 交 0 dB 线于 D 点, 取  $CD = CE$ 。

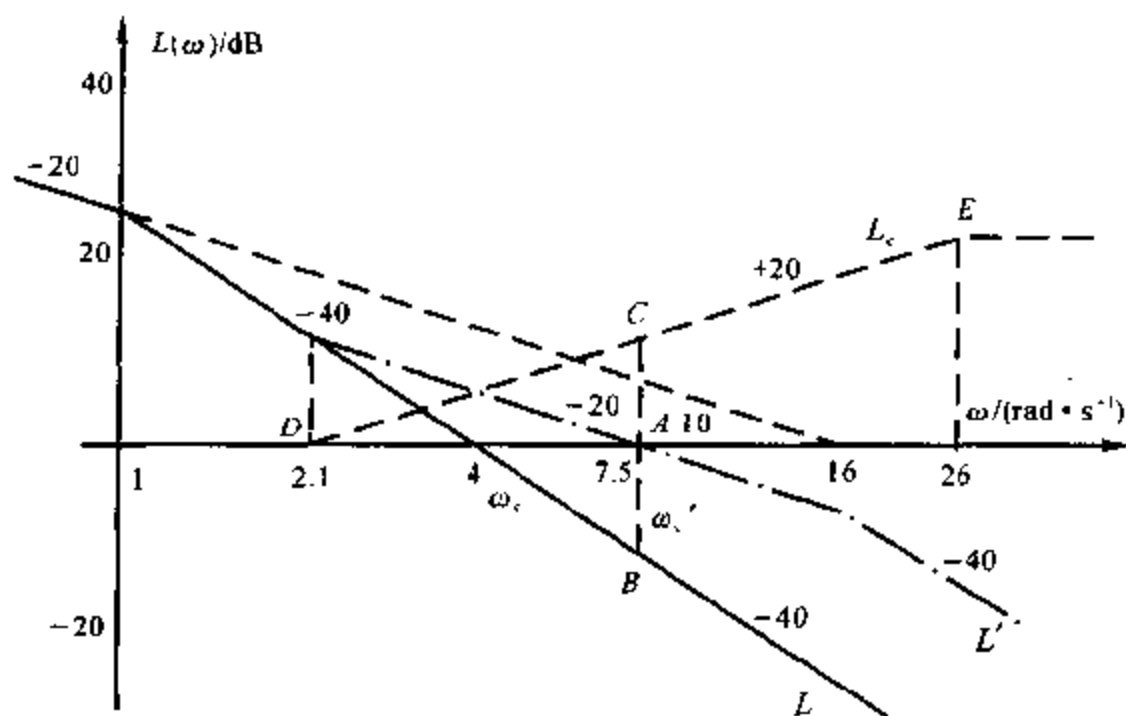


图 解 6.4.3

$$40 \lg \frac{\omega_c'}{\omega_c} = 20 \lg \frac{\omega_c'}{\omega_D}$$

$$\omega_D = \frac{\omega_c'^2}{\omega_c} = \frac{4^2}{7.5} = 2.1$$

$$\omega_c' = \sqrt{\omega_D \omega_F}$$

$$\omega_E = \frac{\omega_c'^2}{\omega_D} \approx 26$$

校正装置传递函数

$$G_c(s) = \frac{\frac{s}{2.1} + 1}{\frac{s}{26} + 1}$$

做出校正装置对数幅频特性如图解 6.4.3 中虚线  $L_c$  所示, 校正后系统传递函数为

$$G'(s) = G_c(s)G(s) = \frac{16 \left( \frac{s}{2.1} + 1 \right)}{s(s+1) \left( \frac{s}{26} + 1 \right)}$$

做出校正后系统开环对数幅频特性如图解 6.4.3 中点划线  $L'$  所示。

验算:

校正后系统相角裕度

$$\begin{aligned}\gamma' &= 180^\circ + \arctan \frac{7.5}{2.1} - 90^\circ - \arctan 7.5 - \arctan \frac{7.5}{26} = \\ &180^\circ - 75.07^\circ - 90^\circ - 82.41^\circ - 16.09^\circ = 66.57^\circ > 45^\circ\end{aligned}$$

全部满足要求。

**6.4.4** 已知一单位反馈控制系统,其固定不变部分传递函数  $G_0(s)$  和串联校正装置  $G_c(s)$  分别如图 6.4.42(a), (b) 和 (c) 所示。要求:

- (1) 写出校正后各系统的开环传递函数;
- (2) 分析各  $G_c(s)$  对系统的作用, 并比较其优缺点。

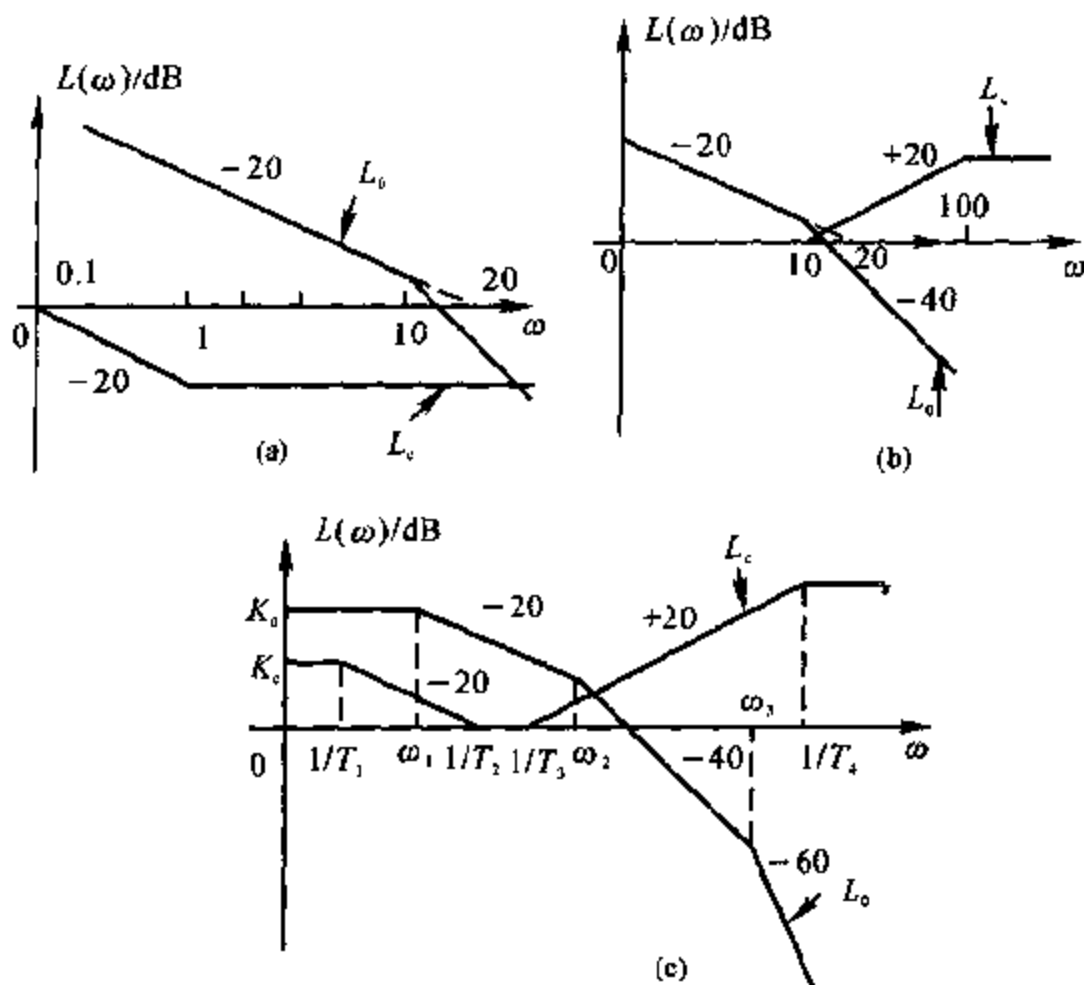


图 6.4.42 串联校正系统

解 (a)  $G_c(s)$  为图(a)

$$G_0(s) = \frac{20}{s\left(\frac{s}{10} + 1\right)}, \quad G_{ca}(s) = \frac{s+1}{\frac{s}{0.1} + 1}$$

$$G'_1(s) = G_0(s)G_{ca}(s) = \frac{20(s+1)}{s\left(\frac{s}{10} + 1\right)(10s+1)}$$

串联一迟后校正, 使  $\omega_c' \downarrow, t_s \uparrow, \gamma', \sigma\% \downarrow$ , 抗高频干扰能力  $\uparrow$ 。

(b)  $G_c(s)$  为图(b)

$$G_0(s) = \frac{20}{s\left(\frac{s}{10} + 1\right)}, \quad G_{cb}(s) = \frac{\frac{s}{10} + 1}{\frac{s}{100} + 1}$$

$$G'_2(s) = G_0(s)G_{cb}(s) = \frac{20}{s\left(\frac{s}{100} + 1\right)}$$

串联一超前校正装置使系统  $\omega_c' \uparrow, t_s \downarrow, \gamma \uparrow, \sigma\% \downarrow$ , 抗高频干扰能力  $\downarrow$ 。

(c)  $G_c(s)$  为图(c)

$$G_0(s) = \frac{10^{\frac{K_0}{20}}}{\left(\frac{s}{\omega_1} + 1\right)\left(\frac{s}{\omega_2} + 1\right)\left(\frac{s}{\omega_3} + 1\right)}$$

$$G_c(s) = \frac{10^{\frac{K_c}{20}}(T_2s+1)(T_3s+1)}{(T_1s+1)(T_4s+1)}$$

$$G'_3(s) = G_0(s)G_c(s) =$$

$$\frac{10^{\frac{K_0+K_c}{20}}(T_2s+1)(T_3s+1)}{(T_1s+1)(T_4s+1)\left(\frac{s}{\omega_1} + 1\right)\left(\frac{s}{\omega_2} + 1\right)\left(\frac{s}{\omega_3} + 1\right)}$$

串联一个迟后-超前校正装置使系统低频段抬高,  $e_{ss} \downarrow$  (阶跃输入时),  $\gamma' \uparrow$ ,  $\sigma\% \downarrow, \omega_c' \uparrow, t_s \downarrow$ , 高频段幅频特性抬高, 抗高频噪声能力  $\downarrow$ 。

6.4.5 设单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{40}{s(0.2s+1)(0.0625s+1)}$$

(1) 若要求校正后系统的相角裕度为  $30^\circ$ , 幅值裕度为  $10 \sim 20$  dB, 试设计串联超前校正装置。

(2) 若要求校正后系统的相角裕度为  $50^\circ$ , 幅值裕度为  $30 \sim 40$  dB, 试设计串联滞后校正装置。

$$\text{解 (1)} \quad G(s) = \frac{40}{s\left(\frac{s}{5} + 1\right)\left(\frac{s}{16} + 1\right)}$$

作出未校正系统对数幅频特性如图解 6.4.5 中实线  $L$  所示。

$$\text{校正前} \quad \omega_c = \sqrt{5 \times 40} = 14.14$$

$$\gamma = 180^\circ - 90^\circ - \arctan \frac{\omega_c}{5} - \arctan \frac{\omega_c}{16} = -22^\circ$$

串联超前校正装置可提供的最大超前角为

$$\varphi_m = \gamma^* - \gamma + 10^\circ = 30^\circ - (-22^\circ) + 10^\circ = 62^\circ$$

可见,由于校正后截止频率  $\omega_c'$  大于原系统  $\omega_c = 14.14$ ,而原系统在  $\omega = 16$  之后相角下降很快,用一级超前网络无法满足要求。

(2) 串联迟后校正装置

$$\gamma = \gamma^* + 6^\circ = 56^\circ$$

$$\text{经过试算} \quad \gamma(2.35) = 56.47^\circ$$

因此取  $\omega_c' = 2.35$ , 对应  $A$  点。

过  $A$  点做垂直于  $0 \text{ dB}$  线直线,与  $L$  交于  $B$  点,取  $BA = AC$ ,过  $C$  点做平行于  $0 \text{ dB}$  线的直线至  $D$  点,  $\omega_D = 0.1\omega_c' = 0.235$ ,过  $D$  点做  $-20 \text{ dB/dec}$  直线与  $0 \text{ dB}$  线交于  $E$  点。

$$\frac{40}{2.35} = \frac{0.235}{\omega_E}$$

$$\omega_E = \frac{2.35 \times 0.235}{40} = 0.014$$

校正装置传递函数为

$$G_c(s) = \frac{\frac{s}{0.235} + 1}{\frac{s}{0.014} + 1}$$

$$G'(s) = G_c(s)G(s) = \frac{40\left(\frac{s}{0.235} + 1\right)}{s\left(\frac{s}{0.014} + 1\right)\left(\frac{s}{5} + 1\right)\left(\frac{s}{16} + 1\right)}$$

$$\gamma' = 180^\circ + \arctan \frac{2.35}{0.235} - 90^\circ - \arctan \frac{2.35}{0.014} - \arctan \frac{2.35}{5} - \arctan \frac{2.35}{16} =$$

$$180^\circ + 84.29^\circ - 90^\circ - 89.65^\circ - 25.17^\circ - 8.35^\circ = 51.12^\circ > 50^\circ$$

$$\text{经试算} \quad \omega_s' = 12.8$$

$$h' = -20 \lg |G_c(\omega_g') G(\omega_g')| = 25 \text{ dB} < 30 \text{ dB}$$

幅值裕度不满足要求,重新设计。

使迟后环节高频段幅值衰减 40 dB ( $\omega_g \approx 8.9$ ), 求对应  $20 \lg |G(\omega_c'')| = 40 \text{ dB}$  处的  $\omega_c''$ 。

$$40 = 20 \lg \frac{40}{\omega_c''}$$

$$\omega_c'' = 0.4, \text{ 对应 } A'$$

$$\gamma(0.4) = 90^\circ - \arctan \frac{0.4}{5} - \arctan \frac{0.4}{16} = 84^\circ$$

查惯性环节表, 在  $0.7\omega_c'' = 0.28$  处,  $\varphi = -34^\circ$ ,  $84^\circ - 34^\circ = 50^\circ$ 。

过  $A'$  作垂直线, 取  $B'A' = A'C'$ , 过  $C'$  作 0 dB 线的平行线, 取  $\omega_{D'} = 0.28$ , 过  $D'$  做  $-20 \text{ dB/dec}$  直线, 与 0 dB 线交于  $E'$  点。

$$\frac{40}{\omega_c''} = \frac{\omega_{D'}}{\omega_{E'}}$$

$$\omega_{E'} = \frac{\omega_c'' \omega_{D'}}{40} = \frac{0.4 \times 0.28}{40} = 0.0028$$

校正装置传递函数如下:

$$G_c'(s) = \frac{\frac{s}{0.28} + 1}{\frac{s}{0.0028} + 1}$$

校正后系统传递函数为

$$G''(s) = G_c' G(s) = \frac{40 \left( \frac{s}{0.28} + 1 \right)}{s \left( \frac{s}{0.0028} + 1 \right) \left( \frac{s}{5} + 1 \right) \left( \frac{s}{16} + 1 \right)}$$

验算:

$$\omega_g'' = 8.6$$

$$h = -20 \lg |G_c' G(\omega_g'')| = -20 \lg \left| \frac{40 \times 30.73}{8.6 \times 3.071.5 \times 1.99 \times 1.135} \right| =$$

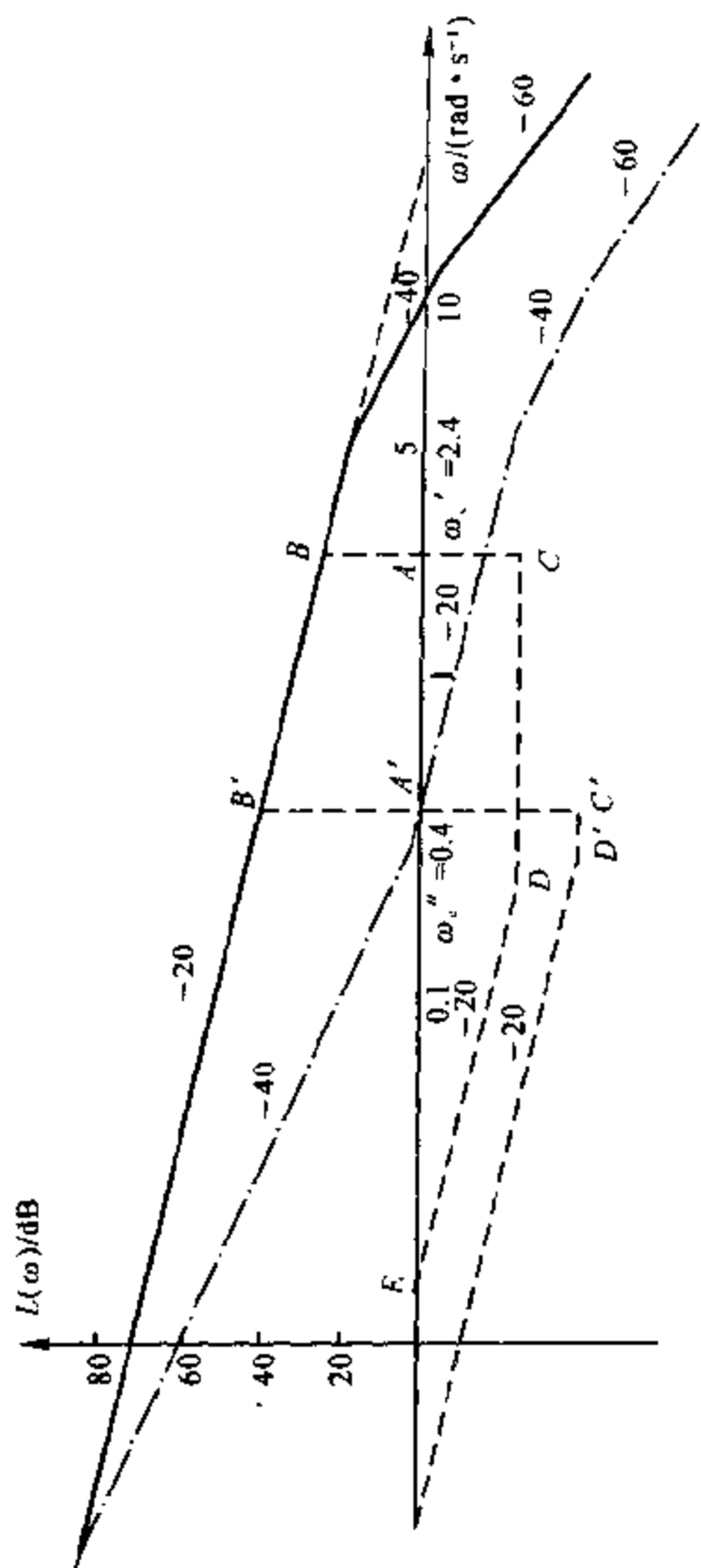
$$33.7 \text{ dB} > 30 \text{ dB}$$

$$\gamma'' = 180^\circ + \angle G''(0.4) =$$

$$180^\circ + \arctan \frac{0.4}{0.28} - 90^\circ - \arctan \frac{0.4}{0.0028} - \arctan \frac{0.4}{5} - \arctan \frac{0.4}{16} =$$

$$180^\circ + 55^\circ - 90^\circ - 89.6^\circ - 4.6^\circ - 1.4^\circ \approx 50^\circ$$

满足要求。



图解 6.4.5



#### 6.4.6 设单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{8}{s(2s+1)}$$

若采用滞后-超前校正装置

$$G_c(s) = \frac{(10s+1)(2s+1)}{(100s+1)(0.2s+1)}$$

对系统进行串联校正,试绘制系统校正前后的对数幅频渐近特性,并计算系统校正前后的相角裕度。

解 校正前:

$$G(s) = \frac{8}{s(2s+1)} = \frac{8}{s\left(\frac{s}{0.5}+1\right)}$$

$$\omega_c = \sqrt{0.5 \times 8} = 2$$

$$\gamma = 180^\circ + \angle G(j\omega_c) = 180^\circ - 90^\circ - \arctan \frac{2}{0.5} = 14^\circ$$

做出校正前对数幅频特性如图解 6.4.6 中实线  $L(\omega)$  所示。

校正后:

$$G_c(s) = \frac{(10s+1)(2s+1)}{(100s+1)(0.2s+1)} = \frac{\left(\frac{s}{0.1}+1\right)\left(\frac{s}{0.5}+1\right)}{\left(\frac{s}{0.01}+1\right)\left(\frac{s}{5}+1\right)}$$

$$G'(s) = G_c(s)G(s) = \frac{8\left(\frac{s}{0.1}+1\right)}{s\left(\frac{s}{0.01}+1\right)\left(\frac{s}{5}+1\right)}$$

做出校正后对数幅频特性,如图解 6.4.6 中点划线  $L'(\omega)$  所示。由图  $\omega'_c = 0.8$ , 有

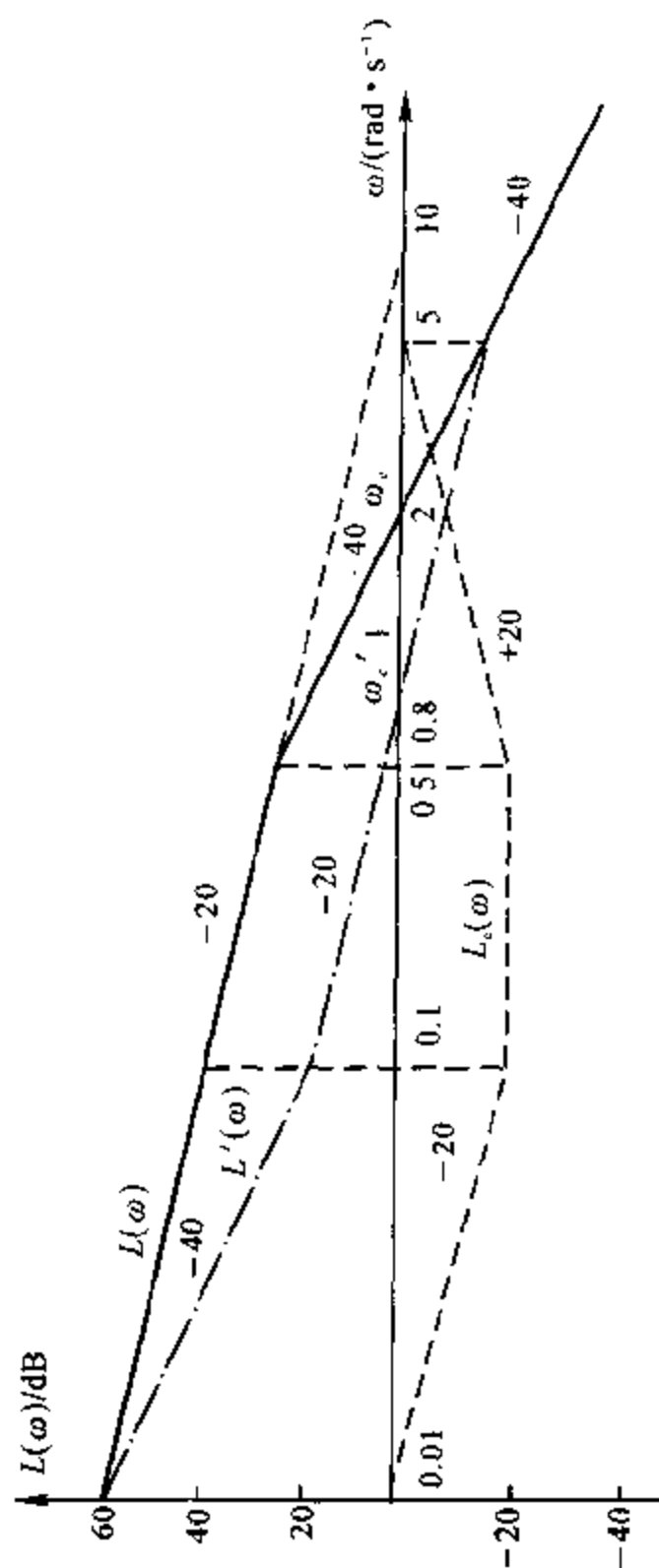
$$\begin{aligned} \gamma' &= 180^\circ + \arctan \frac{0.8}{0.1} - 90^\circ - \arctan \frac{0.8}{0.01} - \arctan \frac{0.8}{5} = \\ &180^\circ + 82.87^\circ - 90^\circ - 89.28^\circ - 9.09^\circ = 74.5^\circ \end{aligned}$$

#### 6.4.7 设单位反馈系统的开环传递函数

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(0.25s+1)}$$

(1) 若要求校正后系统的静态速度误差系数  $K_v \geq 5 \text{ s}^{-1}$ , 相角裕度  $\gamma \geq 45^\circ$ , 试设计串联校正装置;

(2) 若除上述指标要求外,还要求系统校正后截止频率  $\omega_c \geq 2 \text{ rad/s}$ , 试设计串联校正装置。



图解 6.4.6

解 (1)  $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = K \geq 5$

取  $K = 5$

$$G(s) = \frac{5}{s(s+1)\left(\frac{s}{4}+1\right)}$$

做出校正前系统开环对数幅频特性,如图解 6.4.7(a) 中实线  $L(\omega)$  所示。

$$\omega_c = \sqrt{5} = 2.236$$

$$\gamma = 180^\circ - 90^\circ - \arctan 2.236 - \arctan \frac{2.236}{4} = -5.12^\circ$$

采用串联迟后校正,试探  $\omega_c'$ ,使

$$\gamma' = 45^\circ + 6^\circ = 51^\circ$$

取  $\omega_1 = 0.8, \gamma(\omega_1) = 180^\circ + \angle G(j\omega_1) = 40.03^\circ$

$$\omega_2 = 0.5, \gamma(\omega_2) = 180^\circ + \angle G(j\omega_2) = 56.3^\circ$$

$$\omega_3 = 0.6, \gamma(\omega_3) = 180^\circ + \angle G(j\omega_3) = 50.57^\circ$$

取  $\omega_c' = 0.6$ , 对应 A 点, 过 A 做垂直线, 取  $BA = AC$ , 过 C 作平行于 0 dB 线至 D,  $\omega_D = 0.1\omega_c' = 0.06$ , 过 D 作  $-20$  dB/dec 线与 0 dB 线交于 E。

$$\frac{5}{\omega_c} = \frac{\omega_D}{\omega_E}$$

$$\omega_E = \frac{\omega_D}{5} \omega_c' = \frac{0.06}{5} \times 0.6 = 0.0072$$

校正装置传递函数如下,其对数幅频特性如图解 6.4.7(a) 中虚线所示。

$$G_c(s) = \frac{\frac{s}{0.06} + 1}{\frac{s}{0.0072} + 1}$$

校正后系统开环传递函数为

$$G'(s) = G_c(s)G(s) = \frac{5\left(\frac{s}{0.06} + 1\right)}{s\left(\frac{s}{0.0072} + 1\right)(s+1)\left(\frac{s}{4} + 1\right)}$$

$$\gamma'(0.6) = 180^\circ + \angle G_c(j\omega_c')G(j\omega_c') =$$

$$180^\circ + \arctan \frac{0.6}{0.06} - 90^\circ - \arctan \frac{0.6}{0.0072} -$$

$$\arctan 0.6 - \arctan \frac{0.6}{4} = 45.56^\circ > 45^\circ$$

做出校正后系统开环对数幅频特性,如图解 6.4.7(a) 中点划线所示。

(2) 在  $\omega = 2$  以后,系统相角损失很快,难以用超前校正补偿,迟后校正也不能奏效,故采用迟后-超前校正。依题要求,取

$$\omega_c' = 2, \quad K = 5$$

原系统相角裕度

$$\gamma = 180^\circ - \angle G(j\omega_c') \approx 180^\circ - 90^\circ - \arctan 2 - \arctan \frac{2}{4} = 0^\circ$$

$$\varphi_m = \gamma^* - \gamma + 6^\circ = 45^\circ - 0^\circ + 6^\circ = 51^\circ$$

由计算公式  $\sin \varphi_m = \frac{a-1}{a+1}$ , 得

$$a \approx 8, \quad 10 \lg a \approx 9 \text{ dB}$$

过  $\omega_c' = 2$  (A 点), 做垂直线, 取  $BA = AC$ , 过 C 点做  $+20 \text{ dB/dec}$  直线, 取  $\omega_D = \frac{\omega_c'}{\sqrt{a}} = 0.71$ ,  $\omega_E = \sqrt{a}\omega_c' = 5.7$ , 过 D 做平行于  $0 \text{ dB}$  线至 F 点, 取  $\omega_F = 0.1\omega_c' = 0.2$ , 过 F 作  $-20 \text{ dB/dec}$  直线与  $0 \text{ dB}$  线交于 G 点。

$$\omega_c = \sqrt{5}, \quad \omega_c' = 2$$

$$40 \lg \frac{\omega_c}{\omega_c'} = 20 \lg \frac{\omega_F}{\omega_D}$$

$$\omega_F = \frac{\omega_c'^2}{\omega_c} = \frac{5}{2} = 2.5$$

$$\frac{\omega_F}{\omega_D} = \frac{\omega_E}{\omega_G}$$

$$\omega_G = \frac{\omega_F}{\omega_D} \omega_D = \frac{0.2}{2.5} \times 0.71 = 0.057$$

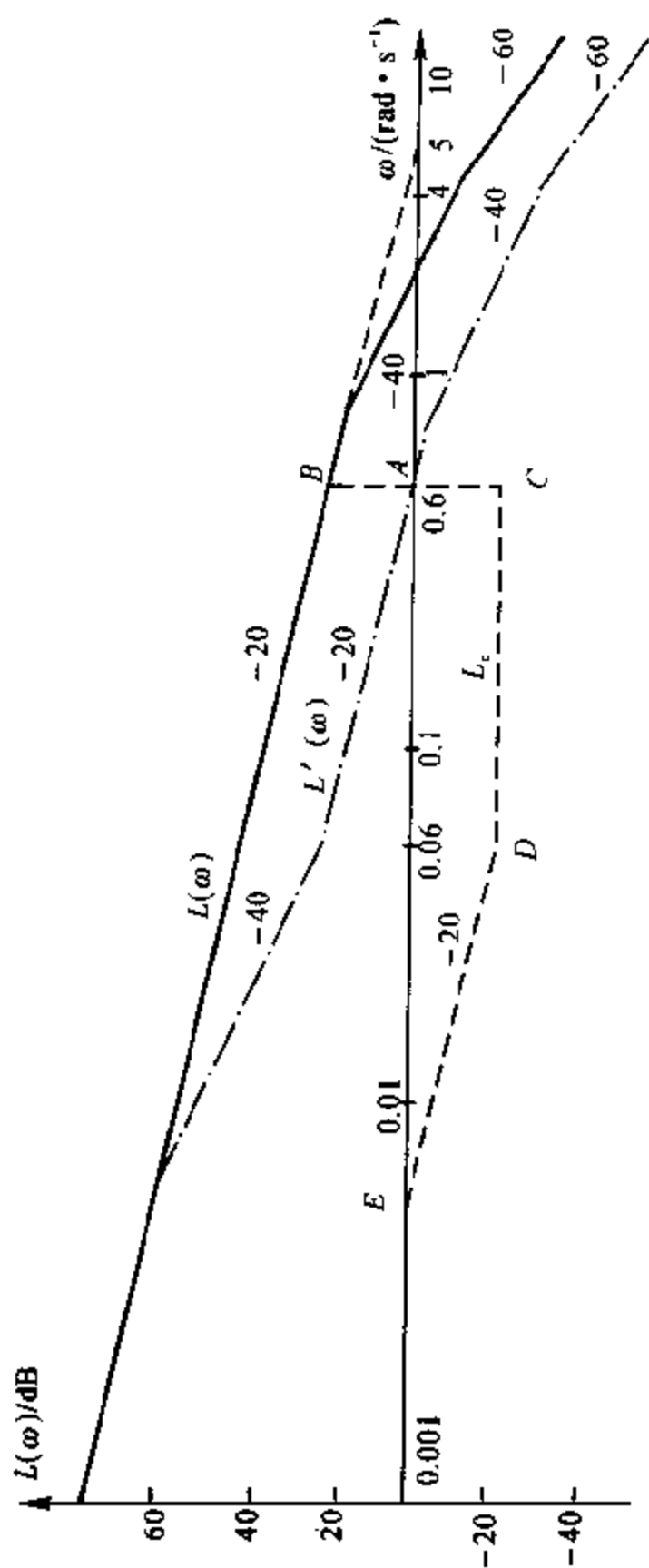
校正装置传递函数

$$G_c(s) = \frac{\left(\frac{s}{0.2} + 1\right) \left(\frac{s}{0.71} + 1\right)}{\left(\frac{s}{0.057} + 1\right) \left(\frac{s}{5.7} + 1\right)}$$

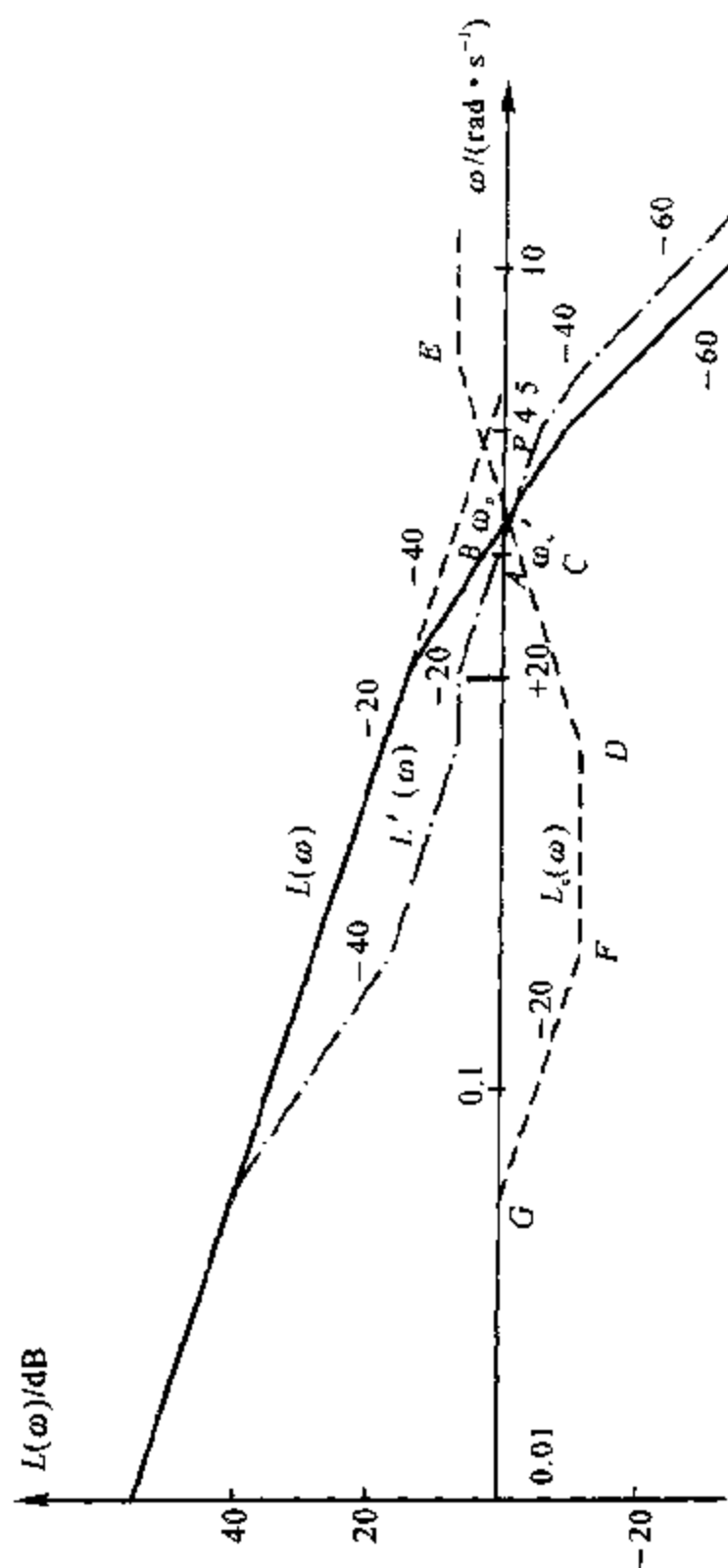
校正后系统开环传递函数

$$G'(s) = G_c(s)G(s) = \frac{5 \left(\frac{s}{0.2} + 1\right) \left(\frac{s}{0.71} + 1\right)}{s \left(\frac{s}{0.057} + 1\right) (s+1) \left(\frac{s}{4} + 1\right) \left(\frac{s}{5.7} + 1\right)}$$

做出校正后系统开环对数幅频特性,如图解 6.4.7(b) 中点划线  $L'(\omega)$  所示。



图解 6.4.7(a)



图解 6.4.7(b)

验算:

$$\gamma' = 180^\circ + \angle G_c(j\omega_c')G(j\omega_c') =$$

$$180^\circ + \arctan \frac{2}{0.2} + \arctan \frac{2}{0.71} - 90^\circ - \arctan \frac{2}{0.057} -$$

$$\arctan 2 - \arctan \frac{2}{4} - \arctan \frac{2}{5.7} =$$

$$180^\circ + 84.29^\circ + 70.46^\circ - 90^\circ - 88.37^\circ - 64.43^\circ - 26.57^\circ - 19.65^\circ = 46.73^\circ > 45^\circ$$

满足要求。

6.4.8 图 6.4.48 为三种推荐稳定系统的串联校正网络特性,它们均由最小相位环节组成。若控制系统为单位反馈系统,其开环传递函数为

$$G(s) = \frac{400}{s^2(0.01s+1)}$$

试问:

(1) 这些校正网络特性中,哪一种可使已校正系统的稳定程度最好?

(2) 为了将 12 Hz 的正弦噪声削弱 10 倍左右,你确定采用哪种校正网络特性?

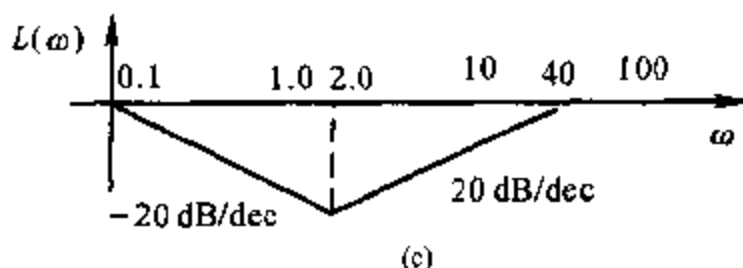
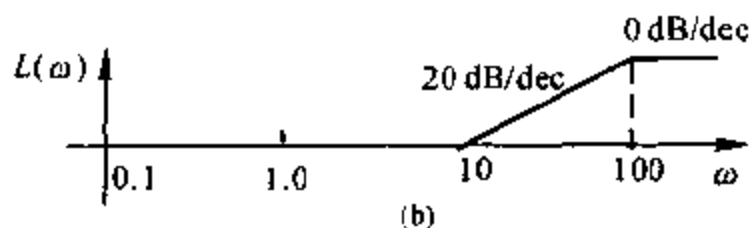
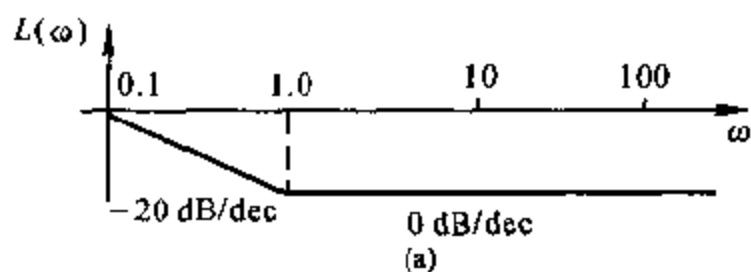


图 6.4.48 推荐的校正网络特性

解 (1) 校正网络的传递函数分别是:

$$(a) G_c(s) = \frac{s+1}{\frac{s}{0.1}+1} \quad \text{迟后网络}$$

$$(b) G_c(s) = \frac{\frac{s}{10}+1}{\frac{s}{100}+1} \quad \text{超前网络}$$

$$(c) G_c(s) = \frac{\left(\frac{s}{2}+1\right)^2}{\left(\frac{s}{0.1}+1\right)\left(\frac{s}{40}+1\right)} \quad \text{迟后-超前网络}$$

迟后校正时:

$$G'(s) = G_c(s)G(s) = \frac{400(s+1)}{s^2(0.01s+1)(10s+1)}$$

截止频率:  $\omega_{cs} = \sqrt{40} = 6.32$

相位裕度:  $\gamma_s = 180^\circ + \angle G_c(j\omega_{cs})G(j\omega_{cs}) =$   
 $180^\circ + \arctan 6.32 - 180^\circ - \arctan(0.01 \times 6.32) -$   
 $\arctan(10 \times 6.32) = -11.7^\circ$

做出迟后校正后系统开环对数幅频特性,如图解 6.4.8 中  $L_s$  所示。

超前校正时:

$$G'(s) = G_c(s)G(s) = \frac{400(0.1s+1)}{s^2(0.01s+1)^2}$$

截止频率:  $\omega_{cb} = 40$

相位裕度:  $\gamma_b = 180^\circ + \arctan(0.1 \times 40) - 180^\circ - 2\arctan(0.01 \times 40) = 32.36^\circ$

做出超前校正后系统的开环对数幅频特性,如图解 6.4.8 中  $L_b$  所示。

迟后-超前校正:

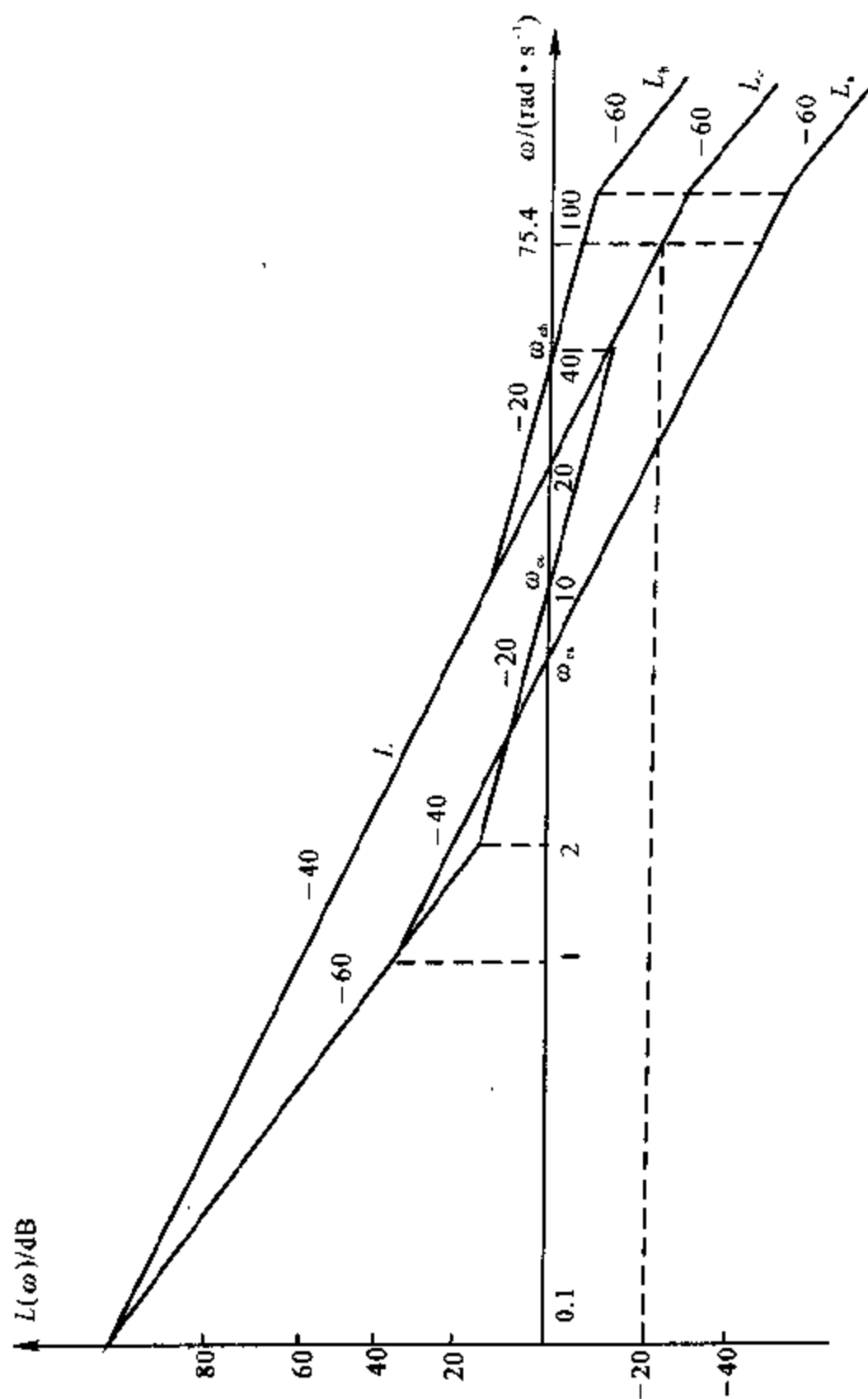
$$G'(s) = G_c(s)G(s) = \frac{400(0.5s+1)^2}{s^2(0.01s+1)(10s+1)(0.025s+1)}$$

截止频率:  $\omega_{cc} = 10$

相位裕度:  $\gamma_c = 180^\circ + 2\arctan(0.5 \times 10) -$   
 $180^\circ - \arctan(0.01 \times 10) - \arctan(10 \times 10) -$   
 $\arctan(0.025 \times 10) = 48.21^\circ$

由伯德图可见,用迟后校正时系统不稳定,用迟后-超前校正时稳定程度最好,但响应速度比超前校正慢。





图解 6.4.8

$$(2) f = 12 \text{ Hz}, \quad \omega = 2\pi f = 75.4 \text{ rad/s}$$

对于单位反馈系统,高频段的闭环幅频特性与开环幅频特性基本一致,要想使 12 Hz 正弦噪声削弱 10 倍左右,即在  $\omega = 75.4$  时幅频特性衰减 10 倍,即下降  $20\lg 10 = 20 \text{ dB}$ 。从 Bode 图上看,只有  $L_c$  在  $\omega = 75.4$  时幅值下降 20 dB 左右,可见采用迟后-超前校正可以达到目的。

#### 6.4.9 设单位反馈系统的开环传递函数

$$G(s) = \frac{K}{s(0.1s+1)(0.01s+1)}$$

试设计串联校正装置,使系统期望特性满足下列指标:

- (1) 静态速度误差系数  $K_v \geq 250 \text{ s}^{-1}$ ;
- (2) 截止频率  $\omega_c \geq 30 \text{ rad/s}$ ;
- (3) 相角裕度  $\gamma(\omega_c) \geq 45^\circ$ 。

解

$$G(s) = \frac{K}{s\left(\frac{s}{10}+1\right)\left(\frac{s}{100}+1\right)}$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = K \geq 250$$

取

$$K = 250$$

$$G(s) = \frac{250}{s\left(\frac{s}{10}+1\right)\left(\frac{s}{100}+1\right)}$$

做出原系统开环对数幅频特性,如图解 6.4.9 中实线  $L(\omega)$  所示。

$$\omega_c = \sqrt{10 \times 250} = 50$$

$$\gamma = 180^\circ + \angle G(j\omega_c) =$$

$$180^\circ - 90^\circ - \arctan \frac{50}{10} - \arctan \frac{50}{100} = -15.26^\circ$$

若采用超前校正,需补偿超前角

$$\varphi_m = \gamma^* - \gamma + 10^\circ = 45^\circ + 15.26^\circ + 10^\circ = 70.26^\circ$$

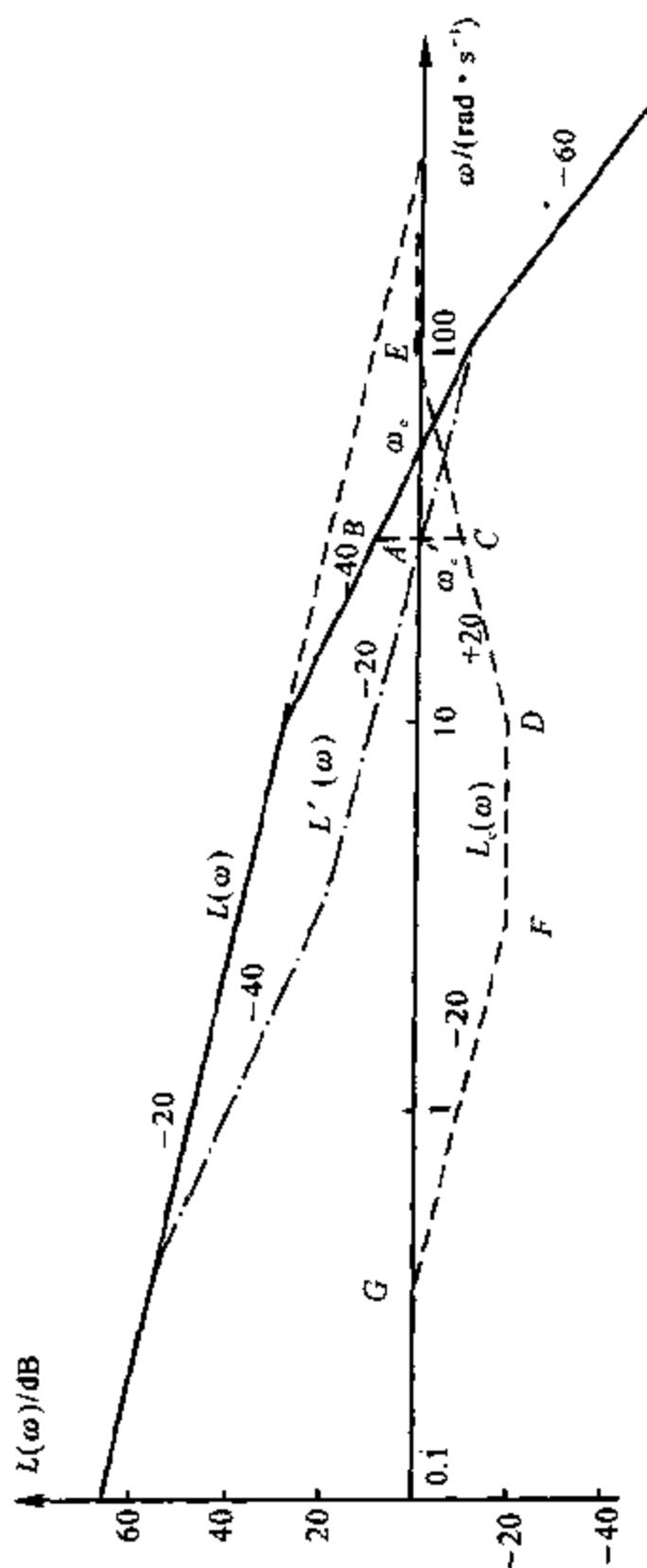
显然一级超前网络不能达到要求。

又  $\gamma(30) = 1.7^\circ$ ,故采用迟后校正也不行。因此选择迟后-超前校正,取校正后截止频率为

$$\omega'_c = 30, \text{ 对应 A 点}$$

$$\varphi_m = \gamma^* - \gamma(30) + 6^\circ = 45^\circ - 1.7^\circ + 6^\circ = 49.3^\circ$$

用公式  $\sin \varphi_m = \frac{a-1}{a+1}$ , 得



图解 6.4.9

$$a \approx 8, \quad 10\lg a \approx 9 \text{ dB}$$

过 A 点作垂直线, 取  $BA = AC$ , 过 C 点作  $+20 \text{ dB/dec}$  直线, 取  $\omega_D = \frac{\omega_c'}{\sqrt{a}} = 10$ ,  $\omega_E = \sqrt{a}\omega_c' \approx 90$ , 过 D 点做平行于  $0 \text{ dB}$  线至 F, 取  $\omega_F = 0.1\omega_c' = 3$ , 过 F 点做  $-20 \text{ dB/dec}$  直线, 与  $0 \text{ dB}$  线交于 G 点。

设 CD 与  $0 \text{ dB}$  线交点频率为  $\omega_0$

$$\omega_0 = \frac{\omega_c'^2}{\omega_c} = \frac{50^2}{30} = 83.3$$

$$\omega_K = \omega_F \frac{\omega_E}{\omega_0} = 3 \times \frac{10}{83.3} = 0.36$$

校正装置传递函数如下, 校正装置对数幅频特性如图解 6.4.9 中虚线  $L_c(\omega)$  所示。

$$G_c(s) = \frac{\left(\frac{s}{3} + 1\right)\left(\frac{s}{10} + 1\right)}{\left(\frac{s}{0.36} + 1\right)\left(\frac{s}{90} + 1\right)}$$

校正后系统开环传递函数如下, 对数幅频特性如图解 6.4.9 中点划线  $L'(\omega)$  所示

$$G'(s) = \frac{250\left(\frac{s}{3} + 1\right)}{s\left(\frac{s}{0.36} + 1\right)\left(\frac{s}{90} + 1\right)\left(\frac{s}{100} + 1\right)}$$

验算:

$$\gamma' = 180^\circ + \angle G(j\omega_c') G_c(j\omega_c') =$$

$$180^\circ + \arctan \frac{30}{3} - 90^\circ - \arctan \frac{30}{0.36} - \arctan \frac{30}{90} - \arctan \frac{30}{100} = 49.85^\circ$$

$$> 45^\circ$$

满足要求。

**6.4.10** 设可控硅-电动机调速系统中的电流环如图 6.4.44 所示。图中, 调节对象传递函数

$$G_1(s) = \frac{82.5}{(0.0033s + 1)}, \quad G_2(s) = \frac{200}{(0.2s + 1)}$$

给定滤波器传递函数

$$G_s(s) = \frac{1}{T_2s + 1}$$

比例-积分控制器传递函数

$$G_r(s) = \frac{K_c(\tau s + 1)}{s}$$

反馈环节传递函数

$$G_L(s) = \frac{0.0024}{(0.0018s + 1)}$$

试按三阶最佳工程设计法确定参数  $K_c$ ,  $\tau$  和  $T_2$ 。

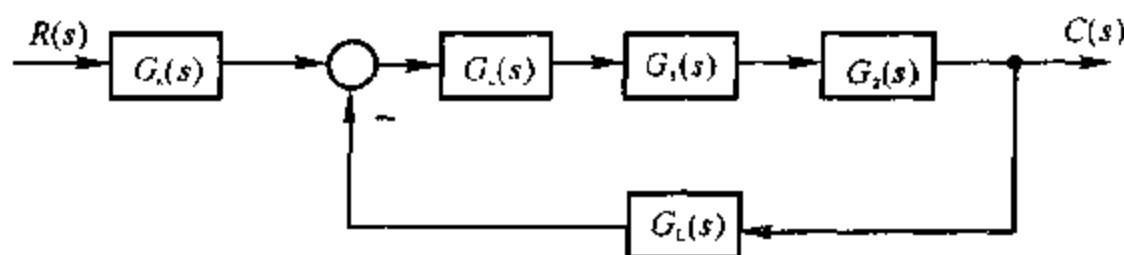
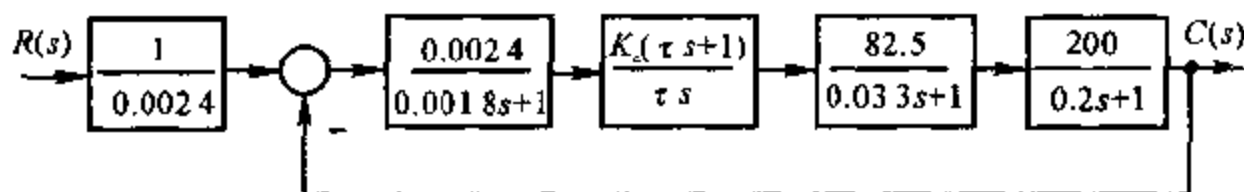


图 6.4.44 电流环结构图

解 选  $T_2 = 0.0018$ , 系统等效结构图为图解 6.4.10。



图解 6.4.10

环内前向通道传递函数

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{0.0024}{0.0018s+1} \cdot \frac{K_c(\tau s+1)}{\tau s} \cdot \frac{82.5}{0.033s+1} \cdot \frac{200}{0.2s+1} \approx \\ &= \frac{39.6K_c(\tau s+1)}{\tau s(0.2s+1)[(0.0018+0.0033)s+1]} \approx \\ &= \frac{39.6K_c(\tau s+1)}{\tau s \times 0.2s(0.0051s+1)} = \\ &= \frac{198K_c(\tau s+1)}{\tau^2 s^2(0.0051s+1)} \end{aligned}$$

与参考文献[1]中式 6-58 比较

$$G(s) = \frac{1+4T_3s}{8T_3^2s^2(1+T_3s)}$$

得

$$\begin{cases} T_3 = 0.005 \text{ s} \\ \tau = 4T_3 = 0.020 \text{ s} \\ K_c = \frac{\tau}{198 \times 8T_3^2} = 0.5 \\ T_2 = 0.001 \text{ s} \end{cases}$$

6.4.11 设系统结构图如图 6.4.34 所示。图中

$$G_1(s) = K_1 = 200$$

$$G_2(s) = \frac{10}{(0.01s+1)(0.1s+1)}$$

$$G_3(s) = \frac{0.1}{s}$$

若要求校正后系统在单位斜坡输入作用下的稳态误差  $e_{ss} = 1/200$  rad, 相角裕度  $\gamma(\omega_c) \geq 45^\circ$ , 试确定反馈校正装置  $G_c(s)$  的形式与参数。

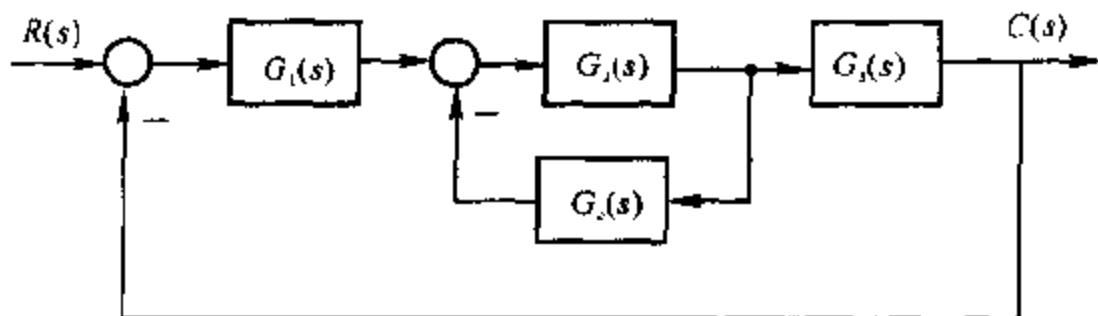


图 6.4.34

解 采用综合法反馈校正

(1) 未校正系统开环传递函数为

$$G_0(s) = G_1(s)G_2(s)G_3(s) = \frac{200}{s(0.01s+1)(0.1s+1)} = \frac{200}{s\left(\frac{s}{10}+1\right)\left(\frac{s}{100}+1\right)}$$

做出未校正系统开环对数幅频特性, 如图解 6.4.11 中实线  $L_0(\omega)$  所示。

$$\omega_c = \sqrt{2000} = 44.72$$

(2) 绘制期望对数幅频特性, 因题中未对截止频率提出要求, 取  $\omega_c' = 20$ , 由参考教材中式(6-8)

$$M_r = \frac{1}{\sin \gamma} = \frac{1}{\sin 45^\circ} = 1.414$$

中频段: 过  $\omega_c' = 20$  作  $-20$  dB/dec 直线, 为使校正装置简单, 取

$$\omega_2 = 5, \quad \omega_3 = 10, \quad \omega_4 = 100$$

中频段宽度

$$H = \frac{\omega_4}{\omega_2} = \frac{100}{5} = 20$$

低频段: I 型系统, 在  $\omega_2$  作  $-40$  dB/dec 直线与  $L_0$  相交于  $\omega_1, \omega_1 = 0.5$ 。

高频段: 在  $\omega \geq \omega_4$  时, 取  $L'$  与  $L_c$  一致, 得出期望对数幅频特性, 如图解 6.4.11 中点划线  $L'$  所示。

$$G(s) = \frac{200 \left( \frac{s}{5} + 1 \right)}{s \left( \frac{s}{0.5} + 1 \right) \left( \frac{s}{100} + 1 \right)^2}$$

(3) 求  $G_2(s)G_c(s)$  特性

$$G_2(s)G_c(s) = \frac{G_0(s)}{G(s)} = \frac{\left( \frac{s}{0.5} + 1 \right) \left( \frac{s}{100} + 1 \right)}{\left( \frac{s}{5} + 1 \right) \left( \frac{s}{10} + 1 \right)}$$

作出  $G_2(s)G_c(s)$  对数幅频特性, 如图解 6.4.11 中虚线所示。

为使  $G_c(s)$  简单, 取

$$G_2(s)G_c(s) = \frac{2s}{\left( \frac{s}{5} + 1 \right) \left( \frac{s}{10} + 1 \right) \left( \frac{s}{100} + 1 \right)}$$

(4) 检验小闭环稳定性

在  $\omega = \omega_4 = 100$  处,  $G_2(s)G_c(s)$  的相角裕度

$$\gamma(\omega_4) = 180^\circ + 90^\circ - \arctan \frac{100}{5} - \arctan \frac{100}{10} - \arctan \frac{100}{100} = 53.57^\circ$$

故小闭环稳定。

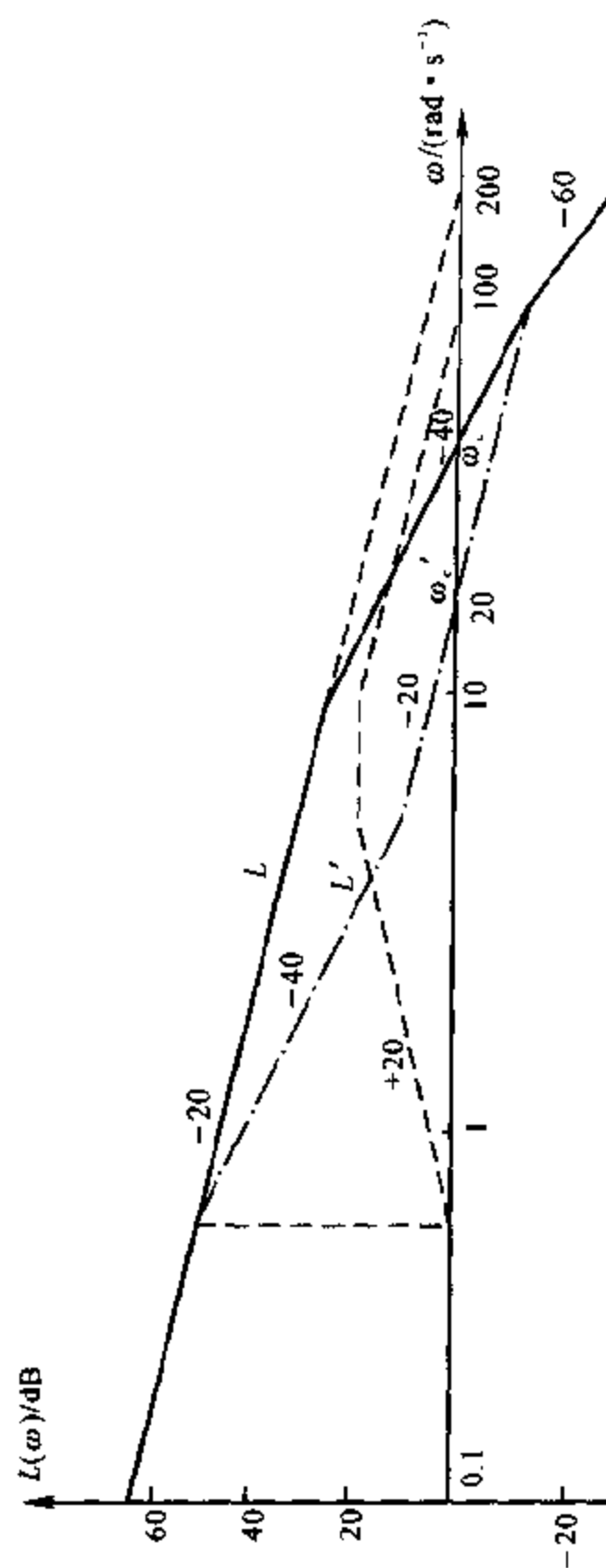
再检验小闭环在  $\omega_c' = 20$  处的幅值

$$20 \lg |G_2(j\omega_c')G_c(j\omega_c')| = 20 \lg \left| \frac{2 \times 20}{\frac{1}{5} \times \frac{1}{10} \times 20^2} \right| = 14 \text{ dB}$$

基本满足  $|G_2(j\omega_c')G_c(j\omega_c')| \gg 1$  的要求, 表明近似程度较高。

(5) 求反馈校正装置传递函数  $G_c(s)$

$$G_c(s) = \frac{G_c(s)G_2(s)}{G_2(s)} = \frac{s}{5 \left( \frac{s}{5} + 1 \right)} = \frac{s}{s+5}$$



图解 6.4.11



(6) 验算指标。

由于满足近似条件,可以直接用期望特性验算:

$$G(s) = \frac{200 \left( \frac{s}{5} + 1 \right)}{s \left( \frac{s}{0.5} + 1 \right) \left( \frac{s}{100} + 1 \right)^2}$$

$$\omega_c' = 20, \quad K_v = 200$$

$$\gamma' = 180^\circ + \angle G(j\omega_c') = 180^\circ + \arctan \frac{20}{5} - 90^\circ - \arctan \frac{20}{0.5} - 2\arctan \frac{20}{100} =$$

$$54.8^\circ > 45^\circ$$

**6.4.12** 在上题中,若要求校正后的系统满足如下性能指标:

- (1) 静态速度误差系数  $K_v \geq 200 \text{ s}^{-1}$ ;
- (2) 在单位阶跃输入下的超调量  $\sigma\% \leq 20\%$ ;
- (3) 在单位阶跃输入下的调节时间  $t_s \leq 2 \text{ s}$ 。

试确定反馈校正装置  $G_c(s)$ 。

**解** 未校正系统开环传递函数

$$G_0(s) = G_1(s)G_2(s)G_3(s) = \frac{K_1}{s \left( \frac{s}{10} + 1 \right) \left( \frac{s}{100} + 1 \right)}$$

$$(1) K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_0(s) = K_1 \geq 200$$

取  $K_1 = 200$

$$G_0(s) = \frac{200}{s \left( \frac{s}{10} + 1 \right) \left( \frac{s}{100} + 1 \right)}$$

作出未校正系统开环传递函数对数幅频特性,如图解 6.4.12 中实线  $L_0$  所示。

(2) 绘制期望对数幅频特性。

将时域指标转换为频域指标:由参考文献[1]中式(6-9)

$$\sigma = 0.16 + 0.4(M_r - 1) \leq 0.2$$

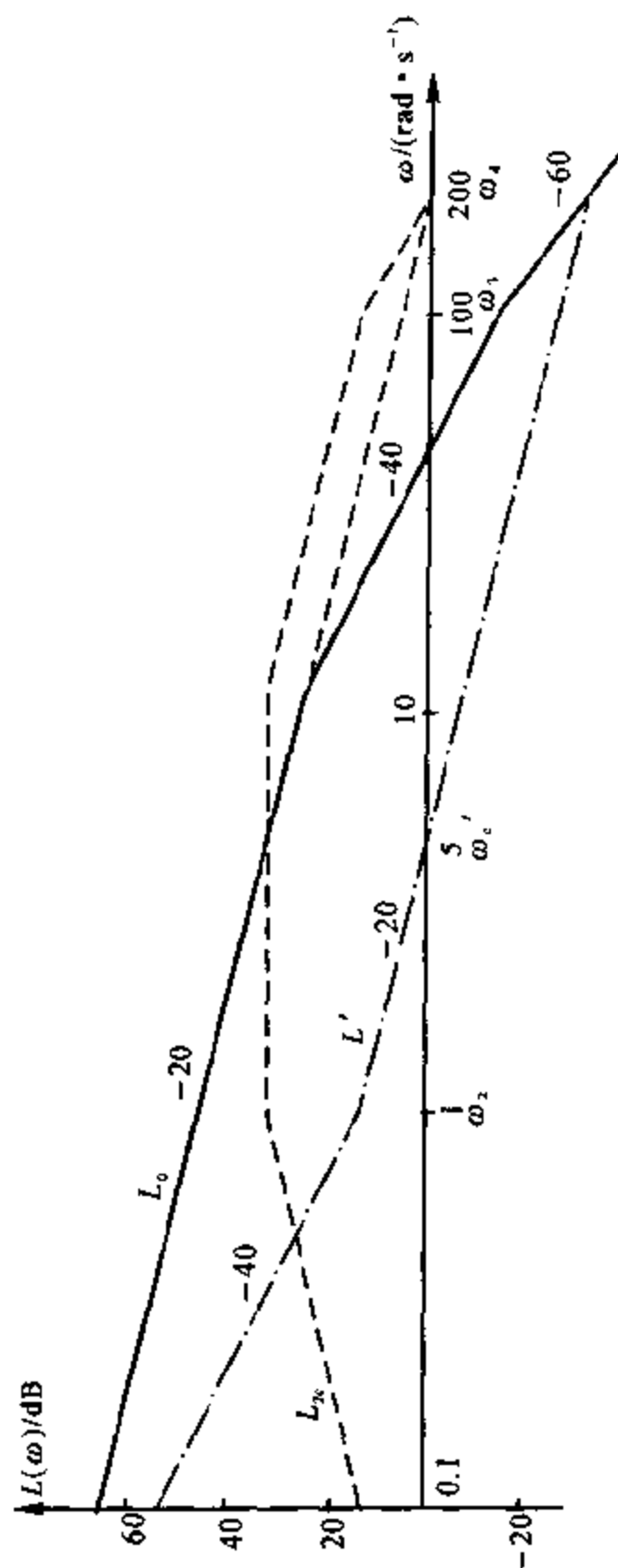
取  $\sigma = 0.2$

$$M_r = 1.1 = \frac{1}{\sin \gamma}$$

$$\gamma = \arcsin \frac{1}{M_r} = 65.38^\circ$$

由参考文献[1]中式(6-10)

$$K_0 = 2 - 1.5(M_r - 1) - 2.5(M_r - 1)^2 = 2.175$$



图解 6.4.12

$$t_s = \frac{K_0 \pi}{\omega_1} \leq 2$$

取

$$t_s = 2$$

$$\omega_c = \frac{K_0 \pi}{t_s} = \frac{2.175\pi}{2} = 3.4165$$

取

$$\omega_c' = 5$$

为使校正装置简单,过  $\omega_c' = 5$  作  $-20$  dB/dec 直线,取  $\omega_3 = 100, \omega_2 = 1$ 。

中频段宽度

$$H = \frac{\omega_3}{\omega_2} = \frac{100}{1} = 100$$

$$\gamma = \arcsin \frac{H-1}{H+1} = \arcsin \frac{99}{101} = 78.6^\circ$$

延长  $-20$  dB/dec 直线与  $L_0$  高频段相交,得交点频率  $\omega_4 = 200$ 。

低频段:过  $\omega_2 = 1$  作  $-40$  dB/dec 直线与  $L_0$  低频段相交,得交点频率  $\omega_1 = 0.05$ 。

高频段:在  $\omega \geq \omega_4$  范围内,取  $L'$  与  $L_0$  一致。

得出期望对数幅频特性:

$$G(s) = \frac{200(s+1)}{s\left(\frac{s}{0.05}+1\right)\left(\frac{s}{100}+1\right)\left(\frac{s}{200}+1\right)}$$

作出 Bode 图,如图解 6.4.12 中点划线  $L'$  所示。

(3) 求  $G_2(s)G_c(s)$  特性

$$G_2(s)G_c(s) = \frac{G_0(s)}{G(s)} = \frac{\left(\frac{s}{0.05}+1\right)\left(\frac{s}{100}+1\right)\left(\frac{s}{200}+1\right)}{(s+1)\left(\frac{s}{10}+1\right)}$$

为使  $G_c(s)$  特性简单,取

$$G_2(s)G_c(s) = \frac{20s}{(s+1)\left(\frac{s}{10}+1\right)\left(\frac{s}{100}+1\right)}$$

(4) 验证小闭环的稳定性

在  $\omega_4 = 200$  处,  $G_2(s)G_c(s)$  的相角裕度

$$\gamma(\omega_4) = 180^\circ + 90^\circ - \arctan 200 - \arctan \frac{200}{10} - \arctan \frac{200}{100} = 29.7^\circ$$

故小闭环稳定,再验算小闭环在  $\omega_c' = 5$  处的幅值:

$$L_{2c} = 20 \lg \frac{1}{0.05} = 26.02 \text{ dB}$$

满足  $|G_2(j\omega_c)G_c(j\omega_c)| \gg 1$  的要求。

(5) 求反馈校正装置传递函数  $G_c(s)$

$$G_c(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{G_2(s)} = \frac{2s}{s+1}$$

(6) 验算指标。由于满足近似条件,可以直接用期望特性验算:

$$K_v = 200, \quad \omega_c' = 5 > 3.4165$$

$$\gamma' = 180^\circ + \arctan 5 - 90^\circ - \arctan \frac{5}{0.05} - \arctan \frac{5}{100} - \arctan \frac{5}{200} =$$

$$74.97^\circ > 65.38^\circ$$

$$\sigma = 0.16 + 0.4(M_r - 1) = 17.42\% < 20\%$$

$$K = 2 + 1.5(M_r - 1) + 2.5(M_r - 1)^2 = 2.064$$

$$t_s = \frac{K\pi}{\omega_c} = \frac{2.064\pi}{5} = 1.3 < 2$$

满足要求。

6.4.13 设系统结构如图 6.4.34 所示。图中

$$G_1(s) = K_1 = 10$$

$$G_2(s) = \frac{20}{\left(1 + \frac{s}{20}\right)\left(1 + \frac{s}{200}\right)}$$

$$G_3(s) = \frac{1}{s}$$

若希望反馈校正后系统的相角裕度  $\gamma(\omega_c) \geq 50^\circ$ , 截止频率  $\omega_c \geq 30$  rad/s, 试确定反馈校正装置  $G_c(s)$ 。

解 (1) 绘制未校正系统的开环对数幅频特性

$$G_0(s) = G_1(s)G_2(s)G_3(s) = \frac{200}{s\left(\frac{s}{20} + 1\right)\left(\frac{s}{200} + 1\right)}$$

$$\omega_c = \sqrt{20 \times 200} = 63.25$$

画 Bode 图如图解 6.4.13 中实线  $L_0$  所示。

(2) 绘制期望对数幅频特性

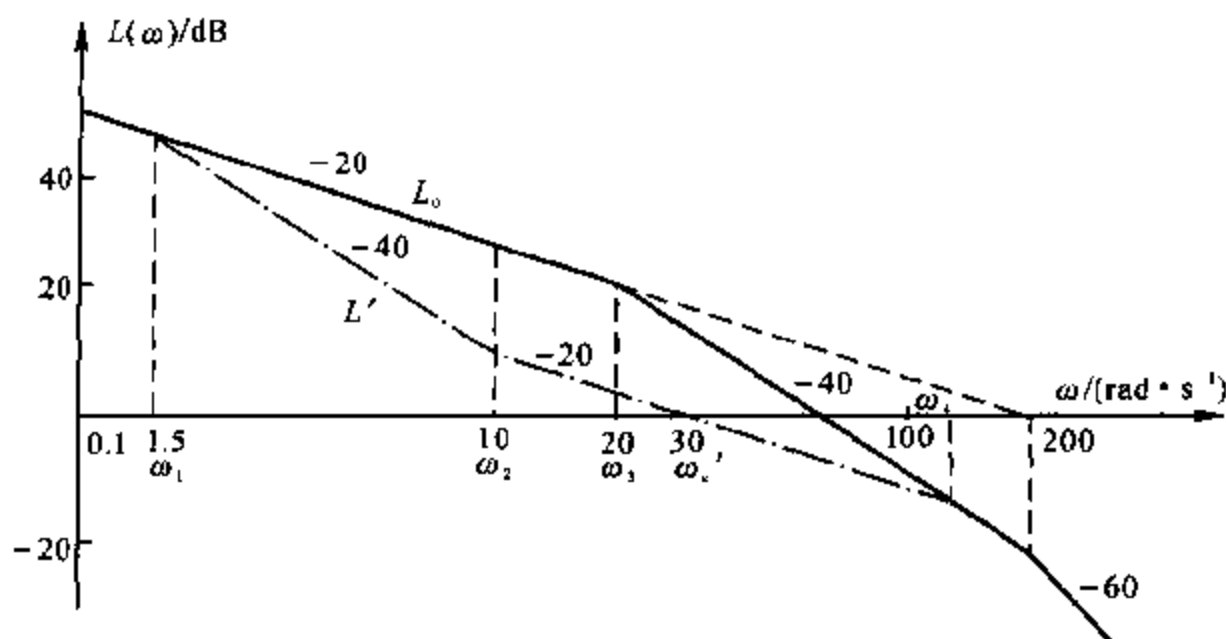
在  $\omega_c' = 30$  处作  $-20$  dB/dec 直线交于  $L_0$  高频段, 交点频率  $\omega_1$ 。

$$\omega_1 = \frac{\omega_c'^2}{\omega_c} = \frac{4\,000}{30} = 133.3$$

取  $\omega_2 = 10$ , 过  $\omega_2$  作  $-40$  dB/dec 直线与  $L_0$  低频段相交, 取交点频率

$$\omega_1 = 10 \times \frac{30}{200} = 1.5$$

定出期望频率特性,其 Bode 图如图解 6.4.13 中点划线  $L'$  所示。



图解 6.4.13

$$G(s) = \frac{200 \left( \frac{s}{10} + 1 \right)}{s \left( \frac{s}{1.5} + 1 \right) \left( \frac{s}{133.3} + 1 \right) \left( \frac{s}{200} + 1 \right)}$$

(3) 求  $G_2(s)G_c(s)$  特性

$$G_2(s)G_c(s) = \frac{G_0(s)}{G(s)} = \frac{\left( \frac{s}{1.5} + 1 \right) \left( \frac{s}{133.3} + 1 \right)}{\left( \frac{s}{10} + 1 \right) \left( \frac{s}{20} + 1 \right)}$$

为了使  $G_2(s)G_c(s)$  特性简单,取

$$G_2(s)G_c(s) \approx \frac{0.667s}{\left( \frac{s}{10} + 1 \right) \left( \frac{s}{20} + 1 \right) \left( \frac{s}{200} + 1 \right)}$$

(4) 验证小闭环稳定性

在  $\omega_4 = 133.3$  处,  $G_2(s)G_c(s)$  的相角裕度

$$\gamma(\omega_4) = 180^\circ + 90^\circ - \arctan \frac{133.3}{10} - \arctan \frac{133.3}{20} - \arctan \frac{133.3}{200} = 69.13^\circ$$

故小闭环稳定,再检验小闭环在  $\omega_c' = 30$  处的幅值:

$$20\lg |G_c(j\omega_c')G_2(j\omega_c')| = 20\lg \frac{133.3}{30} = 13 \text{ dB}$$

基本满足  $|G_2(j\omega_c)G_c(j\omega_c)| \gg 1$  的要求, 表明结果的近似程度较高。

(5) 求反馈校正装置传递函数  $G_c(s)$

$$G_c(s) = \frac{G_c(s)G_2(s)}{G_2(s)} = \frac{0.033s}{\frac{s}{10} + 1}$$

(6) 验算指标。直接用希望特性验算:

$$\omega_c' = 30$$

$$\gamma' = 180^\circ + \angle G(j\omega_c') = 180^\circ + \arctan \frac{30}{10} - 90^\circ - \arctan \frac{30}{1.5} -$$

$$\arctan \frac{30}{133.3} - \arctan \frac{30}{200} = 53.22^\circ > 50^\circ$$

满足要求。

6.4.14 设复合校正控制系统如图 6.4.45 所示。若要求闭环回路过阻尼, 且系统在斜坡输入作用下的稳态误差为零, 试确定  $K$  值及前馈补偿装置  $G_r(s)$ 。

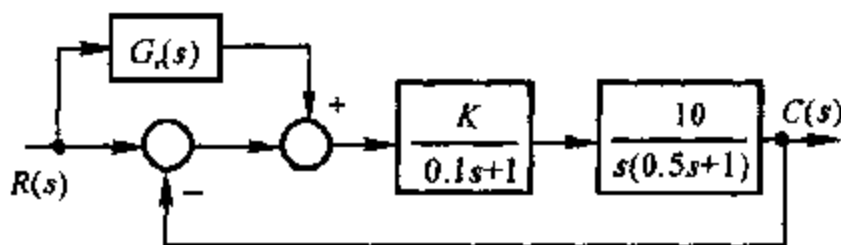


图 6.4.45 复合控制系统

$$\begin{aligned} \text{解 } \Phi_e(s) &= \frac{1 - G_r(s) \frac{K}{0.1s+1} \cdot \frac{10}{s(0.5s+1)}}{1 + \frac{K}{0.1s+1} \cdot \frac{10}{s(0.5s+1)}} = \\ &= \frac{s(0.1s+1)(0.5s+1) - 10KG_r(s)}{s(0.1s+1)(0.5s+1) + 10K} \end{aligned}$$

斜坡输入时,  $r(t) = t, R(s) = \frac{1}{s^2}$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \Phi_e(s) \frac{1}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(0.1s+1)(0.5s+1) - \frac{10K}{s}G_r(s)}{s(0.1s+1)(0.5s+1) + 10K} = 0$$

得

$$G_r(s) = \frac{s}{10K}$$

系统开环传递函数

$$G(s) = \frac{10K}{s(0.1s+1)(0.5s+1)} = \frac{200K}{s(s+2)(s+10)}$$

$$D(s) = s^3 + 12s^2 + 20s + 200K = 0$$

求根轨迹分离点

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+10} = 0$$

$$3s^2 + 24s + 20 = 0$$

求出分离点

$$s_d = -0.945$$

对应

$$K_d = \frac{|s_d| |s_d + 2| |s_d + 10|}{200} = 0.045$$

当  $0 < K < 0.045$  时, 系统为过阻尼

$$G_r(s) = r^{\tau}$$

$$\left( \tau = \frac{1}{10K} > 2.215 \right)$$

**6.4.15** 设复合校正控制系统如图 6.4.46 所示, 其中  $N(s)$  为可量测扰动。若要求系统输出  $C(s)$  完全不受  $N(s)$  的影响, 且跟踪阶跃指令的误差为零, 试确定前馈补偿装置  $G_{c1}(s)$  和串联校正装置  $G_{c2}(s)$ 。

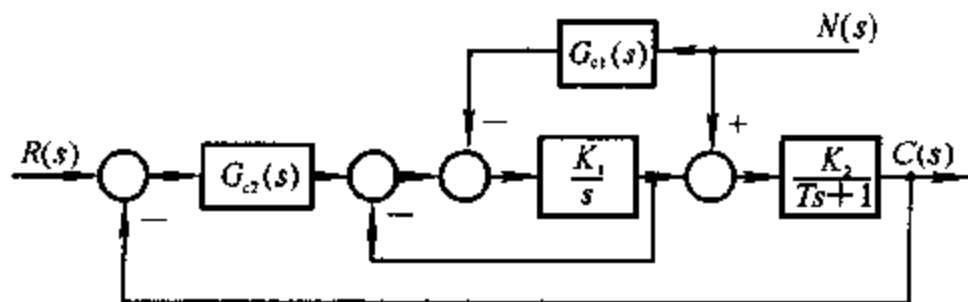


图 6.4.46 复合控制系统

**解** (1) 求  $G_{c1}(s)$

$$\Phi_N(s) = \frac{C(s)}{N(s)} = \frac{\frac{K_2}{Ts+1} \left( 1 + \frac{K_1}{s} \right) - G_{c1}(s) \frac{K_1 K_2}{s(Ts+1)}}{1 + \frac{K_1}{s} + \frac{K_1 K_2 G_{c2}(s)}{s(Ts+1)}} = 0$$

$$\frac{K_2(s+K_1) - K_1 K_2 G_{c1}(s)}{s(Ts+1) + K_1 + K_1 K_2 G_{c2}(s)} = 0$$

得

$$G_{c1}(s) = \frac{s+K_1}{K_1} = \frac{s}{K_1} + 1$$

(2) 求  $G_{c2}(s)$

$$\Phi_e(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1 + \frac{K_1}{s}}{1 + \frac{K_1}{s} + \frac{K_1 K_2 G_{c2}(s)}{s(Ts+1)}} = \frac{(s+K_1)(Ts+1)}{s(Ts+1) + K_1(Ts+1) + K_1 K_2 G_{c2}(s)}$$

令  $r(t) = 1(t), \quad R(s) = \frac{1}{s}$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \Phi_e(s) \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(s+K_1)(Ts+1)}{s(Ts+1) + K_1(Ts+1) + K_1 K_2 G_{c2}(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K_1}{K_1 + K_1 K_2 G_{c2}(s)} = 0$$

得  $G_{c2}(s) = \frac{1}{s}$

6.4.16 设复合控制系统如图 6.4.47 所示, 图中  $G_n(s)$  为前馈补偿装置的传递函数,  $G_c(s) = K_1 s$  为测速发电机及分压电位器的传递函数,  $G_1(s)$  和  $G_2(s)$  为前向通路环节的传递函数,  $N(s)$  为可量测扰动。如果

$$G_1(s) = K_1, \quad G_2(s) = \frac{1}{s^2}$$

试确定  $G_n(s)$ ,  $G_c(s)$  和  $K_1$ , 使系统输出量完全不受扰动的影响, 且单位阶跃响应的超调量  $\sigma\% = 5\%$ , 峰值时间  $t_p = 2\text{ s}$ 。

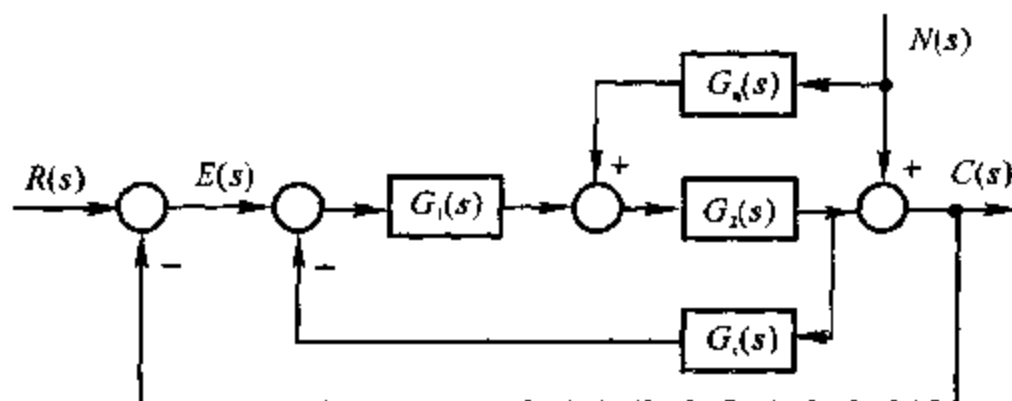


图 6.4.47 复合控制系统

解 (1) 求  $G_n(s)$

由梅森增益公式



$$\begin{aligned}\Phi_N(s) &= \frac{C(s)}{N(s)} = \frac{(1 + G_1 G_2 G_c) + G_n G_2}{1 + G_1 G_2 G_c + G_1 G_2} = \\ &= \frac{1 + \frac{K_1}{s} G_c(s) + \frac{1}{s^2} G_n(s)}{1 + \frac{K_1}{s^2} G_c(s) + \frac{K_1}{s^2}} = \frac{s^2 + K_1 G_c(s) + G_n(s)}{s^2 + K_1 G_c(s) + K_1}\end{aligned}$$

当  $\Phi_N(s) = 0$  时, 可使系统输出量完全不受扰动的影响。

$$\Phi_N(s) = 0$$

$$\text{有 } G_n(s) = -[s^2 + K_1 G_c(s)] = -(s^2 + K_1 K'_1 s) = -s(s + K_1 K'_1)$$

(2) 求  $K'_1$ , 由梅森增益公式

$$\begin{aligned}\Phi(s) &= \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1 G_2}{1 + G_2 G_2 G_c + G_1 G_1} = \\ &= \frac{\frac{K_1}{s^2}}{1 + \frac{K_1}{s^2} K'_1 s + \frac{K_1}{s^2}} = \frac{K_1}{s^2 + K_1 K'_1 s + K_1} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}\end{aligned}$$

$$\text{有 } \begin{cases} \omega_n = \sqrt{K_1} \\ \zeta = \frac{K'_1 \sqrt{K_1}}{2} \end{cases}$$

$$\text{由 } \begin{cases} \sigma\% = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} = 0.25 \\ t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} = 2 \end{cases}$$

$$\text{有 } \begin{cases} \zeta = 0.403 \\ \omega_n = 1.72 \end{cases}$$

$$\text{故有 } \begin{cases} K_1 = \omega_n^2 = 2.946 \\ K'_1 = \frac{2\zeta\omega_n}{K_1} = 0.47 \end{cases}$$

$$G_c(s) = K'_1 s = 0.47s$$

$$G_n(s) = -s(s + K_1 K'_1) = -s(s + 1.386)$$

6.4.17 设复合控制系统如图 6.4.39 所示。图中

$$G_1(s) = K_1, \quad K_1 = 2$$

$$G_2(s) = \frac{K_2}{s(s + 2\zeta)}, \quad K_2 = 50, \zeta = 0.5$$

$$G_r(s) = \frac{\lambda_2 s^2 + \lambda_1 s}{Ts + 1}, \quad T = 0.2$$

试确定  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  的数值,使系统等效为 III 型系统,并讨论寄生因式  $(Ts+1)$  对系统稳定性和动态性能的影响。

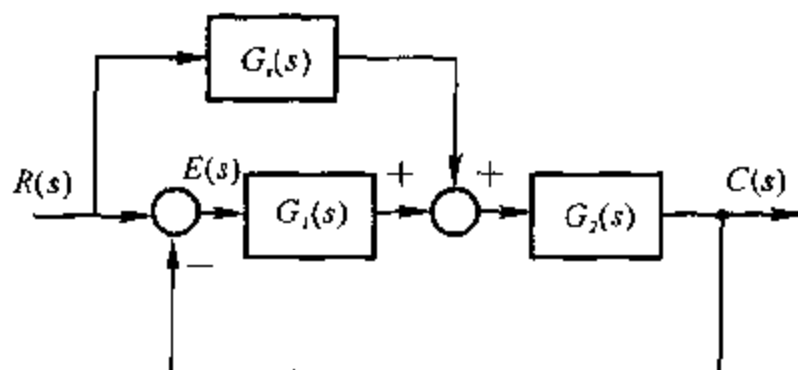


图 6.4.39

解 系统闭环传递函数

$$\begin{aligned}\Phi(s) &= \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s) + G_r(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} = \\ &= \frac{\frac{K_1 K_2}{s(s+2\xi)} + \frac{K_2(\lambda_2 s + \lambda_1)}{(s+2\xi)(Ts+1)}}{1 + \frac{K_1 K_2}{s(s+2\xi)}} = \\ &= \frac{K_2 \lambda_2 s^2 + (K_1 K_2 T + K_2 \lambda_1)s + K_1 K_2}{(s^2 + 2\xi s + K_1 K_2)(Ts+1)}\end{aligned}$$

等效误差传递函数

$$\Phi_e(s) = 1 - \Phi(s) = \frac{Ts^3 + (2\xi T + 1 - K_2 \lambda_2)s^2 + (2\xi + K_2 \lambda_1)s}{(s^2 + 2\xi s + K_1 K_2)(Ts+1)}$$

$$\text{令} \quad \begin{cases} 2\xi T + 1 - K_2 \lambda_2 = 0 \\ 2\xi + K_2 \lambda_1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{得} \quad \begin{cases} \lambda_1 = \frac{2\xi T + 1}{K_2} = 0.024 \\ \lambda_2 = \frac{2\xi}{K_2} = 0.02 \end{cases}$$

此时可将系统等效为 III 型系统。

由  $\Phi(s)$  可以看出:引入  $(Ts+1)$  因子,相当于闭环系统在原有两个闭环极点的基础上又引入了一个附加闭环极点,由于二阶因子的阻尼比  $\xi = 0.5$ ,原系统响应为欠阻尼振荡过程,因此  $(Ts+1)$  因子的作用是使系统的超调量减小,调节时间缩短,有利于改善系统的动态性能。

---

需注意的是:若 $(Ts+1)$ 因子中时间常数过大,会使系统响应变为无超调过程,调节时间反而增大,这样会降低系统的快速性。

## 第 7 章 线性离散系统的分析与校正

---

### 7.1 重点内容提要

#### 7.1.1 离散系统的基本概念

控制系统中有一处或几处信号是一串脉冲或数码时,称为离散时间控制系统,简称离散系统。

离散系统中的离散信号是脉冲序列形式时,称为采样控制系统或脉冲控制系统。这时离散信号是时间上离散,而幅值上是连续的信号。

离散系统中的离散信号是数码序列形式时,称为数字控制系统或计算机控制系统。这时离散信号是时间和幅值上都离散的信号。

在理想采样及忽略量化误差情况下,数字控制系统近似于采样控制系统,统称离散系统。

#### 7.1.2 信号采样与保持的数学描述

##### 1. 采样

周期为  $T$  的等周期理想采样开关,可用单位脉冲序列描述

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

采样信号  $e^*(t)$  是连续信号  $e(t)$  调制在载波  $\delta_T(t)$  的结果,可描述为

$$e^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e(nT) \delta(t - nT)$$

##### 2. 连续信号与离散信号频谱的关系

非周期连续信号  $e(t)$  的频谱是频域中的连续非周期信号,可用傅氏变换描述为

$$E(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e(t) e^{-j\omega t} dt$$

周期为  $T$  的采样信号  $e^*(t)$  的频谱为

$$E^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} E[j(\omega + n\omega_s)]$$

$\omega_s$  为采样角频率。采样信号的频谱  $E^*(j\omega)$  是连续信号的频谱  $E(j\omega)$  以  $\omega_s$  为周期的延拓。

### 3. 香农采样定理

当连续信号  $e(t)$  的频谱  $E(j\omega)$  所含最高角频率为  $\omega_h$  时, 如果

$$\omega_s \geq 2\omega_h \quad \text{或} \quad T \leq \frac{\pi}{\omega_h}$$

离散信号高频段的频谱不与低频段频谱(等于连续信号的频谱)产生混叠, 可通过低通滤波器滤掉高频信号, 而保留低频段连续信号的频谱, 从而, 无失真地将离散信号恢复为连续信号。

### 4. 信号保持

实现采样信号向连续信号的转换。通常由零阶保持器完成, 可将某时刻的采样值保持到下一时刻, 传递函数为

$$G_h(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$$

频率特性为

$$G_h(j\omega) = T \frac{\sin\omega T/2}{\omega T/2} e^{-j\omega T/2}$$

从频谱分析可知, 它近似为带宽为  $\omega_c$  的低通滤波器。

## 7.1.3 z 变换理论

### 1. z 变换的定义

采样信号  $e^*(t)$  的拉氏变换为

$$E^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT) e^{-nsT}$$

$E^*(s)$  为  $s$  的超越函数, 引入算子  $z$

$$z = e^{sT}$$

采样信号  $e^*(t)$  的  $z$  变换为

$$E(z) = Z[e^*(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT) z^{-n}$$

$E(z)$  为  $z$  的有理分式或幂级数函数形式。

2.  $z$  变换方法

## (1) 级数求和法:

由  $z$  变换的定义

$$E(z) = Z[e^*(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT)z^{-n}$$

将连续信号  $e(t)$ , 按周期  $T$  进行采样, 将采样点处的值代入上式, 可得

$$E(z) = e(0) + e(T)z^{-1} + e(2T)z^{-2} + \cdots + e(nT)z^{-n} + \cdots$$

再求出上式的闭合算式, 即可求得  $E(z)$ 。

## (2) 部分分式法(查表法):

先求出连续信号  $e(t)$  的拉氏变换  $E(s)$ , 将  $E(s)$  展开成部分分式之和

$$E(s) = E_1(s) + E_2(s) + \cdots + E_n(s)$$

且每一个部分分式都是  $z$  变换表中所对应的标准函数形式, 其  $z$  变换即可查得, 进一步求和可得

$$E(z) = E_1(z) + E_2(z) + \cdots + E_n(z)$$

3.  $z$  反变换方法

## (1) 部分分式法(查表法):

先求  $E(z)$  的极点, 然后将  $\frac{E(z)}{z}$  展成部分分式之和

$$\frac{E(z)}{z} = E_1(z) + E_2(z) + \cdots + E_n(z)$$

$E(z)$  可表示为

$$E(z) = zE_1(z) + zE_2(z) + \cdots + zE_n(z)$$

上式中  $zE_1(z), zE_2(z), \cdots, zE_n(z)$  是  $z$  变换表中的标准形式, 查表可得  $e_1^*(t), e_2^*(t), \cdots, e_n^*(t)$ , 将它们求和可得

$$e^*(t) = e_1^*(t) + e_2^*(t) + \cdots + e_n^*(t)$$

## (2) 幂级数法:

将  $E(z)$  表示为按  $z^{-1}$  升幂排列的两个多项式之比, 进行多项式除法后, 可得到按  $z^{-1}$  升幂排列的幂级数展开式

$$E(z) = c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \cdots + c_n z^{-n} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{-n}$$

由  $z$  变换定义, 上式中的系数  $c_n (n=0, 1, 2, \cdots, \infty)$  就是采样信号  $e^*(t)$  在每个采样点的脉冲强度  $e(nT)$ , 则采样信号

$$e^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \delta(t - nT)$$

(3) 反演积分法(留数法):

先求  $E(z)z^{r-1}$  的极点  $z_i (i = 1, 2, \dots, k)$ , 则在采样瞬时相应的信号序列为

$$e(nT) = \sum_{i=1}^k \text{Res}[E(z)z^{r-1}]_{z=z_i}$$

其中函数  $E(z)z^{r-1}$  在极点  $z_i$  处的留数计算如下

$$\text{Res}[E(z)z^{r-1}]_{z=z_i} = \frac{1}{(s-1)!} \left\{ \frac{d^{s-1}}{dz^{s-1}} [(z-z_i)^s E(z)z^{r-1}] \right\}_{z=z_i}$$

其中  $s$  为极点  $z_i$  的个数。

#### 4. $z$ 变换应注意的问题

(1)  $z$  变换只反映信号在采样点的信息, 而不能描述采样间隔中信号的状态, 因此, 它与采样序列相对应, 与连续信号并不一一对应。

(2) 用同一采样周期对不同的连续信号进行采样, 可能得到相同的离散序列和相应的  $z$  变换, 因此,  $z$  反变换的结果存在不惟一性。如果在  $z$  反变换时考虑  $z$  变换的收敛区间, 则可以得到惟一的  $z$  反变换结果。

### 7.1.4 离散系统的数学模型

#### 1. 线性定常离散系统的差分方程

(1) 差分方程定义:

当采样周期  $T$  等于 1 时, 线性定常离散系统的差分方程可表示为

$$c(k) = - \sum_{i=1}^n a_i c(k-i) + \sum_{j=0}^m b_j r(k-j)$$

式中  $a_i (i = 1, 2, \dots, n)$  和  $b_j (j = 0, 1, 2, \dots, m)$  为常数, 且  $m \leq n$ 。

(2) 差分方程的解法:

线性定常离散系统差分方程的解法有经典法, 迭代法及  $z$  变换法。下面给出  $z$  变换法。

利用  $z$  变换的实位移定理以及初始条件, 对线性定常离散系统差分方程两端取  $z$  变换, 整理后得到  $C(z)$ , 进一步求  $C(z)$  的  $z$  反变换可得  $c^*(t)$ 。

#### 2. 脉冲传递函数

(1) 脉冲传递函数的定义:

设图 7.1.1 所示的开环采样系统的初始条件为零, 输入序列的  $z$  变换为

$R(z)$ , 输出序列的  $z$  变换为  $C(z)$ , 则线性定常离散系统的脉冲传递函数定义为

$$G(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} c(nT)z^{-n}}{\sum_{n=0}^{\infty} r(nT)z^{-n}}$$

图 7.1.1 开环离散系统

设系统的单位脉冲响应序列为  $k(nT)$ , 输入序列为  $r(nT)$ , 则线性定常离散系统输出序列  $c(nT)$  是  $k(nT)$  与  $r(nT)$  的卷积

$$c(nT) = k(nT) * r(nT) = \sum_{m=0}^n k[(n-m)T]r(mT) = \sum_{m=0}^{\infty} k(mT)r[n-m)T]$$

由时域卷积定理

$$C(z) = K(z)R(z)$$

上式中  $C(z)$  是离散系统输出序列  $c(nT)$  的  $z$  变换,  $R(z)$  是输入序列  $r(nT)$  的  $z$  变换,  $K(z)$  是单位脉冲响应序列  $k(nT)$  的  $z$  变换, 结合脉冲传递函数的定义

$$G(z) = K(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} k(nT)z^{-n}$$

即线性定常离散系统的脉冲传递函数  $G(z)$  是单位脉冲响应序列  $k(nT)$  的  $z$  变换, 即  $K(z)$ 。

## (2) 脉冲传递函数求法:

1) 由差分方程求脉冲传递函数。用  $z$  变换的实位移定理, 并假设初始条件为零, 对差分方程两端取  $z$  变换, 整理后得到  $C(z)$ , 用  $C(z)$  除以  $R(z)$  可得脉冲传递函数  $G(z)$ 。

2) 由传递函数求脉冲传递函数。传递函数  $G(s)$  的拉式反变换是单位脉冲响应函数  $k(t)$ , 将  $k(t)$  离散化得单位脉冲响应序列  $k(nT)$ , 将  $k(nT)$  进行  $z$  变换得  $G(z)$ , 这一变换过程可表示如下

$$G(s) \Rightarrow L^{-1}[G(s)] = k(t) \Rightarrow \text{离散化 } k(t) = k(nT) \Rightarrow Z[k(nT)] = G(z)$$

上式表明,  $G(s)$  到  $G(z)$  的变换, 中间过程可以省略, 只要将  $G(s)$  表示成  $z$  变换表中的标准形式, 直接查表可得  $G(z)$ 。具体做法: 将  $G(s)$  展开成部分分式之和

$$G(s) = G_1(s) + G_2(s) + \cdots + G_n(s)$$

上式中每一个部分分式都是  $z$  变换表中所对应的标准函数, 其  $z$  变换即可查表得到, 进一步求和, 可求出脉冲传递函数

$$G(z) = G_1(z) + G_2(z) + \cdots + G_n(z)$$



## (3) 开环脉冲传递函数求法:

1) 串联环节之间有采样开关。由若干个环节串联的开环离散系统,如果环节之间均有同步采样开关,则系统总脉冲传递函数等于各组成环节脉冲传递函数的乘积。

2) 串联环节之间无采样开关。由若干个环节串联的开环离散系统,如果环节之间均无同步采样开关,则系统总脉冲传递函数等于各组成环节传递函数乘积后的  $z$  变换。

3) 串联环节中有零阶保持器。如图 7.1.2 所示,  $G_h(s)$  是零阶保持器,  $G_p(s)$  是连续部分的传递函数,两串联环节之间无同步采样开关,开环系统的脉冲传递函数为

$$G(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = (1 - z^{-1}) Z \left[ \frac{G_p(s)}{s} \right]$$

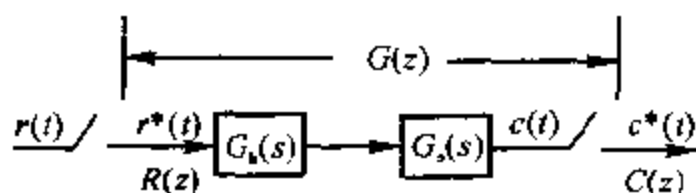


图 7.1.2 有零阶保持器的开环离散系统

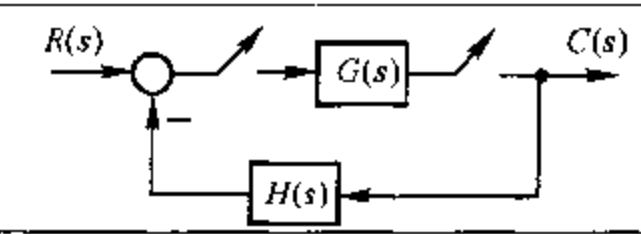
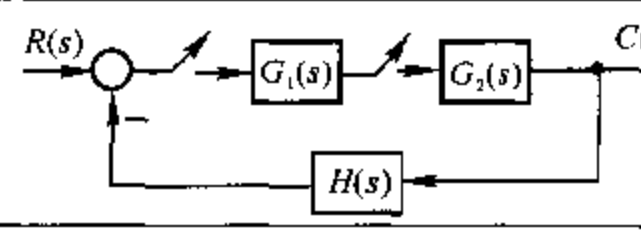
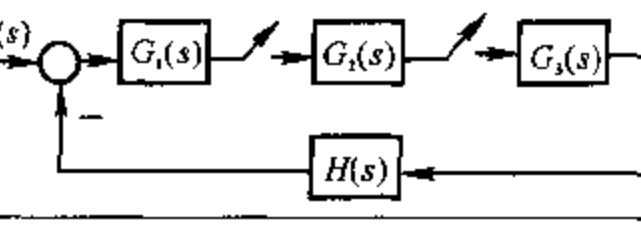
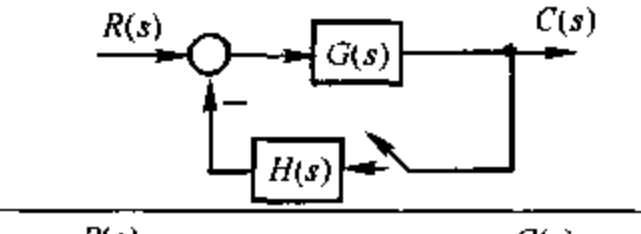
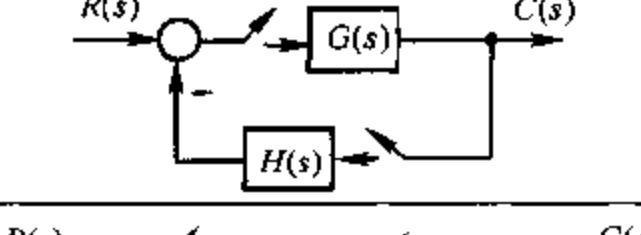
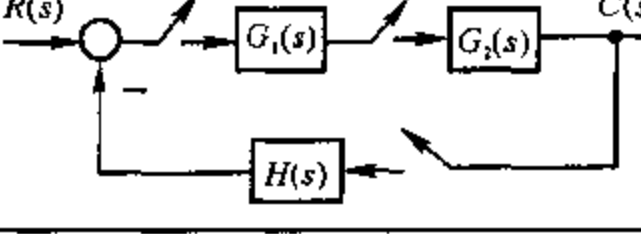
## (4) 闭环脉冲传递函数求法:

闭环脉冲传递函数根据采样开关位置的不同有不同的形式,通常根据脉冲传递函数的定义以及上述开环脉冲传递函数三种求法,对闭环脉冲传递函数进行求解。典型闭环离散系统及输出  $z$  变换函数如表 7.1.1 所示。

表 7.1.1 典型闭环离散系统及输出  $z$  变换函数

序号	系统结构图	$C(z)$ 计算式
1		$\frac{G(z)R(z)}{1 + GH(z)}$
2		$\frac{RG_1(z)G_2(z)}{1 + G_2HG_1(z)}$

续表

序号	系统结构图	$C(z)$ 计算式
3		$\frac{G(z)R(z)}{1 + G(z)H(z)}$
4		$\frac{G_1(z)G_2(z)R(z)}{1 + G_1(z)G_2(z)H(z)}$
5		$\frac{RG_1(z)G_2(z)G_3(z)}{1 + G_2(z)G_1G_3H(z)}$
6		$\frac{RG(z)}{1 + HG(z)}$
7		$\frac{R(z)G(z)}{1 + G(z)H(z)}$
8		$\frac{G_1(z)G_2(z)R(z)}{1 + G_1(z)G_2(z)H(z)}$

### 7.1.5 离散系统的稳定性与稳态误差

#### 1. $s$ 域到 $z$ 域的映射

在  $z$  变换定义中引入了算子

$$z = e^{sT}$$

而  $s$  平面中的任意点可用复数表示为

$$s = \sigma + j\omega$$

将  $s$  映射  $z$  域

$$z = e^{(\sigma + j\omega)T} = e^{\sigma T} e^{j\omega T}$$

由上式可得  $s$  域到  $z$  域的映射关系如下

$$|z| = e^{\sigma T}, \quad \angle z = \omega T$$

$$(1) \sigma = 0, |z| = 1, \angle z = \omega T$$

将  $s$  平面的虚轴映射到  $z$  平面的单位圆上。

$$(2) \sigma < 0, |z| < 1, \angle z = \omega T$$

将  $s$  平面的左半平面映射到  $z$  平面的单位圆内。

$$(3) \sigma > 0, |z| > 1, \angle z = \omega T$$

将  $s$  平面的右半平面映射到  $z$  平面的单位圆外

由于  $e^{j\omega T}$  的周期为采样角频率  $\omega_s$ , 因此, 在  $s$  平面,  $\omega$  沿虚轴从  $-\infty$  变到  $+\infty$  时, 每经过一个  $\omega_s$ , 映射到  $z$  平面

$$\angle z = \omega_s T = 2\pi f_s T = \frac{2\pi}{T} T = 2\pi$$

正好转了一圈, 因此,  $s$  域到  $z$  域是多值映射。

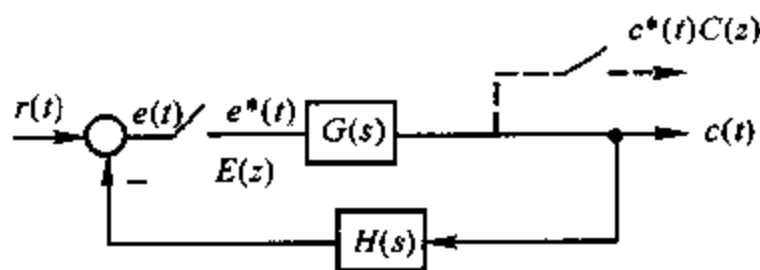


图 7.1.3 非单位反馈离散系统

## 2. 离散系统稳定性分析

### (1) 稳定的充要条件

线性定常离散系统稳定的充要条件是: 闭环脉冲传递函数的极点或离散特征方程的根全部位于  $z$  平面的单位圆内。

### (2) 稳定性判据

#### 1) $w$ 变换与劳思稳定判据

将如图 7.1.3 所示的线性定常离散系统在  $z$  域的特征方程  $1 + GH(z) = 0$ ,

作以下变换

$$z = \frac{w+1}{w-1}$$

可转变为  $w$  域的特征方程  $1+GH(w)=0$ 。由于  $z$  平面的单位圆内的部分可映射到  $w$  平面的左半平面, 因此, 可根据  $w$  域特征方程的系数, 利用劳思稳定判据, 判断线性定常离散系统的稳定性。值得注意的是: 闭环离散系统由于采样开关位置不同, 闭环脉冲传递函数不同, 相应的特征方程也不同。

## 2) 朱利稳定判据

高阶闭环离散系统特征方程作  $w$  变换会变得很复杂, 而朱利判据是直接由  $z$  域内应用的稳定判据, 设线性定常离散系统在  $z$  域的闭环特征方程

$$D(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$$

其中

$$a_n > 0$$

排出朱利阵列如表 7.1.2 所示, 其中第一行是特征方程的系数, 偶数行的元素是奇数行元素的反顺序排列, 阵列中的元素定义如下

$$b_k = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-k} \\ a_n & a_k \end{vmatrix}, \quad k = 0, 1, \cdots, n-1$$

$$c_k = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-k-1} \\ b_{n-1} & b_k \end{vmatrix}, \quad k = 0, 1, \cdots, n-2$$

$$d_k = \begin{vmatrix} c_0 & c_{n-k-2} \\ c_{n-2} & c_k \end{vmatrix}, \quad k = 0, 1, \cdots, n-3$$

.....

$$q_0 = \begin{vmatrix} p_0 & p_3 \\ p_3 & p_0 \end{vmatrix}; \quad q_1 = \begin{vmatrix} p_0 & p_2 \\ p_3 & p_1 \end{vmatrix}; \quad q_2 = \begin{vmatrix} p_0 & p_1 \\ p_3 & p_2 \end{vmatrix}$$

线性定常离散系统稳定的充要条件为

$$D(1) > 0, \quad D(-1) \begin{cases} > 0, n \text{ 为偶数} \\ < 0, n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

且满足以下  $n-1$  个约束条件

$$|a_0| < a_n, |b_0| > |b_{n-1}|, |c_0| > |c_{n-2}|, \cdots, |q_0| > |q_2|$$

当以上诸条件均满足时, 系统稳定, 否则不稳定。

表 7.1.2 朱利阵列

行数	$z^0$	$z^1$	$z^2$	$z^3$	...	$z^{n-k}$	...	$z^{n-1}$	$z^n$
1	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	...	$a_{n-k}$	...	$a_{n-1}$	$a_n$
2	$a_n$	$a_{n-1}$	$a_{n-2}$	$a_{n-3}$	...	$a_k$	...	$a_1$	$a_0$
3	$b_0$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	...	$b_{n-k}$	...	$b_{n-1}$	
4	$b_{n-1}$	$b_{n-2}$	$b_{n-3}$	$b_{n-4}$	...	$b_{k-1}$	...	$b_0$	
5	$c_0$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	...	$c_{n-2}$			
6	$c_{n-2}$	$c_{n-3}$	$c_{n-4}$	$c_{n-5}$	...	$c_0$			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$					
$2n-5$	$p_0$	$p_1$	$p_2$	$p_3$					
$2n-4$	$p_3$	$p_2$	$p_1$	$p_0$					
$2n-3$	$q_0$	$q_1$	$q_2$						

## 3. 离散系统稳态误差计算

## (1) 一般方法

步骤:

- 1) 判定系统的稳定性, 如系统稳定才能算稳态误差;
- 2) 求误差脉冲传递函数  $\Phi_e(z)$ ;
- 3) 用  $z$  域的终值定理计算稳态误差

$$e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)E(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)\Phi_e(z)R(z)$$

## (2) 静态误差系数法

对图 7.1.4 所示的单位反馈误差采样离散系统, 可利用静态误差系数法求离散系统稳态误差。步骤如下:

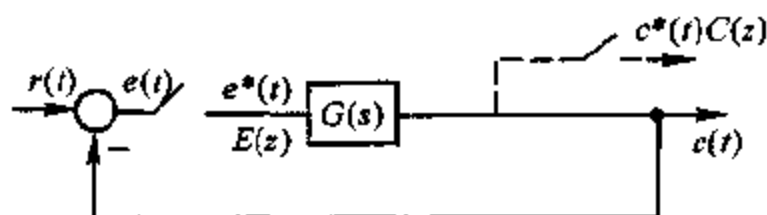


图 7.1.4 单位反馈离散系统

- 1) 判定系统的稳定性, 如系统稳定才能算稳态误差;
- 2) 确定系统的型别, 求系统的静态误差系数;

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} [1 + G(z)], \quad K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)G(z), \quad K_a = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 G(z)$$

3) 用表 7.1.3 计算系统稳态误差  $e_{ss}$ 。

表 7.1.3 典型输入作用下的稳态误差

系统型别	位置误差 $r(t) = 1(t)$	速度误差 $r(t) = t$	加速度误差 $r(t) = \frac{1}{2}t^2$
0 型	$1/K_p$	$\infty$	$\infty$
I 型	0	$T/K_v$	$\infty$
II 型	0	0	$T^2/K_a$

## 7.1.6 离散系统的动态性能分析

### 1. 时间响应与性能指标

离散系统闭环脉冲传递函数

$$\Phi(z) = \frac{C(z)}{R(z)}$$

假设输入为单位阶跃序列, 则系统输出量的  $z$  变换

$$C(z) = \Phi(z)R(z) = \frac{z}{z-1}\Phi(z)$$

将上式进行  $z$  反变换后, 可以得到输出信号的脉冲序列  $c^*(t)$ , 根据连续系统的性能指标定义, 利用  $c^*(t)$  可方便地分析离散系统的动态和稳态性能。

### 2. 闭环极点与动态响应的关系

离散系统闭环脉冲传递函数的极点  $p_k$  在  $z$  平面上的分布对系统的动态响应具有重要影响, 闭环实极点分布与相应动态响应形式的关系, 如图 7.1.6 所示, 闭环共轭复数极点分布与相应动态响应形式的关系, 如图 7.1.5 所示。它们的定性关系总结如下:

#### (1) 正实轴上的单极点

$$\begin{cases} p_k > 1, & \text{按指数规律的发散序列} \\ p_k = 1, & \text{等幅序列} \\ 0 < p_k < 1, & \text{按指数规律的收敛序列, } p_k \text{ 离原点越近收敛越快} \end{cases}$$

#### (2) 负实轴上的单极点

$$\begin{cases} p_k < -1, & \text{交替变号的发散序列} \\ p_k = -1, & \text{交替变号的等幅序列} \\ -1 < p_k < 0, & \text{交替变号的收敛序列, } p_k \text{ 离原点越近收敛越快} \end{cases}$$

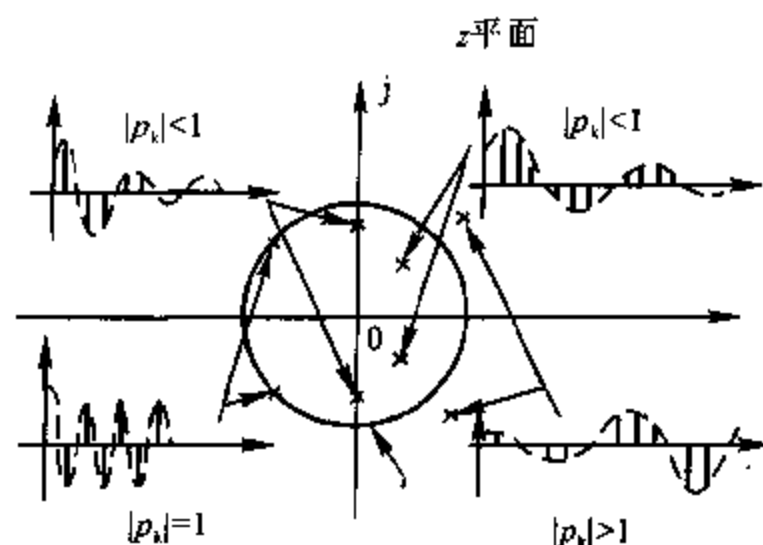


图 7.1.5 闭环复极点分布与相应的动态响应形式

## (3) 闭环共轭复数极点

- $$\begin{cases} |p_k| > 1, & \text{按正弦规律振荡发散序列} \\ |p_k| = 1, & \text{按正弦规律等幅振荡序列} \\ 0 < |p_k| < 1, & \text{按正弦规律振荡收敛序列, } |p_k| \text{ 越小振荡收敛越快} \end{cases}$$

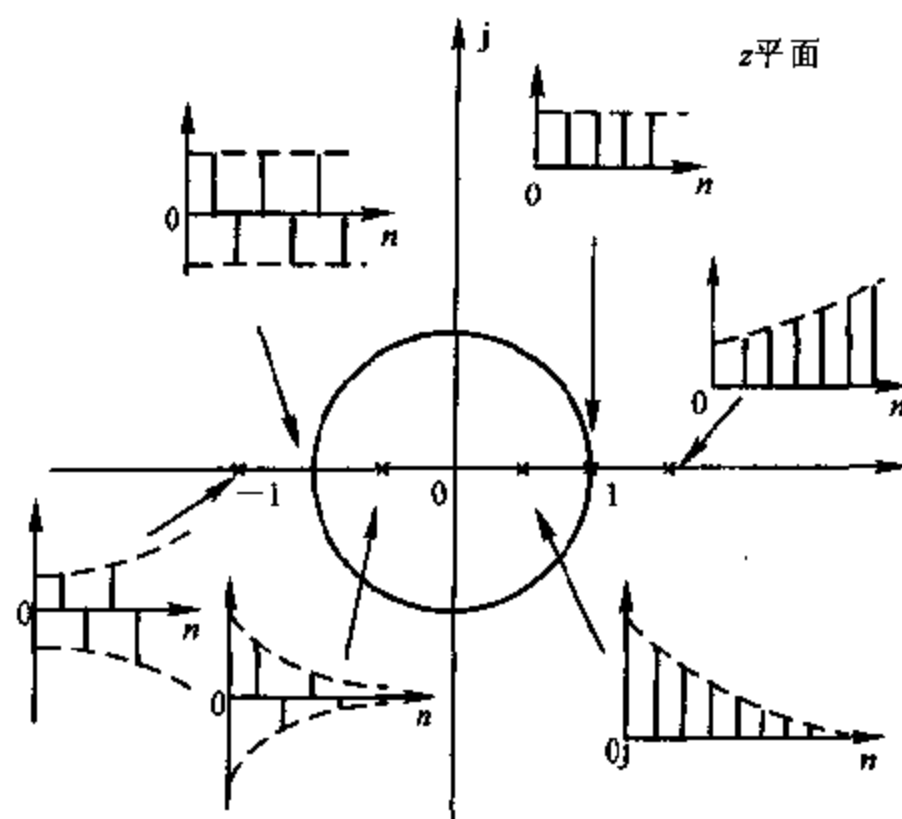


图 7.1.6 闭环实极点分布与相应的动态响应形式

## 3. z 域根轨迹法

按照连续系统的根轨迹绘制方法,可以在  $z$  平面上绘制根轨迹,并利用  $s$  平

面到  $z$  平面的映射关系,以及离散系统闭环脉冲传递函数的极点  $p_k$  在  $z$  平面上的分布与系统的动态响应关系,对系统进行分析。

### 7.1.7 离散系统设计——最少拍系统设计

#### 1. 系统构造

假设在图 7.1.7 所示的单位反馈离散系统中,进行最少拍系统设计,其中  $D(z)$  为数字控制器,  $G(s)$  为保持器与被控对象的传递函数,要求  $G(z)$  无延迟,且在  $z$  平面单位圆上及单位圆外无零点和极点[(1, j0) 点除外]。 $R(z)$  为典型输入序列的  $z$  变换。

#### 2. 最少拍系统设计的目标

实现在典型输入作用下,能以有限拍结束响应过程,且在采样时刻无稳态误差的离散系统。

#### 3. 最少拍系统设计

最少拍系统按表 7.1.4 设计。

表 7.1.4 最少拍系统的设计结果

典型输入		闭环脉冲传递函数		数字控制器 脉冲传递函数	调节 时间
$r(t)$	$R(z)$	$\Phi_c(z)$	$\Phi(z)$	$D(z)$	$t_n$
$1(t)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$1-z^{-1}$	$z^{-1}$	$\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})G(z)}$	$T$
$t$	$\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$	$(1-z^{-1})^2$	$2z^{-1}-z^{-2}$	$\frac{z^{-1}(2-z^{-1})}{(1-z^{-1})^2 G(z)}$	$2T$
$\frac{1}{2}t^2$	$\frac{T^2 z^{-1}(1+z^{-1})}{2(1-z^{-1})^3}$	$(1-z^{-1})^3$	$3z^{-1}-3z^{-2}+z^{-3}$	$\frac{z^{-1}(3-3z^{-1}+z^{-2})}{(1-z^{-1})^3 G(z)}$	$3T$

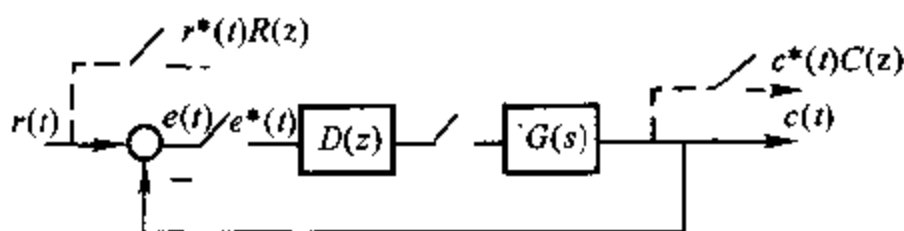
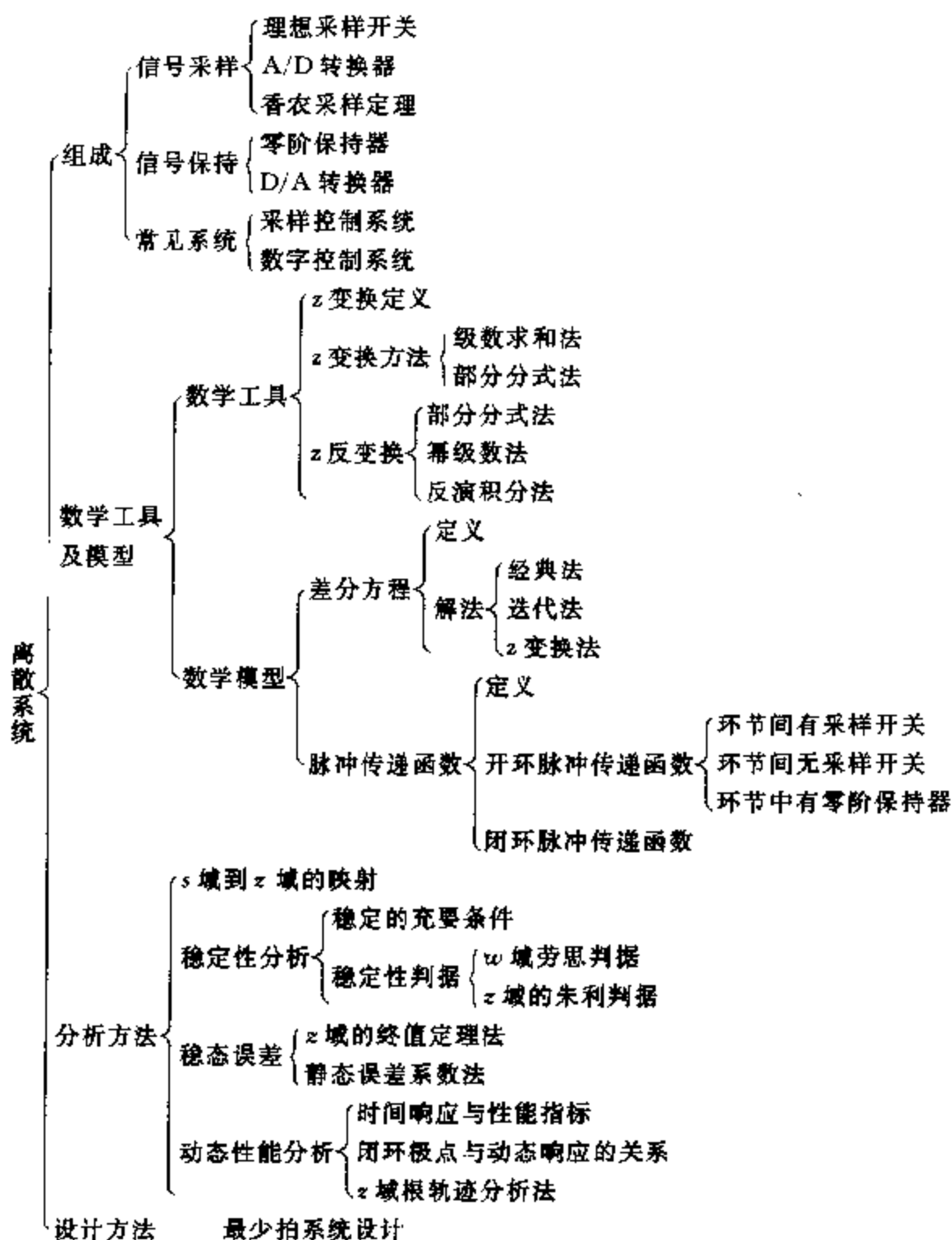


图 7.1.7 具有数字控制器离散系统



## 7.2 知识结构图



### 7.3 考点及典型题选解

本章主要考点有:信号的采样、复现及其数学描述、 $z$ 变换与 $z$ 反变换、差分方程的特点及解法、脉冲传递函数的定义及求法、采样系统稳定性判定及稳态误差计算、最少拍采样控制系统的设计。

#### 7.3.1 典型题

1. 求如图 7.3.1 所示系统的脉冲传递函数。

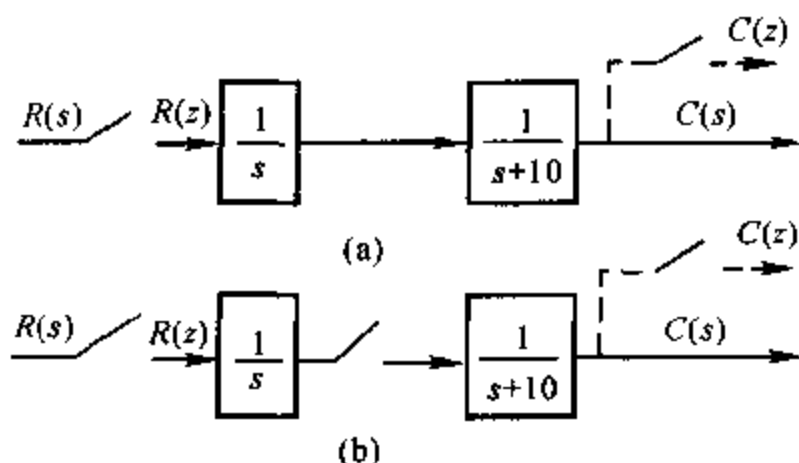


图 7.3.1

2. 求图 7.3.2 所示系统的闭环脉冲传递函数。

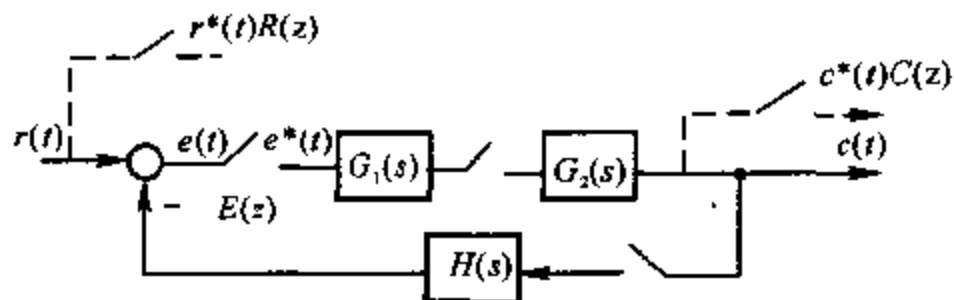


图 7.3.2

3. 已知系统的差分方程

$$c(n-2) + 4c(n-1) + 4c(n) = r(n)$$

试求:

- (1) 系统的脉冲传递函数;  
 (2) 系统的单位阶跃响应。  
 4. 已知系统如图 7.3.3 所示, 采样周期  $T = 1\text{ s}$ , 求系统的单位阶跃响应。

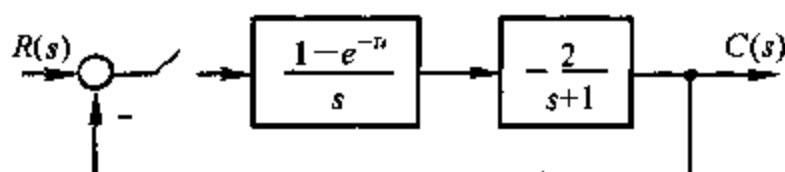


图 7.3.3

5. 设系统如图 7.3.4 所示。

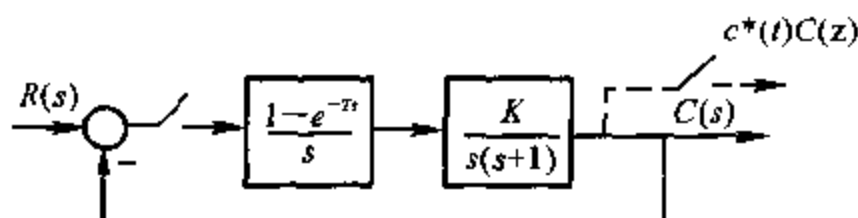


图 7.3.4

- (1) 求系统的闭环脉冲传递函数;  
 (2)  $K = 10, T = 1\text{ s}$  时, 判断系统的稳定性;  
 (3)  $T = 1\text{ s}$  时, 求系统的临界开环增益  $K$ ;  
 (4) 求  $K = 1, T = 1\text{ s}$  时系统在单位阶跃、单位速度和单位加速度输入时的稳态误差。

6. 采样系统结构图如图 7.3.5 所示。求系统脉冲传递函数  $\Phi(s) = C(s)/R(s)$ 。

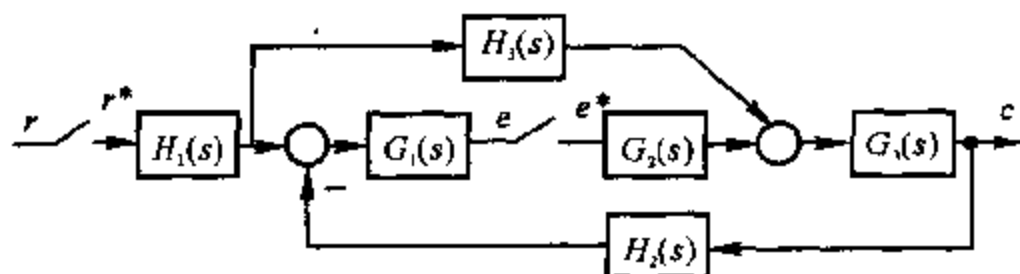


图 7.3.5 采样系统结构图

7. 已知系统闭环特征方程

$$D(z) = 45z^3 - 117z^2 + 119z - 39 = 0$$

试判定系统的稳定性。

8. 已知系统结构图如图 7.3.6 所示, 采样周期  $T = 1\text{ s}$ 。试求  $r(t) = t$  时最小拍系统控制器的脉冲传递函数  $D(z)$ 。

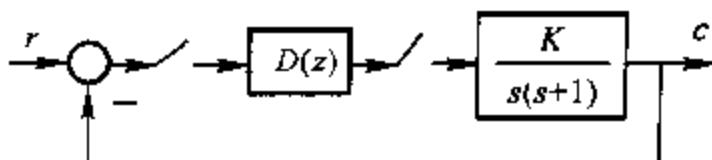


图 7.3.6 采样系统结构图

### 7.3.2 典型题解析

$$1. \quad G_1(s) = \frac{1}{s}, \quad G_2 = \frac{1}{s+10}$$

则图 7.3.1(a) 系统的脉冲传递函数为

$$\frac{C(z)}{R(z)} = G(z) = G_1 G_2(z) = z \left[ \frac{1}{s(s+10)} \right] = \frac{0.1z(1 - e^{-10T})}{(z-1)(z - e^{-10T})}$$

图 3.3.1(b) 的脉冲传递函数为

$$\frac{C(z)}{R(z)} = G(z) = G_1(z)G_2(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z - e^{-10T})}$$

$$2. \quad \begin{cases} C(z) = G_1(z)G_2(z)E(z) \\ E(z) = R(z) - H(z)G_1(z)G_2(z)E(z) \end{cases}$$

联立求解上式, 可得系统的闭环脉冲传递函数

$$\Phi(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G_1(z)G_2(z)R(z)}{1 + G_1(z)G_2(z)H(z)}$$

3. (1) 应用实数位移定理对差分方程进行  $z$  变换

$$z^{-2}C(z) + 4z^{-1}C(z) + 4C(z) = R(z)$$

脉冲传递函数

$$G(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{1}{z^{-2} + 4z^{-1} + 4}$$

(2) 单位阶跃响应的  $z$  变换

$$R(z) = \frac{z}{z-1}$$

$$\text{则 } C(z) = G(z)R(z) = \frac{1}{z^{-2} + 4z^{-1} + 4} \cdot \frac{z}{z-1} = \frac{z^3}{(z+2)^2(z-1)}$$

使用留数法

$$\begin{aligned} \text{Res}[C(z)z^{n-1}]_{z \rightarrow -1} &= \lim_{z \rightarrow -1} \left[ \frac{z^3 z^{n-1}}{(z+2)^2(z-1)} (z+1) \right] = \frac{1}{9} \\ \text{Res}[C(z)z^{n-1}]_{z \rightarrow -2} &= \lim_{z \rightarrow -2} \left\{ \frac{d}{dz} \left[ \frac{z^3 z^{n-1}}{(z+2)^2(z-1)} (z+2)^2 \right] \right\} = \\ &= \lim_{z \rightarrow -2} \left[ \frac{(n+2)z^{n+1}(z-1) - z^{n+2}}{(z-1)^2} \right] = \\ &= \frac{[-3(n+2)+2](-2)^{n+1}}{9} = \frac{(-3n-4)(-2)^{n+1}}{9} \\ e(nT) &= \frac{1}{9} + \frac{(-3n-4)(-2)^{n+1}}{9} \end{aligned}$$

$$e^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT) \delta(t-nT) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{1 + (-3n-4)(-2)^{n+1}}{9} \right] \delta(t-nT)$$

4. 系统连续部分的传递函数为

$$G(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s} \times \frac{2}{s+1}$$

其  $z$  变换为

$$G(z) = \frac{2(1-e^{-T})}{z-e^{-T}}$$

当  $T=1\text{ s}$  时

$$G(z) = \frac{1.264}{z-0.368}$$

而  $R(z) = \frac{z}{z-1}$ , 系统的输出的  $z$  变换为

$$C(z) = \frac{G(z)}{1+G(z)} \times R(z) = \frac{1.264z}{z^2 - 0.104z - 0.896}$$

由长除法得

$$C(z) = 1.264z^{-1} + 0.131z^{-2} + 1.146z^{-3} + \dots$$

系统的阶跃响应为

$$c^*(t) = 1.264\delta(t-T) + 0.131\delta(t-2T) + 1.146\delta(t-3T) + \dots$$

5. (1) 系统的闭环脉冲传递函数为

$$\Phi(z) = \frac{GH(z)}{1+GH(z)}$$

$$\text{而} \quad GH(z) = Z\left(\frac{1-e^{-Ts}}{s} \times \frac{K}{s(s+1)}\right) = \frac{K[(e^{-T} + T - 1)z + (1 - e^{-T} - Te^{-T})]}{(z-1)(z-e^{-T})}$$

所以

$$\Phi(z) = \frac{K[(e^{-T} + T - 1)z + (1 - e^{-T} - Te^{-T})]}{z^2 + [K(e^{-T} + T - 1) - (1 + e^{-T})]z + K(1 - Te^{-T} - e^{-T}) + e^{-T}}$$

(2)  $K = 10, T = 1$  s 时, 闭环系统的特征方程为

$$z^2 + 2.31z + 3 = 0$$

$$z = \frac{-2.31 \pm 2.58j}{2}$$

因为有一个根在单位圆外, 所以系统不稳定。

(3)  $T = 1$  s 时, 系统的特征方程为

$$z^2 + (0.368K - 1.368)z + 0.264K + 0.368 = 0$$

$$\text{由朱利判据} \quad \begin{cases} D(1) > 0 \\ D(-1) > 0 \\ |a_0| < |a_2| \end{cases}$$

$$\text{得不等式组} \quad \begin{cases} K > 0 \\ K < 28.33 \\ -5.2 < K < 2.39 \end{cases}$$

解不等式组可得使系统稳定的  $K$  的取值范围是

$$0 < K < 2.39$$

故系统的临界放大增益为  $K = 2.39$ 。

(4) 当  $K = 1, T = 1$  s 时, 系统的开环传递函数

$$GH(z) = \frac{0.368z + 0.264}{(z-1)(z-0.368)}$$

(a) 单位阶跃输入时

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} [1 + GH(z)] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ 1 + \frac{0.368z + 0.264}{(z-1)(z-0.368)} \right] = \infty$$

$$e(\infty) = \frac{1}{K_p} = 0$$

(b) 单位速度输入时

$$K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)GH(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{0.368z + 0.264}{(z-1)(z-0.368)} = 1$$

$$e(\infty) = \frac{T}{K_v} = 1$$

(c) 单位加速度输入时

$$K_a = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 GH(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 \frac{0.368z + 0.264}{(z-1)(z-0.368)} = 0$$

$$e(\infty) = \frac{T^2}{K_a} = \infty$$

## 6. 依结构图

$$C(z) = G_3 G_2(z) E(z) + G_3 H_3 H_1(z) R(z)$$

$$= \left[ G_3 G_2(z) \frac{G_1 H_1(z) - G_1 H_2 G_3 H_3 H_1(z)}{1 + G_1 H_2 G_3 G_2(z)} + G_3 H_3 H_1(z) \right] R(z)$$

$$E(z) = G_1 H_1(z) R(z) - G_1 H_2 G_3 G_2(z) E(z) - G_1 H_2 G_3 H_3 H_1(z) R(z)$$

即 
$$E(z) = \frac{G_1 H_1(z) - G_1 H_2 G_3 H_3 H_1(z)}{1 + G_1 H_2 G_3 G_2(z)} R(z)$$

所以

$$\Phi(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{[G_3 G_2(z) G_1 H_1(z) - G_3 G_1(z) G_1 H_2 G_3 H_3 H_1(z) + G_3 H_3 H_1(z) + G_3 H_3 H_1(z) G_1 H_2 G_3 G_2(z)]}{[1 + G_1 H_2 G_3 G_2(z)]}$$

## 7. 用朱利稳定判据

$$D(1) = 8 > 0, \quad D(-1) = -320 < 0, \quad (n=3), \quad |a_0| < a_3,$$

列朱利阵列

行数	$z^0$	$z^1$	$z^2$	$z^3$
1	-39	119	-117	45
2	45	-117	119	-39
3	-504	624	-792	
4	-792	624	-504	

表中第三行元素

$$b_0 = -504, \quad b_1 = 624, \quad b_2 = -792$$

$|b_0| = 504 < |b_2| = 792$  不满足稳定的条件, 所以系统不稳定。

## 8. 系统被控对象的脉冲传递函数为

$$G(z) = Z\left[\frac{1}{s(s+1)}\right] = \frac{0.632z}{(z-1)(z-0.368)}$$

查表 7.1.4 有

$$D(z) = \frac{z^{-1}(2-z^{-1})}{(1-z^{-1})^2 G(z)} = \frac{z^{-1}(2-z^{-1})}{(1-z^{-1})^2} \frac{0.632z}{(z-1)(z-0.368)} = \frac{3.165(z-0.5)(z-0.368)}{z(z-1)}$$

系统响应只需 2 拍即可进入稳态。

## 7.4 课后习题全解

### 7.4.1 试根据定义

$$E^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT) e^{-nsT}$$

确定下列函数的  $E^*(s)$  的闭合形式和  $E(z)$ ：

(1)  $e(t) = \sin \omega t$

(2)  $E(s) = \frac{1}{(s+a)(s+b)(s+c)}$

解

$$\begin{aligned} (1) E^*(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sin \omega nT \cdot e^{-nsT} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1(e^{j\omega nT} - e^{-j\omega nT})}{2j} e^{-nsT} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2j} e^{j\omega nT} e^{-nsT} - \frac{1}{2j} e^{-j\omega nT} e^{-nsT} \right) = \\ &= \frac{1}{2j} \left( \frac{1}{1 - e^{j\omega T} e^{-sT}} - \frac{1}{1 - e^{-j\omega T} e^{-sT}} \right) \end{aligned}$$

$$E(z) = \frac{1}{2j} \left( \frac{1}{1 - e^{j\omega T} z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-j\omega T} z^{-1}} \right) = \frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$$

$$(2) E(s) = \frac{1}{(s+a)(s+b)(s+c)} = \frac{A}{s+a} + \frac{B}{s+b} + \frac{C}{s+c}$$

$$A = \lim_{s \rightarrow -a} \frac{1}{(s+b)(s+c)} = \frac{1}{(b-a)(c-a)}$$

$$B = \lim_{s \rightarrow -b} \frac{1}{(s+a)(s+c)} = \frac{1}{(a-b)(c-b)}$$



$$C = \lim_{s \rightarrow -a} \frac{1}{(s+a)(s+b)} = \frac{1}{(b-c)(a-c)}$$

$$e(t) = Ae^{-at} + Be^{-bt} + Ce^{-ct}$$

$$E^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} (Ae^{-anT} + Be^{-bnT} + Ce^{-cnT})e^{-nsT} =$$

$$\frac{A}{1 - e^{-aT}e^{-sT}} + \frac{B}{1 - e^{-bT}e^{-sT}} + \frac{C}{1 - e^{-cT}e^{-sT}}$$

$$E(z) = \frac{A}{1 - e^{-aT}z^{-1}} + \frac{B}{1 - e^{-bT}z^{-1}} + \frac{C}{1 - e^{-cT}z^{-1}} =$$

$$\frac{z}{(b-a)(c-a)(z - e^{-aT})} + \frac{z}{(a-b)(c-b)(z - e^{-bT})} +$$

$$\frac{z}{(a-c)(b-c)(z - e^{-cT})}$$

7.4.2 试求下列函数的  $z$  变换:

(1)  $e(t) = a^n$

(2)  $e(t) = t^2 e^{-3t}$

(3)  $e(t) = \frac{1}{3!}t^3$

(4)  $E(s) = \frac{s+1}{s^2}$

(5)  $E(s) = \frac{1 - e^{-s}}{s^2(s+1)}$

解 (1)  $E(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$

(2)  $Z[t^2] = \frac{T^2 z(z+1)}{(z-1)^3}$

由复位移定理:

$$Z[t^2 e^{-3t}] = \frac{T^2 z e^{3T} (ze^{3T} + 1)}{(ze^{3T} - 1)^3} = \frac{T^2 z e^{-3T} (z + e^{-3T})}{(z - e^{-3T})^3}$$

(3) 查表得

$$Z\left[\frac{1}{3!}t^3\right] = \frac{T^3 z(z^2 + 4z + 1)}{6(z-1)^4}$$

(4)  $E(s) = \frac{s+1}{s^2} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}$

$$E(z) = \frac{z}{z-1} + \frac{Tz}{(z-1)^2}$$

$$(5) E(s) = \frac{1-e^{-T}}{s^2(s+1)} = (1-e^{-T}) \left( \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} \right)$$

$$E(z) = (1-z^{-1}) \left[ \frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-e^{-T}} \right]$$

7.4.3 试用部分分式法、幂级数法和反演积分法,求下列函数的  $z$  反变换:

$$(1) E(z) = \frac{10z}{(z-1)(z-2)}$$

$$(2) E(z) = \frac{-3+z^{-1}}{1-2z^{-1}+z^{-2}}$$

解 (1)  $E(z) = \frac{10z}{(z-1)(z-2)}$

① 部分分式法

$$\frac{E(z)}{z} = \frac{10}{(z-1)(z-2)} = \frac{-10}{(z-1)} + \frac{10}{(z-2)}$$

$$E(z) = \frac{-10z}{(z-1)} + \frac{10z}{(z-2)}$$

$$e(nT) = -10 \times 1 + 10 \times 2^n = 10(2^n - 1)$$

② 幂级数法:用长除法可得

$$E(z) = \frac{10z}{(z-1)(z-2)} = \frac{10z}{z^2-3z+2} = 10z^{-1} + 30z^{-2} + 70z^{-3} + \dots$$

$$e^*(t) = 10\delta(t-T) + 30\delta(t-2T) + 70\delta(t-3T) + \dots$$

③ 反演积分法

$$\text{Res}[E(z) \cdot z^{n-1}]_{z=1} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{10z^n}{z-2} = -10$$

$$\text{Res}[E(z) \cdot z^{n-1}]_{z=2} = \lim_{z \rightarrow 2} \frac{10z^n}{z-2} = 10 \times 2^n$$

$$e(nT) = -10 \times 1 + 10 \times 2^n = 10(2^n - 1)$$

$$e^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} 10(2^n - 1)\delta(t-nT)$$

$$(2) E(z) = \frac{-3+z^{-1}}{1-2z^{-1}+z^{-2}} = \frac{z(-3z+1)}{z^2-2z+1} = \frac{z(-3z+1)}{(z-1)^2}$$

① 部分分式法

$$\frac{E(z)}{z} = \frac{1-3z}{(z-1)^2} = \frac{-2}{(z-1)^2} - \frac{3}{z-1}$$

$$E(z) = \frac{-2z}{(z-1)^2} - \frac{3z}{z-1}$$

$$e(t) = \frac{-2}{T}t - 3 \times 1(t)$$

$$e^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{-2}{T}nT - 3 \right] \delta(t - nT) = \sum_{n=0}^{\infty} (-2n - 3) \delta(t - nT)$$

② 幂级数法:用长除法可得

$$E(z) = \frac{-3z^2 + z}{z^2 - 2z + 1} = -3 - 5z^{-1} - 7z^{-2} - 9z^{-3} - \dots$$

$$e^*(t) = -3\delta(t) - 5\delta(t - T) - 7\delta(t - 2T) - 9\delta(t - 3T) - \dots$$

③ 反演积分法

$$e(nT) = \text{Res}[E(z) \cdot z^{n-1}]_{z=1} = \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} [(-3z^2 + z) \cdot z^{n-1}] =$$

$$\lim_{z \rightarrow 1} [-3(n+1)z^n + nz^{n-1}] = -2n - 3$$

$$e^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-2n - 3) \delta(t - nT)$$

7.4.4 试求下列函数的脉冲序列  $e^*(t)$ :

$$(1) E(z) = \frac{z}{(z+1)(3z^2+1)}$$

$$(2) E(z) = \frac{z}{(z-1)(z+0.5)^2}$$

解 (1)  $E(z) = \frac{z}{(z+1)(3z^2+1)} = \frac{z}{3z^3+3z^2+z+1} =$   
 $\frac{1}{3}z^{-2} - \frac{1}{3}z^{-3} + \frac{2}{9}z^{-4} - \frac{2}{9}z^{-5} + \dots$

$$e^*(t) = \frac{1}{3}\delta(t-2T) - \frac{1}{3}\delta(t-3T) + \frac{2}{9}\delta(t-4T) - \frac{2}{9}\delta(t-5T) + \dots$$

$$(2) E(z) = \frac{z}{(z-1)(z+0.5)^2} = \frac{z}{z^3-0.75z-0.25} =$$
  
 $z^{-2} + 0.75z^{-4} + 0.25z^{-5} + 0.5625z^{-6} + \dots$

$$e^*(t) = \delta(t-2T) + 0.75\delta(t-4T) + 0.25\delta(t-5T) + 0.5625\delta(t-6T) +$$

...

7.4.5 试确定下列函数的终值:

$$(1) E(z) = \frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$$

$$(2) E(z) = \frac{z^2}{(z-0.8)(z-0.1)}$$

$$\text{解} \quad (1) e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1}) \frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2} = \infty$$

$$(2) e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1}) \frac{z^2}{(z-0.8)(z-0.1)} = 0$$

7.4.6 已知  $E(z) = Z[e(t)]$ , 试证明下列关系成立:

$$(1) Z[a^n e(t)] = E\left[\frac{z}{a}\right]$$

$$(2) Z[te(t)] = -Tz \frac{dE(z)}{dz}, T \text{ 为采样周期。}$$

$$\text{解} \quad (1) Z[e(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT) z^{-n} = E(z)$$

$$Z[a^n e(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e(nT) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT) \left(\frac{z}{a}\right)^{-n} = E\left[\frac{z}{a}\right]$$

$$(2) Z[te(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} nT e(nT) z^{-n} = -Tz \sum_{n=0}^{\infty} [-ne(nT) z^{-n-1}] = -Tz \frac{dE(z)}{dz}$$

7.4.7 已知差分方程为

$$c(k) - 4c(k+1) + c(k+2) = 0$$

初始条件:  $c(0) = 0, c(1) = 1$ , 试用迭代法求输出序列  $c(k), k = 0, 1, 2, 3, 4$ 。

解 依题有

$$c(k+2) = 4c(k+1) - c(k)$$

$$c(0) = 0$$

$$c(1) = 1$$

$$c(2) = 4 \times 1 - 0 = 4$$

$$c(3) = 4 \times 4 - 1 = 15$$

$$c(4) = 4 \times 15 - 4 = 56$$

7.4.8 试用  $z$  变换法求下列差分方程:

$$(1) c^*(t+2T) - 6c^*(t+T) + 8c^*(t) = r^*(t)$$

$$r(t) = 1(t), \quad c^*(t) = 0 \quad (t \leq 0)$$

$$(2) c^*(t+2T) + 2c^*(t+T) + c^*(t) = r^*(t)$$

$$c(0) = c(T) = 0, \quad r(nT) = n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$(3) c(k-3) + 6c(k+2) + 11c(k+1) + 6c(k) = 0$$

$$c(0) = c(1) = 1, \quad c(2) = 0$$

$$(4) \quad c(k+2) + 5c(k+1) + 6c(k) = \cos k \frac{\pi}{2}$$

$$c(0) = c(1) = 0$$

解 (1) 令  $t = -T$ , 代入原方程可得:  $c(T) = 0$ , 对差分方程两端取  $z$  变换, 整理得

$$C(z) = \frac{1}{z^2 - 6z + 8} R(z) = \frac{1}{(z-2)(z-4)} \frac{z}{(z-1)}$$

$$\frac{C(z)}{z} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{z-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z-2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{z-4}$$

$$C(z) = \frac{1}{3} \cdot \frac{z}{(z-1)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{z}{z-2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{z}{z-4}$$

$$c(nT) = \frac{1}{3} \times (1)^n - \frac{1}{2} \times (2)^n + \frac{1}{6} \times (4)^n$$

(2) 对差分方程两端取  $z$  变换, 整理得

$$C(z) = \frac{1}{z^2 + 2z + 1} \cdot \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{z}{(z+1)^2(z-1)^2}$$

$$\text{Res}[C(z) \cdot z^{n-1}]_{z=-1} = \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d}{dz} \left[ \frac{z}{(z+1)^2} \cdot z^{n-1} \right] =$$

$$\lim_{z \rightarrow -1} \frac{d}{dz} \left[ \frac{z^n}{(z+1)^2} \right] =$$

$$\lim_{z \rightarrow -1} [nz^{n-1}(z+1)^{-2} - 2(z+1)^{-3} \cdot z^n] =$$

$$n \times 2^{-2} - 2 \times 2^{-3} = \frac{n-1}{4}$$

$$\text{Res}[C(z) \cdot z^{n-1}]_{z=1} = \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \left[ \frac{z}{(z-1)^2} \cdot z^{n-1} \right] =$$

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \left[ \frac{z^n}{(z-1)^2} \right] =$$

$$\lim_{z \rightarrow 1} [nz^{n-1}(z-1)^{-2} - 2(z-1)^{-3} \cdot z^n] =$$

$$(-1)^{n-1} \frac{n-1}{4}$$

$$c(nT) = \frac{n-1}{4} [1 + (-1)^{n-1}]$$

$$c^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{n-1}{4} [1 + (-1)^{n-1}] \right\} \delta(t - nT)$$

(3) 对差分方程两端取  $z$  变换得

$$[z^3 C(z) - z^3 c(0) - z^2 c(1) - z c(2)] + 6[z^2 C(z) - z^2 c(0) - z c(1)] + 11[z C(z) - z c(0)] + 6C(z) = 0$$

代入初条件,整理得

$$(z^3 + 6z^2 + 11z - 6)C(z) = z^3 + 7z^2 + 17z$$

$$C(z) = \frac{z^3 + 7z^2 + 17z}{z^3 + 6z^2 + 11z + 6}$$

$$\frac{C(z)}{z} = \frac{11}{2} \frac{1}{z+1} - 7 \frac{1}{z+2} + \frac{5}{2} \frac{1}{z+3}$$

$$c^*(t) = \frac{11}{2}(-1)^n - 7(-2)^n + \frac{5}{2}(-3)^n = (-1)^n \left[ \frac{11}{2} - 7(2)^n + \frac{5}{2}(3)^n \right]$$

(4) 由原方程可得

$$(z^2 + 5z + 6)C(z) = \frac{z(z - \cos \frac{\pi}{2})}{z^2 - 2z \cos \frac{\pi}{2} + 1} = \frac{z^2}{z^2 + 1}$$

$$C(z) = \frac{z^2}{(z^2 + 5z + 6)(z^2 + 1)} = \frac{z^2}{(z+2)(z+3)(z^2 + 1)}$$

$$\frac{C(z)}{z} = \frac{z}{(z+2)(z+3)(z^2 + 1)} = \frac{-2}{5} \frac{1}{z+2} + \frac{3}{10} \frac{1}{z+3} + \frac{1}{10} \frac{z-1}{z^2 + 1}$$

$$C(z) = \frac{-2}{5} \frac{z}{z+2} + \frac{3}{10} \frac{z}{z+3} + \frac{1}{10} \frac{z(z-1)}{z^2 + 1} =$$

$$\frac{-2}{5} \frac{z}{z+2} + \frac{3}{10} \frac{z}{z+3} + \frac{1}{10} \left[ \frac{z^2}{z^2 + 1} - \frac{z}{z^2 + 1} \right] =$$

$$\frac{-2}{5} \frac{z}{z+2} + \frac{3}{10} \frac{z}{z+3} +$$

$$\frac{1}{10} \left[ \frac{z(z - \cos \frac{\pi}{2})}{z^2 - 2z \cos \frac{\pi}{2} + 1} - \frac{z \sin \frac{\pi}{2}}{z^2 - 2z \cos \frac{\pi}{2} + 1} \right]$$

$$c(nT) = \frac{-2}{5}(-2)^n + \frac{3}{10}(-3)^n + \frac{1}{10} \left[ \cos n \frac{\pi}{2} - \sin n \frac{\pi}{2} \right] =$$

$$(-1)^{n+1} \left[ \frac{1}{5}(2)^{n+1} - \frac{1}{10}(3)^{n+1} \right] + \frac{1}{10} \left[ \cos n \frac{\pi}{2} - \sin n \frac{\pi}{2} \right]$$

7.4.9 设开环离散系统如图 7.4.55 所示,试求开环脉冲传递函数  $G(z)$ 。

解 (a)

$$Z \left[ \frac{2}{s+2} \right] = \frac{2z}{z - e^{-2T}}$$

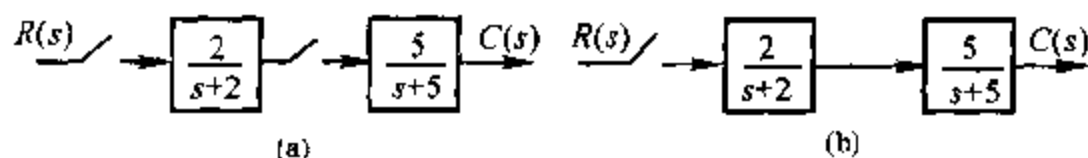


图 7.4.55 开环离散系统

$$Z\left[\frac{5}{s+5}\right] = \frac{5z}{z - e^{-5T}}$$

$$G(z) = Z\left[\frac{2}{s+2}\right]Z\left[\frac{5}{s+5}\right] = \frac{10z^2}{(z - e^{-2T})(z - e^{-5T})}$$

$$(b) \quad Z\left[\frac{2}{s+2} \frac{5}{s+5}\right] = Z\left[\frac{10}{3} \frac{1}{s+2} - \frac{10}{3} \frac{1}{s+5}\right] =$$

$$\frac{10}{3} \frac{z(e^{-2T} - e^{-5T})}{(z - e^{-2T})(z - e^{-5T})}$$

$$G(z) = Z\left[\frac{2}{s+2} \frac{5}{s+5}\right] = \frac{10}{3} \frac{z(e^{-2T} - e^{-5T})}{(z - e^{-2T})(z - e^{-5T})}$$

7.4.10 试求图 7.4.56 闭环离散系统的脉冲传递函数  $\Phi(z)$  或输出  $z$  变换  $C(z)$ 。

解 (a) 将原系统结构图等效变换为图解 7.4.10

$$C(z) = G_1(z)[E(z) - B_1(z)]$$

$$B_1(z) = G_1 G_2(z)[E(z) - B_1(z)]$$

$$[1 + G_1 G_2(z)]B_1(z) = G_1 G_2(z)E(z)$$

所以 
$$B_1(z) = \frac{G_1 G_2(z)}{1 + G_1 G_2(z)} E(z)$$

$$C(z) = G_1(z) \left[ 1 - \frac{G_1 G_2(z)}{1 + G_1 G_2(z)} \right] E(z) = \frac{G_1(z)}{1 + G_1 G_2(z)} E(z)$$

$$E(z) = R(z) - B_2(z)$$

$$B_2(z) = G_3(z)C(z)$$

$$E(z) = R(z) - G_3(z)C(z)$$

$$C(z) = \frac{G_1(z)}{1 + G_1 G_2(z)} [R(z) - G_3(z)C(z)]$$

$$[1 + G_1 G_2(z)]C(z) = G_1(z)[R(z) - G_3(z)C(z)]$$

$$[1 + G_1 G_2(z) + G_1(z)G_3(z)]C(z) = G_1(z)R(z)$$

$$\Phi(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G_1(z)}{1 + G_1 G_2(z) + G_1(z)G_3(z)}$$

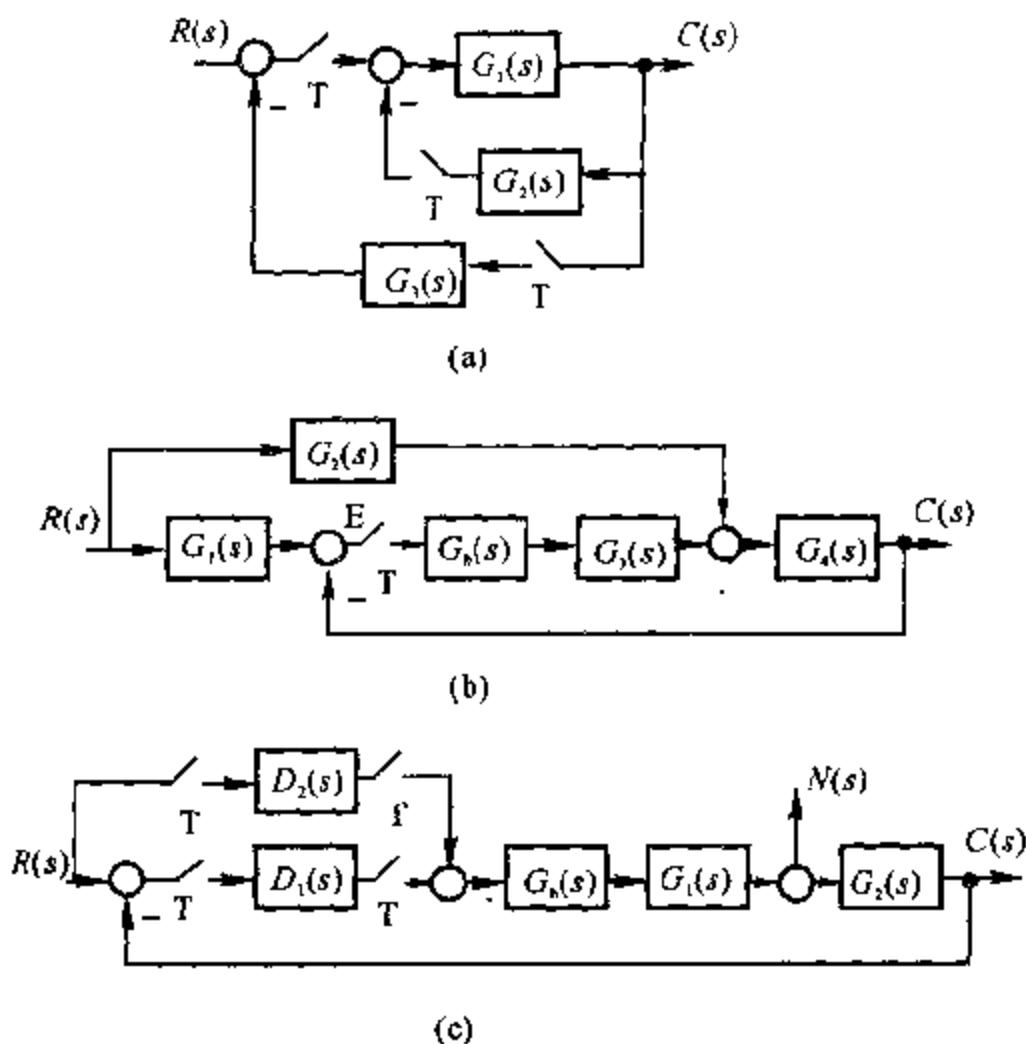
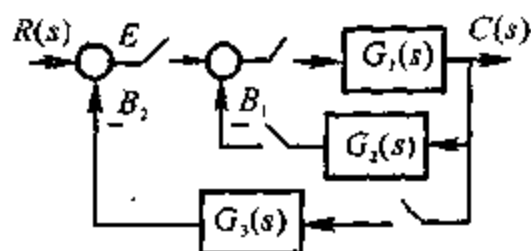


图 7.4.56 闭环离散系统



图解 7.4.10

(b) 由系统结构图

$$C(z) = RG_2G_4(z) + E(z)G_bG_3G_4(z)$$

$$E(z) = RG_1(z) - C(z)$$

$$C(z) = RG_2G_4(z) + G_bG_3G_4(z)[RG_1(z) - C(z)]$$



所以 
$$C(z) = \frac{RG_2G_1(z) + G_hG_3G_4(z)RG_1(z)}{1 + G_hG_3G_4(z)}$$

(c) 由系统结构图

$$C(z) = NG_2(z) + R(z)D_2(z)G_hG_1G_2(z) + E(z)D_1(z)G_hG_1G_2(z)$$

$$E(z) = R(z) - C(z)$$

$$C(z) = NG_2(z) + R(z)D_2(z)G_hG_1G_2(z) +$$

$$D_1(z)G_hG_1G_2(z)[R(z) - C(z)]$$

所以 
$$C(z) = \frac{NG_2(z) + R(z)D_2(z)G_hG_1G_2(z) + D_1(z)G_hG_1G_2(z)R(z)}{1 + D_1(z)G_hG_1G_2(z)} =$$

$$\frac{NG_2(z) + [D_1(z) + D_2(z)]G_hG_1G_2(z)R(z)}{1 + D_1(z)G_hG_1G_2(z)}$$

7.4.11 已知脉冲传递函数

$$G(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{0.53 + 0.1z^{-1}}{1 - 0.37z^{-1}}$$

其中,  $R(z) = \frac{z}{(z-1)}$ , 试求  $c(nT)$ 。

解 
$$C(z) = G(z)R(z) = \frac{(0.53 + 0.1z^{-1})z}{(1 - 0.37z^{-1})(z-1)} = \frac{(0.53z + 0.1)z}{(z - 0.37)(z-1)}$$

$$c(nT) = \sum \text{Res}[C(z) \cdot z^{n-1}] =$$

$$\left. \frac{(0.53z + 0.1)z^n}{z - 0.37} \right|_{z=0.37} + \left. \frac{(0.53z + 0.1)z^n}{z - 1} \right|_{z=1} =$$

$$1 - \frac{0.296}{0.63}(0.37)^n = 1 - 0.47(0.37)^n$$

7.4.12 已知开环离散系统如图 7.4.57 所示, 其中  $r(t) = 1(t)$ , 采样周期  $T = 2$  s, 试比较  $c^*(t)$  与  $c(t)$ 。

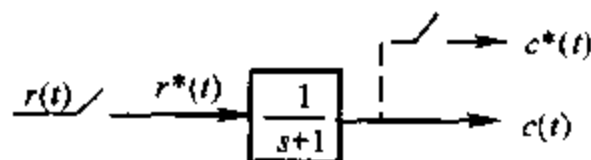


图 7.4.57 开环离散系统

解 (1) 用一般  $z$  变换法

$$C(z) = Z\left[\frac{1}{s+1}\right]R(z) = \frac{z}{z - e^{-T}} \frac{z}{z-1} = \frac{z^2}{(z-1)(z - e^{-2})}$$

$$\text{Res}[C(z)z^{n-1}]_{z \rightarrow 1} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^{n+1}}{z - e^{-2}} = 1.1565$$

$$\text{Res}[C(z) \cdot z^{n-1}]_{z \rightarrow e^{-2}} = \lim_{z \rightarrow e^{-2}} \frac{z^{n+1}}{z - 1} = 1.1565 e^{-2n-2}$$

$$c(nT) = 1.1565(1 - e^{-2(n+1)})$$

$$c^*(t) = \delta(t) + 1.1353\delta(t-T) + 1.1536\delta(t-2T) + \dots$$

(2) 用修正  $z$  变换法, 取  $n=3$

$$G_3(z) = \frac{z^{\frac{1}{3}}}{z^{\frac{1}{3}} - e^{\frac{-2}{3}}} = \frac{z_3}{z_3 - 0.5134}$$

$$R(z) = \frac{z}{z-1} = \frac{z^{\frac{1}{3}}}{z^{\frac{1}{3}} - 1} = \frac{z_3^3}{z_3^3 - 1}$$

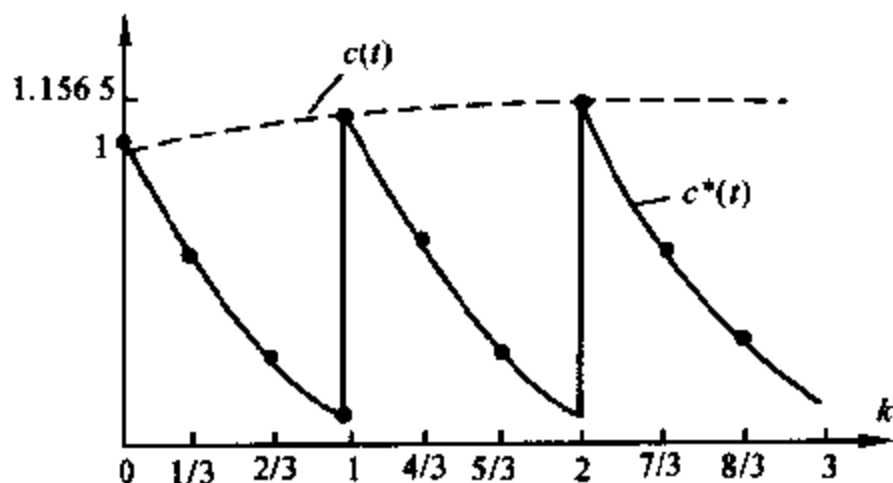
$$C_3(z) = G_3(z)R(z) = \frac{z_3^4}{(z_3 - 0.5134)(z_3^3 - 1)} =$$

$$\frac{z_3^4}{z_3^4 - 0.5134z_3^3 - z_3 + 0.5134} =$$

$$1 + 0.5134z_3^{-1} + 0.2634z_3^{-2} + 1.1353z_3^{-3} + 0.5829z_3^{-4} +$$

$$0.2992z_3^{-5} + 1.1536z_3^{-6} + 0.5922z_3^{-7} + \dots$$

作出  $c^*(t)$  与  $c(t)$  响应曲线如图解 7.4.12 所示:



图解 7.4.12

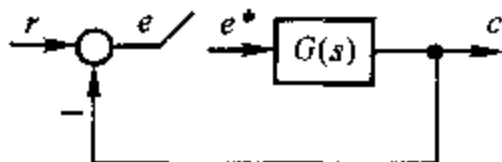
7.4.13 设有单位反馈误差采样的离散系统, 连续部分传递函数

$$G(s) = \frac{1}{s^2(s+5)}$$

输入  $r(t) = 1(t)$ , 采样周期  $T = 1$  s, 试求:

- (1) 输出  $z$  变换  $C(z)$ ;  
 (2) 采样瞬时的输出响应  $c^*(t)$ ;  
 (3) 输出响应的终值  $c(\infty)$ 。

解 (1) 依题可画出系统结构图如图解 7.4.13 所示:



图解 7.4.13

$$G(z) = Z\left[\frac{1}{s^2(s+5)}\right] = \frac{1}{5} \left[ \frac{z}{(z-1)^2} - \frac{z(1-e^{-5})}{5(z-1)(z-e^{-5})} \right] =$$

$$\frac{[(4+e^{-5})z+1-6e^{-5}]z}{25(z-1)^2(z-e^{-5})}$$

$$\Phi(z) = \frac{G(z)}{1+G(z)} = \frac{(4+e^{-5})z^2 + (1-6e^{-5})z}{25(z-1)^2(z-e^{-5}) + (4+e^{-5})z^2 + (1-6e^{-5})z} =$$

$$\frac{4.0067z^2 + 0.9596z}{25z^3 - 46.1617z^2 + 26.2965z - 0.1684}$$

$$C(z) = \Phi(z)R(z) = \Phi(z) \frac{z}{z-1} =$$

$$\frac{(0.1603z + 0.0384)z^2}{z^4 - 2.847z^3 + 2.898z^2 - 1.0586z + 0.006736} =$$

$$0.1603z^{-1} + 0.4948z^{-2} + 0.944z^{-3} + 1.4233z^{-4} + \dots$$

$$(2) c^*(t) = 0.1603\delta(t-T) + 0.4948\delta(t-2T) + 0.944\delta(t-3T) + 1.4233\delta(t-4T) + \dots$$

(3) 判断系统稳定性

$$D(z) = 25z^3 - 46.1617z^2 + 26.2965z - 0.1684$$

$$n = 3 \quad (\text{奇数})$$

$$D(1) = 4.97 > 0, \quad D(-1) = -97.63 < 0$$

列朱利表

	$z_0$	$z_1$	$z_2$	$z_3$
1	-0.1684	26.2965	-46.1617	25
2	25	-46.1617	26.2965	-0.1684
3	-624.97	1149.6	-649.64	

$$|a_0| = 0.1684 < a_3 = 25$$

$$|b_0| = 624.97 < |b_2| = 649.64 \quad (\text{不稳定})$$

闭环系统不稳定,求稳态误差无意义。

7.4.14 设开环离散系统如图 7.4.31(a) 所示,其中,  $T = 0.1 \text{ s}$ ,  $e(t) = 1(t)$ , 且

$$G(s) = \frac{100}{s(s^2 + 100)}$$

要求:

- (1) 用  $z$  变换法计算  $0, T, 2T, 4T, 5T, 6T$  时的输出响应;
- (2) 用修正  $z$  变换法计算  $0, T/3, 2T/3, T, 4T/3, 5T/3, 2T$  时的输出响应。

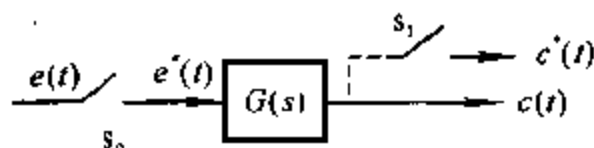


图 7.4.31(a) 开环离散系统

解 (1) 用一般  $z$  变换法

$$\begin{aligned} C(z) &= G(z)E(z) = Z\left[\frac{100}{s(s^2 + 100)}\right] \frac{z}{z-1} = Z\left[\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 100}\right] \frac{z}{z-1} = \\ &= \frac{z}{z-1} \left[ \frac{z}{z-1} - \frac{z(z - \cos 1)}{z^2 - 2z\cos 1 + 1} \right] = \\ &= \frac{(1 - \cos 1)z^2(z+1)}{(z-1)^2(z^2 - 2z\cos 1 + 1)} = \\ &= \frac{(1 - \cos 1)(z^3 + z^2)}{z^4 - 2(1 + \cos 1)z^3 + 2(1 + 2\cos 1)z^2 - 2(1 + \cos 1)z + 1} = \\ &= \frac{0.46(z^3 + z^2)}{z^4 - 3.08z^3 + 4.16z^2 - 3.08z + 1} = \\ &= 0.46z^{-1} + 1.876z^{-2} + 3.868z^{-3} + 5.52z^{-4} + 6.24z^{-5} + 6.33z^{-6} + \dots \end{aligned}$$

(2) 用修正  $z$  变换法, 取  $n = 3$

$$\begin{aligned} G(z) &= Z\left[\frac{100}{s(s^2 + 100)}\right] = \frac{(1 - \cos 10T)z(z+1)}{(z-1)(z^2 - 2z\cos 10T + 1)} \\ G(z)_3 &= G(z) \Big|_{z_3 \rightarrow z^{\frac{1}{3}}, T \rightarrow \frac{T}{3}} = \frac{\left(1 - \cos \frac{1}{3}\right)(z_3^2 + z_3)}{(z_3 - 1)\left(z_3^2 - 2z_3 \cos \frac{1}{3} + 1\right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C(z)_3 = G(z)_3 E(z) &= \frac{\left(1 - \cos \frac{1}{3}\right)(z_3^2 + z_3)}{(z_3 - 1)\left(z_3^2 - 2z_3 \cos \frac{1}{3} + 1\right)} \frac{z_3^3}{z_3^3 - 1} = \\
 &\frac{\left(1 - \cos \frac{1}{3}\right)(z_3^5 + z_3^4)}{\left[z_3^6 - \left(1 + 2\cos \frac{1}{3}\right)z_3^5 + \right.} \\
 &\left. \left(1 + 2\cos \frac{1}{3}\right)z_3^4 - 2z_3^3 + \left(1 + 2\cos \frac{1}{3}\right)z_3^2 - \right. \\
 &\left. \left(1 + 2\cos \frac{1}{3}\right)z_3 + 1\right]}{0.055(z_3^5 + z_3^4)} = \\
 &\frac{0.055(z_3^5 + z_3^4)}{z_3^6 - 2.89z_3^5 + 2.89z_3^4 - 2z_3^3 + 2.89z_3^2 - 2.89z_3 + 1} = \\
 &0.055z_3^{-1} + 0.214z_3^{-2} + 0.459z_3^{-3} + 0.819z_3^{-4} + 1.308z_3^{-5} + \\
 &1.874z_3^{-6} + \dots
 \end{aligned}$$

7.4.15 试判断下列系统的稳定性:

(1) 已知离散系统的特征方程为

$$D(z) = (z+1)(z+0.5)(z+2) = 0$$

(2) 已知闭环离散系统的特征方程为

$$D(z) = z^4 + 0.2z^3 + z^2 + 0.36z + 0.8 = 0$$

(注:要求用朱利判据)

(3) 已知误差采样的单位反馈离散系统,采样周期  $T = 1$  s,开环传递函数

$$G(s) = \frac{22.57}{s^2(s+1)}$$

解 (1) 系统特征根幅值

$$|\lambda_1| = |-1| = 1, \quad |\lambda_2| = |-0.5| = 0.5, \quad |\lambda_3| = |-2| = 2 > 1$$

有特征根落在单位圆之外,系统不稳定。

$$(2) \quad D(z) = z^4 + 0.2z^3 + z^2 + 0.36z + 0.8 = 0$$

用朱利稳定判据( $n = 4$ )

	$z^0$	$z^1$	$z^2$	$z^3$	$z^4$
1	0.8	0.36	1	0.2	1
2	1	0.2	1	0.36	0.8
3	-0.36	0.088	-0.2	-0.2	
4	-0.2	-0.2	0.088	-0.36	
5	0.089 6	-0.071 68	0.089 6		

$$D(1) = 3.36 > 0, \quad D(-1) = 2.24 > 0$$

$$|a_0| = 0.8 < |a_4| = 1, \quad |b_4| = 0.36 > |b_3| = 0.2$$

$$|c_0| = 0.0896 = |c_2| = 0.0896$$

故系统不稳定。

$$\begin{aligned} (3) \quad G(z) &= Z\left[\frac{22.57}{s^2(s+1)}\right] = Z\left[\frac{22.57}{s^2} - \frac{22.57}{s} + \frac{22.57}{s+1}\right] = \\ &= 22.57 \left[ \frac{z}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-e^{-1}} \right] = \\ &= \frac{22.57z[e^{-1}z + (1-2e^{-1})]}{(z-1)^2(z-e^{-1})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(z) &= (z-1)^2(z-e^{-1}) + 22.57z[e^{-1}z + (1-2e^{-1})] = \\ &= z^3 + 5.9z^2 + 7.7z - 0.368 \end{aligned}$$

列朱利表( $n=3$ )

	$z_0$	$z_1$	$z_2$	$z_3$
1	-0.368	7.7	5.9	1
2	1	5.9	7.7	-0.368
3	-0.865	-8.73	-9.9	

$$D(1) = 14.432 > 0, \quad D(-1) = -3.368 < 0$$

$$|a_0| = 0.368 < |a_3| = 1$$

$$|b_0| = 0.865 < |b_2| = 9.9 \quad (\text{系统不稳定})$$

**7.4.16** 设离散系统如图 7.4.58 所示, 采样周期  $T=1\text{ s}$ ,  $G_b(s)$  为零阶保持器, 而

$$G(s) = \frac{K}{s(0.2s+1)}$$

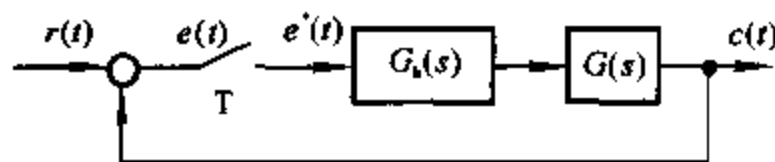


图 7.4.58 离散系统

要求:

- (1) 当  $K=5$  时, 分别在  $z$  域和  $w$  域中分析系统的稳定性;
- (2) 确定使系统稳定的  $K$  值范围。

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad (1) \quad G_b G(z) &= (1-z^{-1})Z\left[\frac{K}{s^2(0.2s+1)}\right] = \\
 &= K \frac{z-1}{z} \left[ \frac{z}{(z-1)^2} - \frac{z(1-e^{-5T})}{5(z-1)(z-e^{-5T})} \right] = \\
 &= K \left[ \frac{1}{z-1} - \frac{1-e^{-5T}}{5(z-e^{-5T})} \right] = \\
 &= K \left[ \frac{4+e^{-5T}}{5} z + \frac{1-6e^{-5T}}{5} \right] \\
 D(z) &= (z-1)(z-e^{-5T}) + K \left[ \frac{4+e^{-5T}}{5} z + \frac{1-6e^{-5T}}{5} \right] = \\
 &= z^2 + \left[ -(1+e^{-5T}) + K \left( \frac{4+e^{-5T}}{5} \right) \right] z + \left[ e^{-5T} + K \frac{1-6e^{-5T}}{5} \right]
 \end{aligned}$$

当  $K=5$  时

$$D(z) = z^2 + 3z + 0.9663 = 0$$

解根得  $\lambda_1 = -2.633, \lambda_2 = -0.367$  (系统不稳定)

以  $z = \frac{w+1}{w-1}$  代入, 并整理得

$$D(w) = w^2 + 0.01357w - 0.208$$

$D(w)$  中有系数小于零, 不满足系统稳定的必要条件。

(2) 当  $K$  为变量时

$$D(z) = z^2 + (0.80135K - 1.006738)z + (0.1919K + 0.006738)$$

以  $z = \frac{w+1}{w-1}$  代入并理得

$$D(w) = 0.9933Kw^2 + (1.9865 - 0.3838K)w + (2.0135 - 0.60945K)$$

由劳斯判据可得使系统稳定的  $K$  值范围为:

$$0 < K < 3.304$$

**7.4.17** 设离散系统如图 7.4.59 所示, 其中采样周期  $T=0.2\text{ s}, K=10$ ,  $r(t) = 1+t+t^2/2$ , 试用终值定理法计算系统的稳态误差  $e(\infty)$ 。

**解** 系统开环脉冲传递函数为

$$\begin{aligned}
 GH(z) &= Z\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s} \cdot \frac{10(1+0.5s)}{s^2}\right] = (1-z^{-1})Z\left[\frac{10(1+0.5s)}{s^3}\right] = \\
 &= (1-z^{-1})\left[\frac{5T^2(z-1)z}{(z-1)^3} + \frac{5Tz}{(z-1)^2}\right]
 \end{aligned}$$

将  $T=0.2$  代入, 并整理得

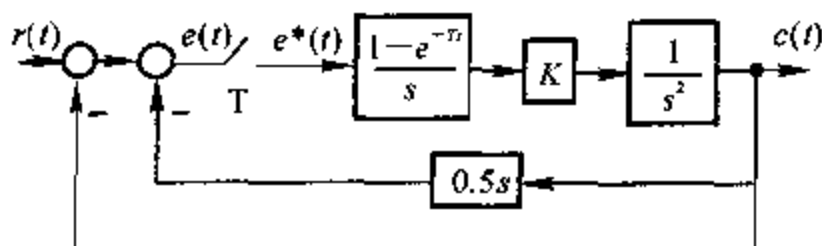


图 7.4.59 闭环离散系统

$$GH(z) = \frac{1.2z - 0.8}{(z-1)^2}$$

$$\Phi_e(z) = \frac{E(z)}{R(z)} = \frac{1}{1+GH(z)} = \frac{(z-1)^2}{(z-1)^2 + 1.2z - 0.8} = \frac{z^2 - 2z + 1}{z^2 - 0.8z + 0.2}$$

令  $D(z) = z^2 - 0.8z + 0.2 = 0$

$$z_{1,2} = 0.4 \pm j0.2$$

因为  $|z_1| < 1, |z_2| < 1$

所以系统稳定。

$$R(z) = Z\left[1 + t + \frac{t^2}{2}\right] = \left[\frac{z}{z-1} + \frac{0.2z}{(z-1)^2} + \frac{0.04z(z+1)}{2(z-1)^3}\right]$$

$$e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1}) \Phi_e(z) R(z) =$$

$$\lim_{z \rightarrow 1} \left[1 + \frac{0.2}{z-1} + \frac{0.04(z+1)}{2(z-1)^2}\right] \left[\frac{(z-1)^2}{z^2 - 0.8z + 0.2}\right] = 0.1$$

**7.4.18** 设离散系统如图 7.4.60 所示,其中  $T = 0.1\text{ s}$ ,  $K = 1$ ,  $r(t) = t$ , 试求静态误差系数  $K_p, K_v, K_a$ , 并求系统稳态误差  $e(\infty)$ 。

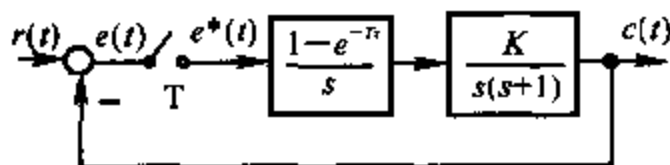


图 7.4.60 闭环离散系统

**解** 系统开环脉冲传递函数为

$$G(z) = (1-z^{-1})Z\left[\frac{1}{s^2(s+1)}\right] =$$



$$(1 - z^{-1}) \left[ \frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{(1 - e^{-T})z}{(z-1)(z - e^{-T})} \right]$$

将  $T = 0.1$  代入并整理得

$$G(z) = \frac{0.005(z + 0.9)}{(z-1)(z - 0.905)}$$

令

$$D(z) = z^2 - 1.9z + 0.9 = 0$$

$$z_{1,2} = 0.85 \pm j0.05$$

因为

$$|z_1| < 1, \quad |z_2| < 1$$

所以系统稳定。

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} [1 + G(z)] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ 1 + \frac{0.005(z + 0.9)}{(z-1)(z - 0.905)} \right] = \infty$$

$$K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)G(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{0.005(z + 0.9)}{(z-1)(z - 0.905)} = 0.1$$

$$e(\infty) = \frac{1}{K_p} + \frac{T}{K_v} = 1$$

**7.4.19** 已知离散系统如图 7.4.61 所示,其中 ZOH 为零阶保持器,  $T = 0.25$  s, 当  $r(t) = 2 + t$  时,欲使稳态误差小于 0.1,试求  $K$  值。

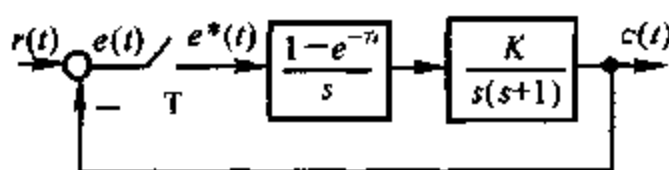


图 7.4.61 闭环离散系统

解

$$G(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \frac{K e^{-0.5t}}{s} = \frac{K(1 - e^{-Ts})e^{-2Ts}}{s^2}$$

$$G(z) = \frac{z-1}{z} Z \left[ \frac{K e^{-2Ts}}{s^2} \right] = \frac{z-1}{z} \frac{KTz}{(z-1)^2} z^{-2} = \frac{KTz^{-2}}{z-1}$$

$$R(z) = Z[2 \times 1(t) + t] = \frac{2z}{z-1} + \frac{Tz}{(z-1)^2}$$

系统是 I 型系统,阶跃输入下的稳态误差为零,斜坡输入下的稳态误差为常值

$$K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)G(z) = KT$$

$$e_{ss2} = \frac{T}{K_v} = \frac{1}{K} < 0.1$$

故

$$K > 10$$

即:当  $K > 10$  时,系统在  $r(t) = 2 \times 1(t) + t$  作用下的稳态误差小于 0.1。

现判定系统稳定时  $K$  值的范围:

$$D(z) = z^3 - z^2 + KT = z^3 - z^2 + 0.25K$$

由朱利稳定判据

$$D(1) > 0, \text{得 } K > 0$$

$$D(-1) < 0, \text{得 } K < 8$$

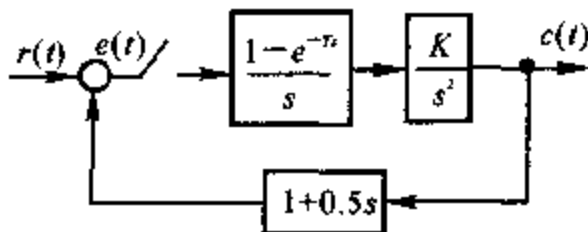
$$|a_0| > a_3, \text{得 } -4 < K < 4$$

$$|q_0| > |q_2|, \text{得 } -2.466 < K < 2.466$$

将上面四个不等式联立求解得:当  $0 < K < 2.466$  时,系统稳定,有稳态误差。因此,不存在  $e_{ss} < 0.1$  的稳态误差。

7.4.20 试分别求出图 7.4.59 和图 7.4.60 系统的单位阶跃响应  $c(nT)$ 。

解 (a) 将结构图等效变换为图解 7.4.20。



图解 7.4.20

$$\Phi(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{Z\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s} \frac{K}{s^2}\right]}{1 + Z\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s} \frac{K}{s^2} (1+0.5s)\right]} =$$

$$\frac{\frac{KT^2}{2}(z+1)}{(z-1)^2 + \frac{KT^2}{2}(z+1) + \frac{KT}{2}(z-1)}$$

将  $K = 10, T = 0.2$  代入得

$$\Phi(z) = \frac{0.2(z+1)}{z^2 - 0.8z + 0.2}$$

$$C(z) = \Phi(z)R(z) = \frac{0.2(z+1)}{z^2 - 0.8z + 0.2} \frac{z}{z-1} = \frac{0.2(z^2 + z)}{z^3 - 1.8z^2 + z - 0.2} =$$

$$0.2z^{-1} + 0.56z^{-2} + 0.846z^{-3} + 1.111z^{-4} + 1.428z^{-5} + 1.842z^{-6} + \dots$$

$$c^*(t) = 0.28\delta(t-1) + 0.56\delta(t-2) + 0.846\delta(t-3) + 1.111\delta(t-4) + 1.428\delta(t-5) + 1.842\delta(t-6) + \dots$$

(b) 系统开环脉冲传递函数为

$$G(z) = (1 - z^{-1})KZ\left[\frac{1}{s^2(s+1)}\right] = K\left[\frac{T}{z-1} - \frac{1-e^{-T}}{z-e^{-T}}\right]$$

$T = 0.1, K = 1$  代入

$$G(z) = \frac{0.0048z + 0.0047}{(z-1)(z+0.905)}$$

$$\Phi(z) = \frac{G(z)}{1+G(z)} = \frac{0.0048z + 0.0047}{z^2 - 0.09z - 0.9}$$

$$C(z) = \Phi(z)R(z) = \frac{0.0048z + 0.0047}{z^2 - 0.09z - 0.9} \frac{z}{z-1} =$$

$$\frac{0.0048z^2 + 0.0047z}{z^3 - 1.09z^2 - 0.81z + 0.9} =$$

$$0.0048z^{-1} + 0.0099z^{-2} + 0.0147z^{-3} + 0.0198z^{-4} +$$

$$0.0245z^{-5} + 0.0295z^{-6} + \dots$$

$$c^*(t) = 0.0048\delta(t-1) + 0.0099\delta(t-2) + 0.0147\delta(t-3) + 0.0198\delta(t-4) + 0.0245\delta(t-5) + 0.0295\delta(t-6) + \dots$$

7.4.21 已知离散系统如图 7.4.62 所示:

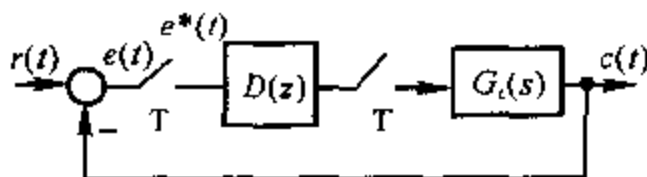


图 7.4.62 离散系统

其中采样周期  $T = 1$  s, 连续部分传递函数

$$G_0(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

试求当  $r(t) = 1(t)$  时, 系统无稳态误差, 过渡过程在最少拍内结束的数字控制器  $D(z)$ 。

$$\text{解 } Z[G_0(s)] = Z\left[\frac{1}{s(s+1)}\right] = Z\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right] =$$

$$\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-1}} = \frac{0.63z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-0.37z^{-1})}$$

$$r(t) = 1(t)$$

查表 7.1.4, 有

$$D(z) = \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})G(z)} = \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1}) \frac{0.63z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-0.37z^{-1})}} = \frac{1-0.37z^{-1}}{0.63}$$

7.4.22 设离散系统如图 7.4.63 所示:

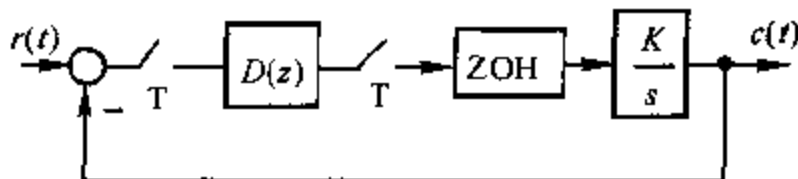


图 7.4.63 离散系统

其中采样周期  $T = 1$  s, 试求当  $r(t) = R_0 1(t) + R_1 t$  时, 系统无稳态误差、过渡过程在最少拍内结束的  $D(z)$ 。

解 系统开环脉冲传递函数为

$$G(z) = (1-z^{-1})Z\left[\frac{K}{s^2}\right] = \frac{K}{z-1}$$

$$R(z) = \frac{R_0 z}{z-1} + \frac{R_1 z}{(z-1)^2}$$

令 
$$e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1})\Phi_e(z) \left[ \frac{R_0 z}{z-1} + \frac{R_1 z}{(z-1)^2} \right] = 0$$

可取得

$$\Phi_e(z) = (1-z^{-1})^2$$

则

$$\Phi(z) = 1 - \Phi_e(z) = 2z^{-1} - z^{-2}$$

$$D(z) = \frac{\Phi(z)}{G(z)\Phi_e(z)} = \frac{(2-z^{-1})z^{-1}}{\frac{K}{z-1}(1-z^{-1})^2} = \frac{2-z^{-1}}{K(1-z^{-1})}$$

7.4.23 试按无波纹最少拍系统设计方法, 分别算出题 7.4.21 和题 7.4.22 的  $D(z)$ 。

解 (1) 利用 7.4.21 题结果

$$G_0(z) = \frac{0.63z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-0.37z^{-1})}$$

当  $r(t) = 1(t)$  作用时, 由表 7.1.4 查出最少拍设计中

$$\Phi_e(z) = 1 - z^{-1}$$

同时也代偿了  $G_0(z)$  中单位圆上的极点;

$$\Phi(z) = z^{-1} = 1 - \Phi_e(z)$$

同时也代偿了  $G_0(z)$  分子中的“ $z^{-1}$ ”因子,  $G_0(z)$  中没有其他零点。

$$D(z) = \frac{\Phi(z)}{G_0(z)\Phi_e(z)} = \frac{1 - 0.37z^{-1}}{0.63} = 1.587 - 0.587z^{-1}$$

验算  $E_2(z) = D(z)\Phi_e(z)R(z) = 1.587 - 0.587z^{-1}$

即  $e_2(0) = 1.587, e_2(1) = -0.587, e_2(2) = e_2(3) = \dots = 0$

表明系统从第二拍起达到稳定。

(2) 利用题 7.4.22 结果

$$G_0(z) = \frac{Kz^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

$$R(z) = \frac{R_0}{1 - z^{-1}} + \frac{R_1 z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} = \frac{R_0 + (R_1 - R_0)z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} = \frac{A(z)}{(1 - z^{-1})^2}$$

当  $r(t) = t$  作用时, 由表 7.1.4 查出

$$\Phi_e(z) = (1 - z^{-1})^2$$

同时也代偿了  $G_0(z)$  中单位圆上的极点:

$$\Phi(z) = 1 - \Phi_e(z) = z^{-1}(2 - z^{-1})$$

同时也代偿了  $G_0(z)$  分子中的“ $z^{-1}$ ”因子,  $G_0(z)$  中没有其他零点。

$$D(z) = \frac{\Phi(z)}{G_0(z)\Phi_e(z)} = \frac{2 - z^{-1}}{K(1 - z^{-1})}$$

验算

$$E_2(z) = D(z)\Phi_e(z)R(z) = \frac{(2 - z^{-1})[R_0 + (R_1 - R_0)z^{-1}]}{1 - z^{-1}} =$$

$$\frac{1}{K}[2R_0 + (2R_1 - R_0)z^{-1} + R_1(z^{-2} + z^{-3} + \dots)]$$

即  $e_2(0) = \frac{2R_0}{K}, e_2(1) = \frac{2R_1 - R_0}{K}, e_2(2) = e_2(3) = \dots = \frac{R_1}{K}$

表明系统从第二拍起达到稳定。

## 第8章 非线性控制系统分析

---

### 8.1 重点内容提要

#### 8.1.1 非线性控制系统概述

##### 1. 一般概念

非线性是宇宙间的普遍规律,而线性只是对实际情况在一定条件下理想化的近似。控制系统在不同程度上都存在着非线性,当系统中含有一个或多个具有非线性的元件时,该系统称为非线性系统。有些系统可以在工作点附近线性化,然后按线性系统来处理,但当系统含有本质非线性特性(如死区特性、继电器特性等)时,就不能用线性化方法处理。

##### 2. 非线性系统的特征

(1) 非线性系统的稳定性和响应形式除了与系统的结构和参数有关外,还和系统的初始条件有关。非线性系统的平衡点可能不止一个,可能在某个局部范围稳定,在另一个范围却不稳定,故对非线性系统而言,不能笼统地讲系统是否稳定,而应指明在多大范围内的稳定性。

(2) 非线性系统响应除了发散或收敛两种运动状态外,系统本身还会产生幅值、频率与自身结构系数有关的稳定的自振运动。

(3) 线性系统可用线性微分方程来描述,故具有线性性质,可以应用叠加原理,而非线性系统则要用非线性微分方程来描述,求解非线性微分方程不能应用叠加原理。

(4) 非线性元部件的正弦响应会产生非线性畸变,输出中除了会有与输入同频率的基波成分外,还有其他各种谐波分量。

##### 3. 研究方法

非线性系统比起线性系统要复杂得多,到目前为止,没有解决各类非线性问题的统一方法。常用的研究方法有:描述函数法和相平面法。

### 8.1.2 描述函数法

#### 1. 基本概念

(1) 描述函数法:它是线性系统频率法在非线性系统分析中的推广,它主要用于一类非线性系统的稳定性分析及自振分析,此方法不受系统阶次限制。

(2) 定义:它是非线性环节在正弦输入作用下其输出响应中的基波分量对输入的复数比,是非线性特性“谐波线性化”的结果。即

$$N = \frac{Y_1}{X} \angle \varphi_1 = \frac{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}{X} \angle \arctan \frac{A_1}{B_1} = \frac{B_1}{X} + j \frac{A_1}{X}$$

式中, $X$ 为输入正弦量 $x(t)$ 的幅值; $A_1, B_1$ 为输出量中基波分量的傅氏系数。

(3) 描述函数法的应用条件:

- 1) 系统可化为一个非线性环节和一个线性环节串联的典型反馈结构。
- 2) 非线性特性具有奇对称性。
- 3) 非线性环节输出中基波分量的幅值占优。
- 4) 线性环节的低通滤波特性好。

#### 2. 稳定性判定及自振分析

(1) 判定非线性系统稳定性的步骤:

第一步:将实际系统归化为一个非线性部分和一个线性部分串联的典型结构。

第二步:绘制线性部分的幅相频率特性曲线 $G(j\omega)$ 。

第三步:求非线性部分的负倒描述函数 $-\frac{1}{N(x)}$ 并做出相应负倒描述函数曲线 $-\frac{1}{N(x)}$ 。

第四步:判定非线性系统的稳定性。

线性环节幅相特性 $G(j\omega)$ 包围负倒描述函数 $-\frac{1}{N(x)}$ 曲线时,系统不稳定, $G(j\omega)$ 不包围 $-\frac{1}{N(x)}$ 曲线时系统稳定,当 $G(j\omega)$ 与 $-\frac{1}{N(x)}$ 有交点时,可能对应稳定的自振运动。

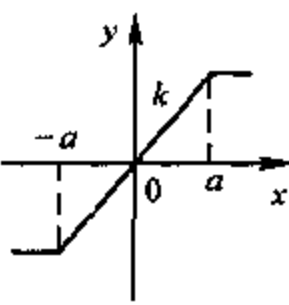
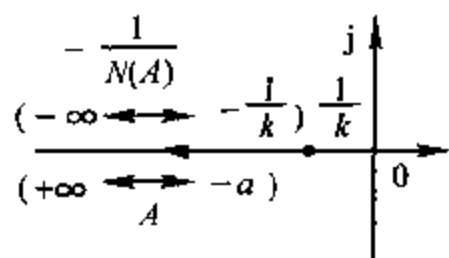
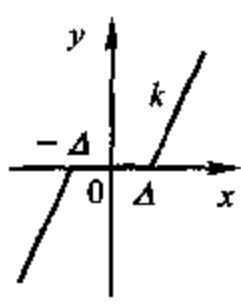
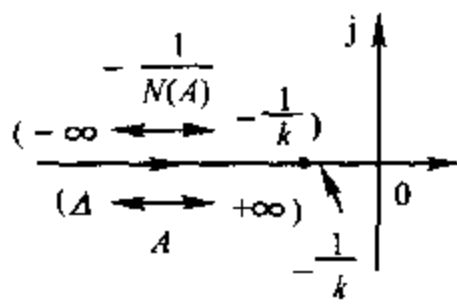
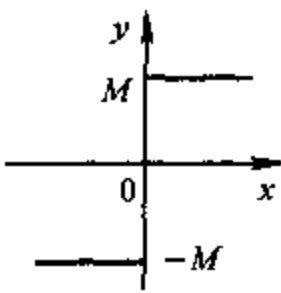
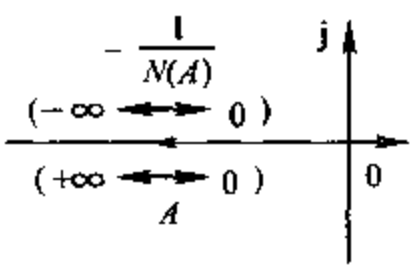
(2) 自振的分析及计算:

非线性系统是否存在稳定自振运动的判别方法是:设线性环节的幅相特性

$G(j\omega)$  把复平面分为两个区域,被  $G(j\omega)$  包围的区域称为不稳定区,未被  $G(j\omega)$  包围的区域称为稳定区。若  $\frac{-1}{N(A)}$  曲线随振幅  $A$  增加的方向从不稳定区移动到稳定区,则穿越点对应是一个稳定的自振点。自振频率由  $G(j\omega)$  在该点处的  $\omega$  值确定,自振幅值由  $\frac{-1}{N(A)}$  在该点处的  $A$  值确定,具体计算中,可将  $G(j\omega)N(A) = -1$  的等号两端分解为实部和虚部(或模和相角),令两端实、虚部(或模、相角)分别相等,便可解出自振参数。

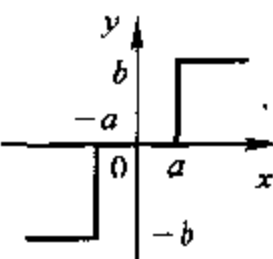
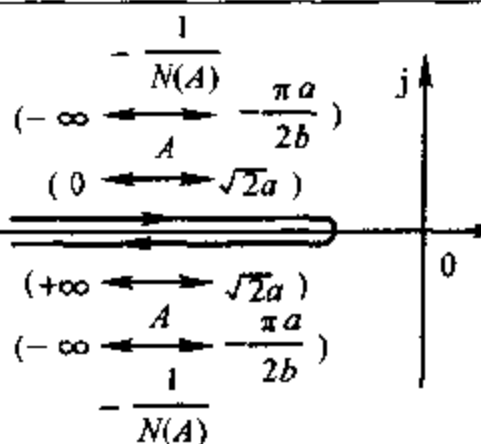
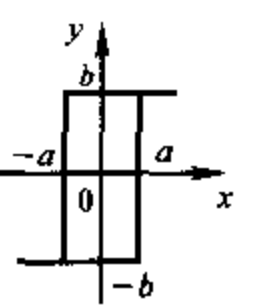
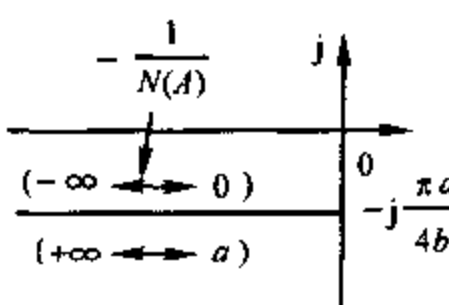
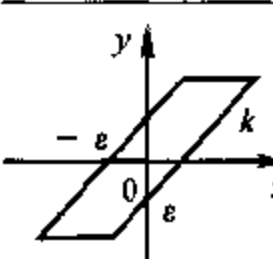
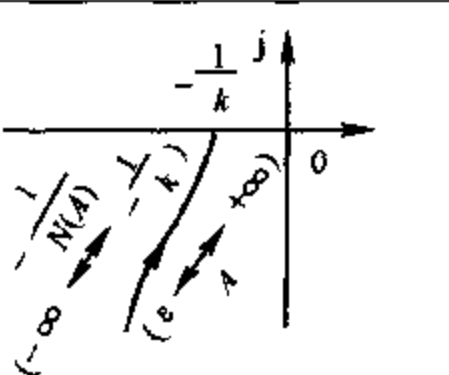
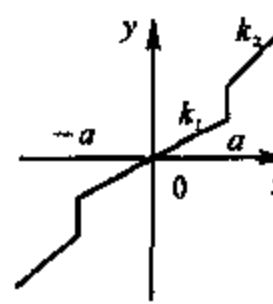
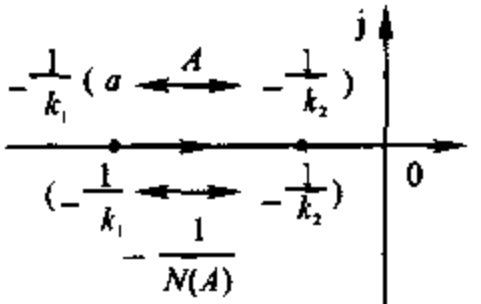
3. 典型非线性特性的描述函数  $N(A)$  及负倒描述函数曲线(见表 8.1.1)

表 8.1.1 常见非线性环节描述函数及负倒描述函数曲线

输入输出特性	$N(A)$	负倒描述函数曲线
	$\frac{2k}{\pi} \left[ \arcsin \frac{a}{A} + \frac{a}{A} \sqrt{1 - \left( \frac{a}{A} \right)^2} \right]$	
	$\frac{2k}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{\Delta}{A} - \frac{\Delta}{A} \sqrt{1 - \left( \frac{\Delta}{A} \right)^2} \right]$	
	$\frac{4M}{\pi A}$	



续表

输入输出特性	$N(A)$	负倒描述函数曲线
	$\frac{4b}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2}$	
	$\frac{4b}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2} - j \frac{4ab}{\pi A^2}$	
	$\frac{k}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2} + \arcsin\left(1 - \frac{2\epsilon}{A}\right) + 2\left(1 - \frac{2\epsilon}{A}\right) \times \sqrt{\frac{\epsilon}{A} \left(1 - \frac{\epsilon}{A}\right)} + j \frac{4k\epsilon}{\pi A} \left(\frac{\epsilon}{A} - 1\right) \right]$	
	$k_2 + \frac{2}{\pi} (k_1 - k_2) \times \left[ \arcsin \frac{a}{A} - \frac{a}{A} \times \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2} \right]$	

### 8.1.3 相平面法

#### 1. 相平面法

它是通过相平面图的分析来确定系统所有动态特性的方法,它适用于一、二阶非线性系统的运动分析,三阶以上系统的相轨迹不易表示,但该方法的概念可以推广到高阶系统。

#### 2. 有关概念

(1) 相平面:设二阶系统常微分方程为:

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = 0$$

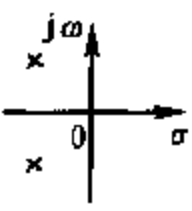
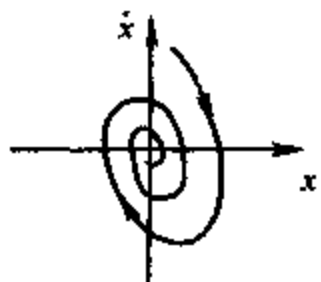
则以  $x, \dot{x}$  为坐标的平面称为相平面。

(2) 相轨迹:相变量  $x, \dot{x}$  从初始时刻  $t_0$  对应的状态点  $(x_0, \dot{x}_0)$  起,随着时间  $t$  的推移,在相平面上运动形成的曲线称为相轨迹。在相轨迹上用箭头表示参变量随时间  $t$  的增加方向,根据微分方程解的存在与惟一性定理,对于任一给定的初始条件,相平面上有一条相轨迹与之对应。

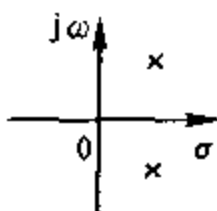
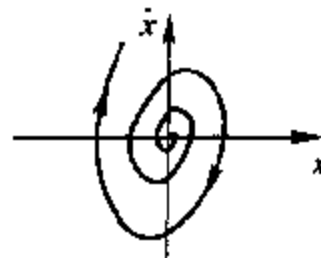
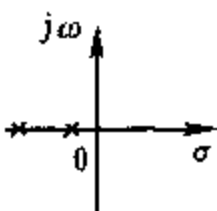
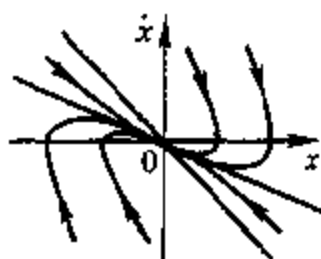
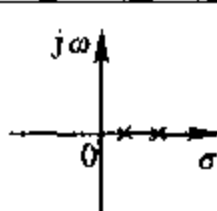
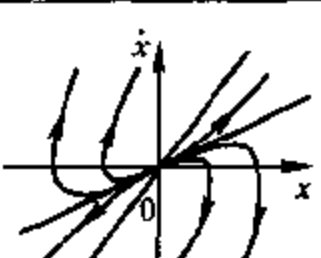
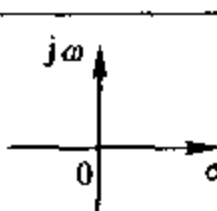
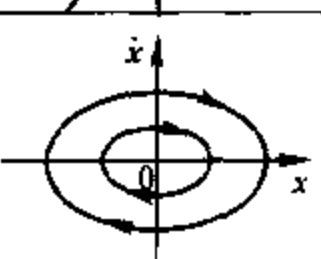
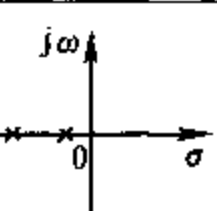
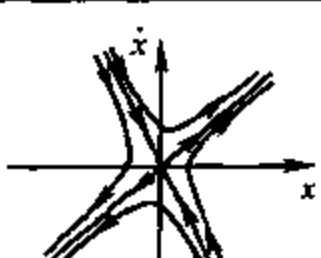
(3) 相平面图:多个初始条件下的运动对应多条相轨迹,形成相轨迹簇,而由一簇相轨迹所组成的图形称为相平面图。

(4) 奇点、平衡点:在相平面上  $\frac{dx}{dt}$  不确定的点称为奇点,在相平面上满足  $\ddot{x} = \dot{x} = 0$  的点称为平衡点,奇点与平衡点本质上是同一概念,二阶线性系统奇点性质与相轨迹如表 8.1.2 所示。

表 8.1.2

极点位置	相 轨 迹	奇点类型
		稳定焦点

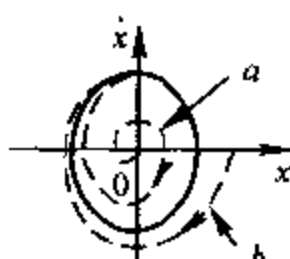
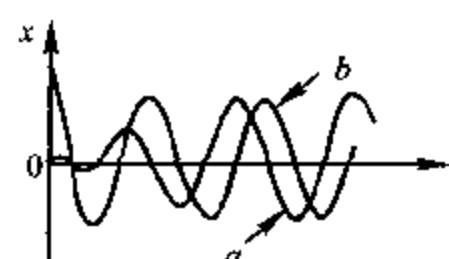
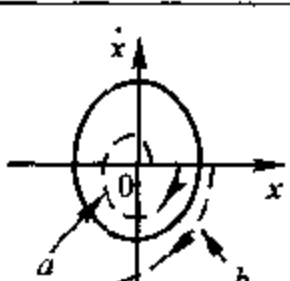
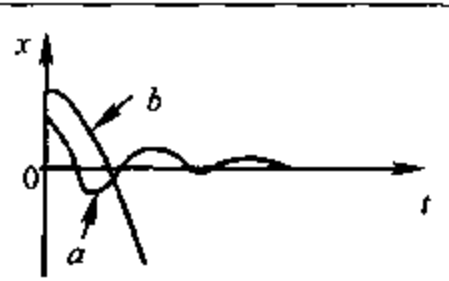
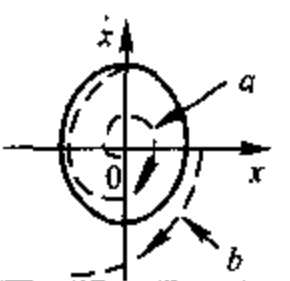
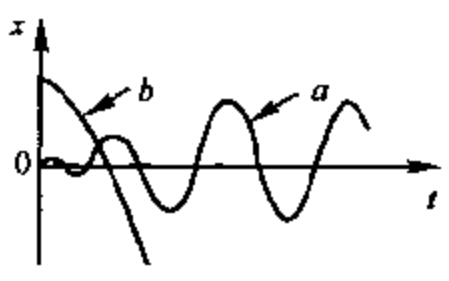
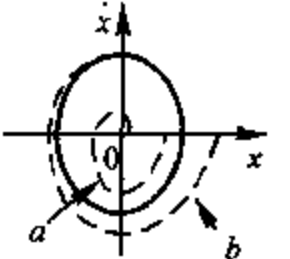

续表

极点位置	相 轨 迹	奇点类型
		不稳定焦点
		稳定节点
		不稳定节点
		中心点
		鞍点

(5) 相轨迹的走向: 上半相平面的点随时间增加向右( $x$ 轴正方向)运动, 下半相平面的点随时间增加向左( $x$ 轴负方向)运动, 所以沿相轨迹的运动为顺时针方向, 相轨迹穿越 $x$ 轴时与 $x$ 轴垂直相交。

(6) 极限环: 若非线性系统的相轨迹在相平面上表现为一个孤立的封闭曲线, 所有附近的相轨迹都渐近地趋向或离开这个封闭曲线, 则此封闭的相轨迹称为极限环, 极限环有稳定的、不稳定的和半稳定的之分(见表 8.1.3)。其中稳定的极限环对应一种稳定的自振运动。

表 8.1.3 极限环的类型及时间响应

极限环类型	相 轨 迹	时间响应
稳定极限环		
不稳定极限环		
半稳定极限环		
半稳定极限环		

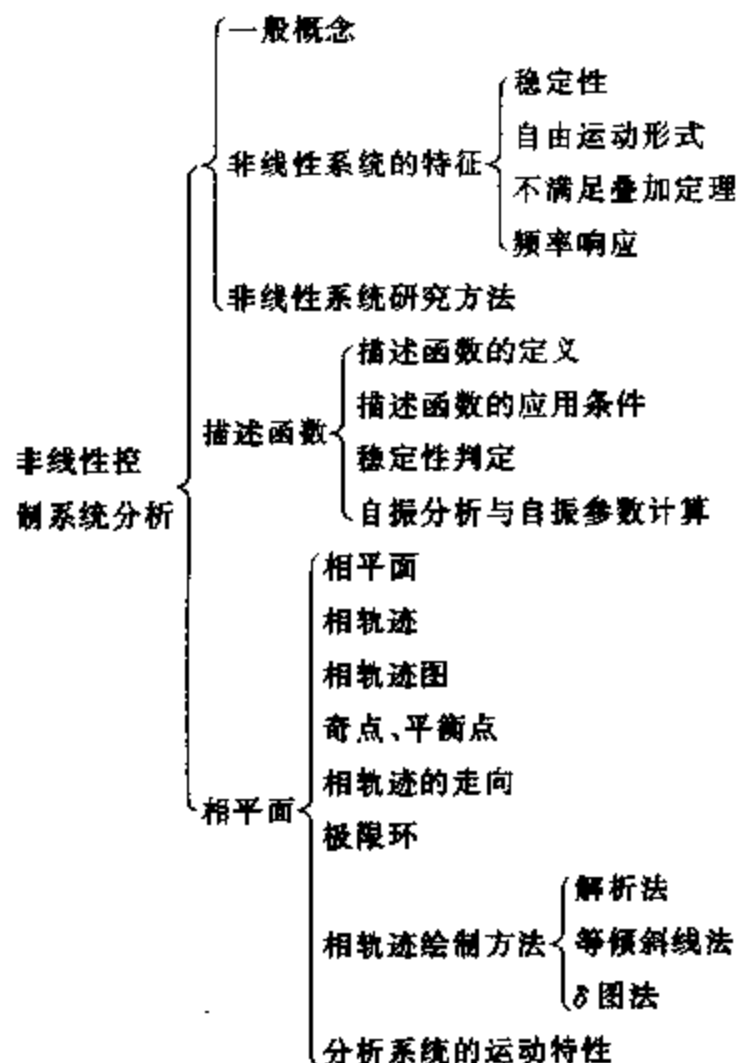
### 3. 相轨迹的绘制方法

- (1) 解析法。
- (2) 等倾斜线法。
- (3)  $\delta$  图法。

#### 4. 用相平面分析非线性系统

常见的非线性特性多数可用分段线性来近似。首先根据非线性特性的分段情况,用几条分界线将相平面划分为几个线性区域,然后按系统的结构图分别列写各区域的线性微分方程式,并应用线性系统相平面分析的方法和结论,绘出各区域的相轨迹,最后根据系统状态变化的连续性,在各区域的交界线上,将相轨迹彼此衔接成连续曲线,即构成完整的非线性系统相平面图。

## 8.2 知识结构图



## 8.3 考点及典型题选解

本章主要考点有两个方面:

- (1) 利用描述函数法分析非线性系统的稳定性及自振;确定自振参数。
- (2) 绘制系统的相轨迹,确定奇点及类型;用相平面图分析非线性系统的运动特性。

### 8.3.1 典型题

1. 将图 8.3.1 所示非线性系统简化成非线性部分  $N(A)$  和等效的线性部分  $G(s)$  相串联的单位反馈系统,并写出线性部分的传递函数  $G(s)$ 。

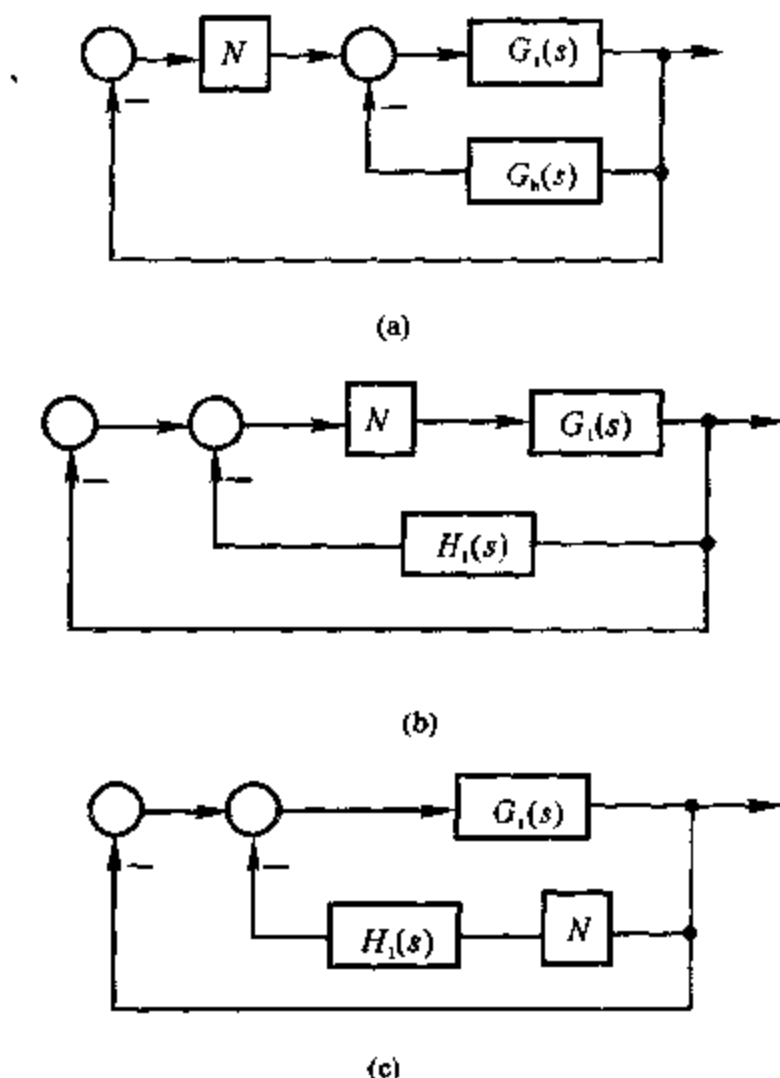


图 8.3.1 系统结构图

2. 判别图 8.3.2 所示各系统是否存在自振点。图中  $V$  是  $G(s)$  中纯积分环节的个数。
3. 系统如图 8.3.3 所示。试计算系统的自振参数。
4. 已知非线性控制系统如图 8.3.4(a) 所示,其中非线性特性为死区非线性

性,对象频率特性为

$$G_p(j\omega) = \frac{K}{j\omega(1+j\omega)(1+0.5j\omega)}$$

试分析该系统的稳定性。

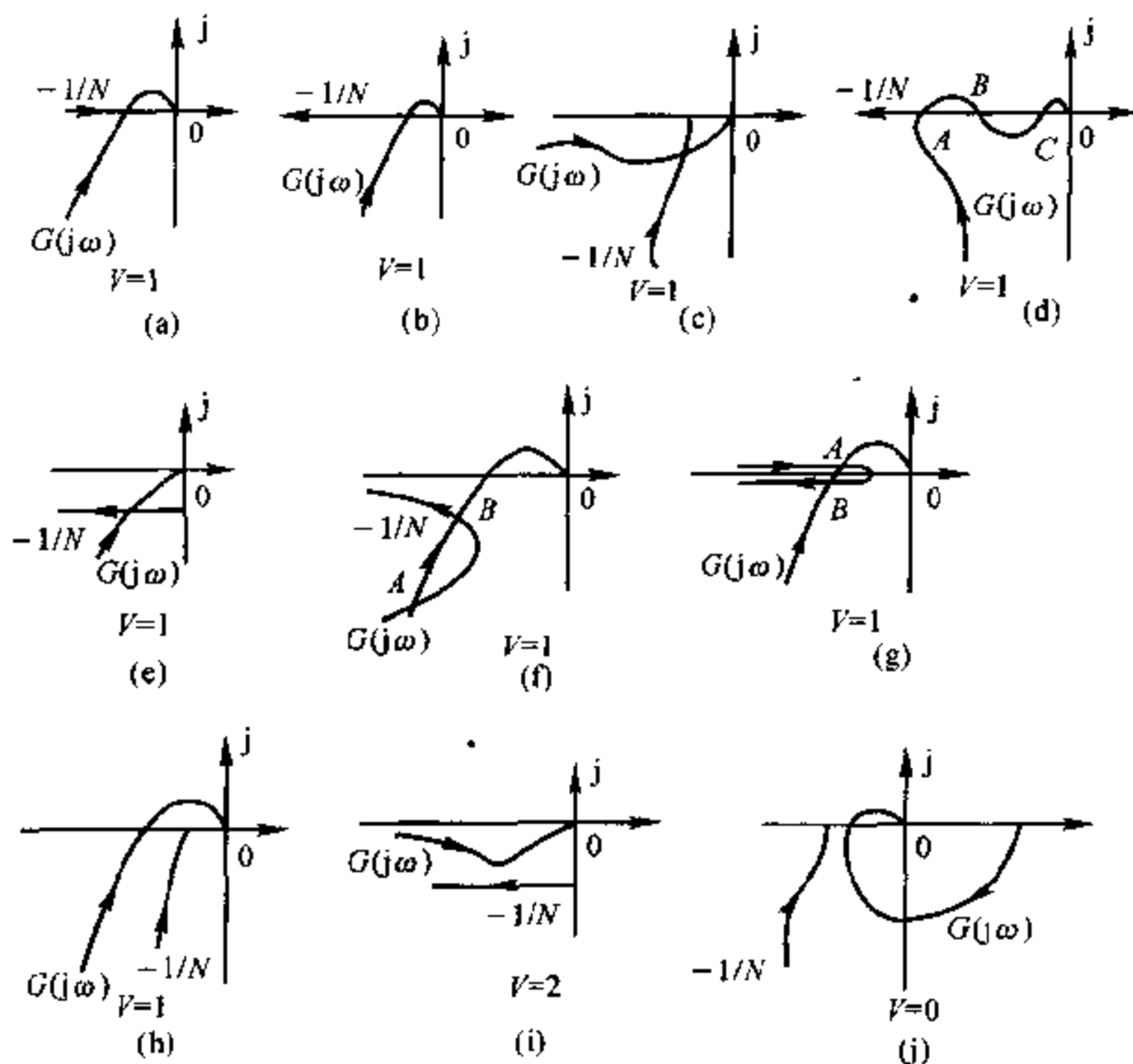


图 8.3.2  $-\frac{1}{N(A)}$  和  $G(j\omega)$  曲线

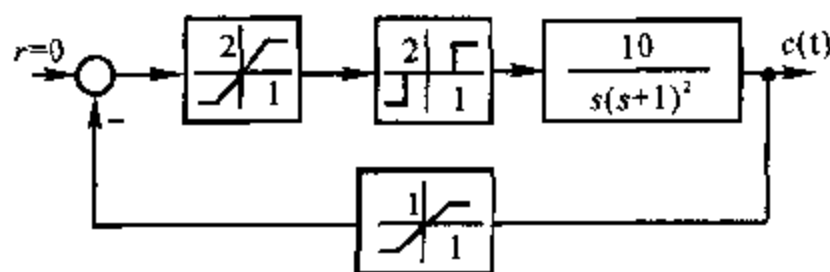


图 8.3.3 系统结构图

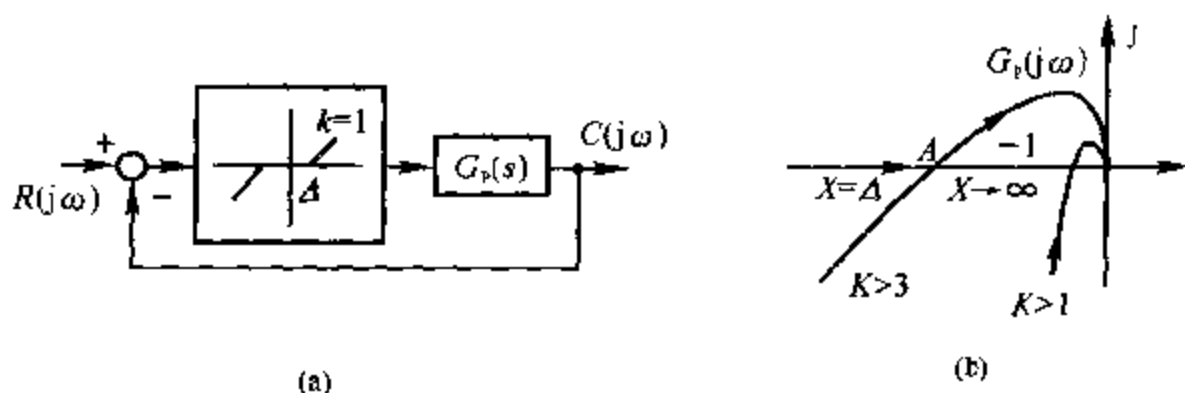


图 8.3.4 系统结构图及  $-\frac{1}{N(A)}$  和  $G(j\omega)$  曲线

5. 非线性控制系统结构图如图 8.3.5 所示,  $M=1$ 。要使系统产生振幅  $A \approx 4$ , 频率  $\omega = 1$  的自振运动, 试确定参数  $K, \tau$  的值。

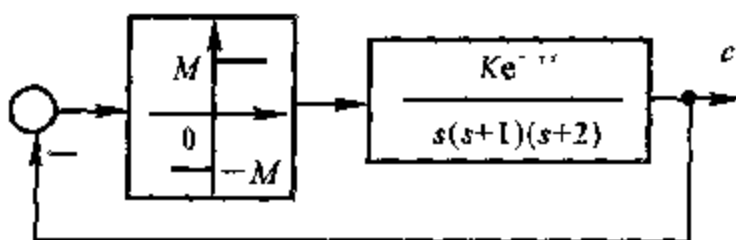


图 8.3.5 系统结构图

6. 非线性系统结构如图 8.3.6 所示。且非线性特性的描述函数  $N(A) = \frac{4}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{h}{A}\right)^2} - j \frac{4h}{\pi A^2} (A \geq h)$ 。

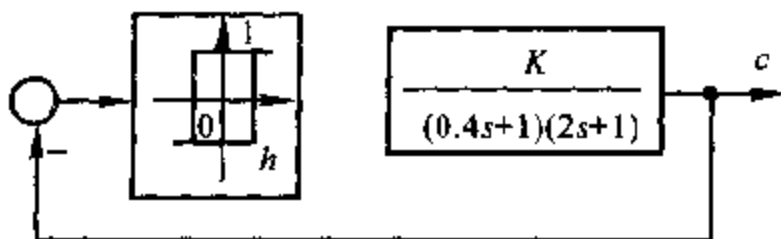


图 8.3.6 系统结构图

(1) 试求当  $K = 10, h = 0.1$  和  $0.2$  时, 系统产生自振的振幅  $A$  和频率  $\omega$ ;

(2) 若要求  $h = 0.2$ , 自振频率  $\omega = 4 \text{ rad/s}$  时, 问开环增益  $K$  应如何变化?

7. 试用相平面法分析如图 8.3.7 所示系统分别在  $\beta = 0, \beta < 0, \beta > 0$  情况下, 相轨迹的特点。



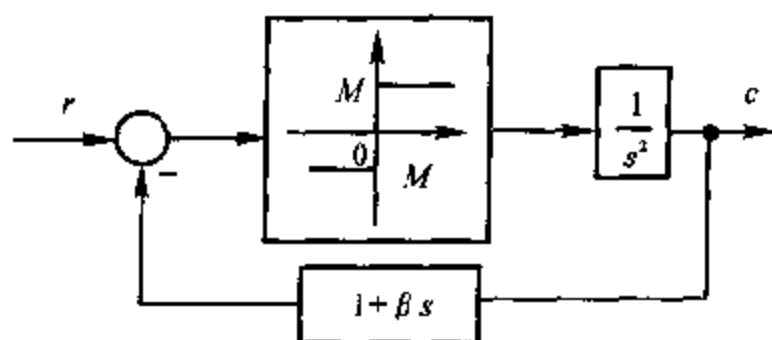


图 8.3.7 系统结构图

8. 若二阶非线性系统的微分方程为

$$(1) 2\ddot{x} + \dot{x}^2 + x = 0$$

$$(2) \ddot{x} - (1 - x^2)\dot{x} + x = 0$$

$$(3) \ddot{x} + 0.5\dot{x} + 2x + x^2 = 0$$

试求系统的奇点及类型。

9. 已知非线性系统结构如图 8.3.9 所示。

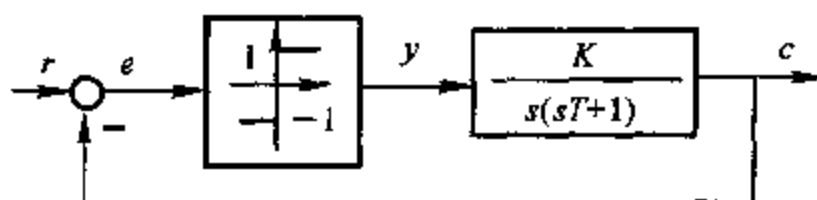


图 8.3.9 系统结构图

试求系统在  $r(t) = 1(t)$  作用下, 在  $e-\dot{e}$  平面的相轨迹。

### 8.3.2 典型题解析

1. (a) 依原图有

$$\Phi(s) = \frac{NG_1}{1 + G_1G_2 + NG_1}$$

令

$$1 + G_1G_2 + NG_1 = 0$$

$$\frac{G_1}{1 + G_1G_1} \cdot N = -1$$

所以

$$G(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}$$

(b) 依原图有

$$\Phi(s) = \frac{NG_1}{1 + NG_1 + NG_1 H_1}$$

令

$$1 + NG_1 + NG_1 H_1 = 0$$

$$N(G_1 + G_1 H_1) = -1$$

所以

$$G(s) = G_1(s)[1 + H_1(s)]$$

(c) 依原图有

$$\Phi(s) = \frac{G_1}{1 + G_1 + G_1 H_1 N}$$

令

$$1 + G_1 + G_1 H_1 N = 0$$

$$\frac{G_1 H_1}{1 + G_1} \cdot N = -1$$

所以

$$G(s) = \frac{G_1(s)H_1(s)}{1 + G_1(s)}$$

2. (a) 不是自振点

(b) 是自振点

(c) 是自振点

(d) A, C 是自振点, B 不是自振点

(e) 是自振点

(f) A 不是自振点, B 是自振点

(g) A 不是自振点, B 是自振点

(h) 系统不稳定, 不存在自振点

(i) 系统不稳定, 不存在自振点

(j) 系统稳定, 不存在自振点

3. 提示: 首先将三个串联在一起的非线性特性进行等效合并。由于反馈通道的饱和特性与前向通道饱和特性同时进入饱和状态, 所以反馈通道的非线性特性实质上不起作用, 可将其去掉。前向通道中

$$v = \begin{cases} 2, & e > 1 \\ 2e, & |e| \leq 1 \\ -2, & e < -1 \end{cases}$$

$$u = \begin{cases} 2, & v > 1 \rightarrow e > \frac{1}{2} \\ 0, & |v| \leq 1 \rightarrow |e| \leq \frac{1}{2} \\ -2, & v < -1 \rightarrow e < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

因此可将前向通道两个非线性特性合并在一起,系统结构图等效变换为图解 8.3.3 所示形式。

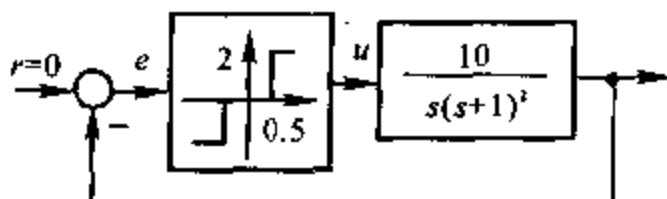


图 解 8.3.3 非线性系统结构图

由自振条件,得

$$-N(A) = \frac{1}{G(j\omega)}$$

$$\frac{-4M}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{h}{A}\right)^2} = \frac{j\omega(1+j\omega)^2}{10} = \frac{-2\omega}{10} + j \frac{\omega(1-\omega^2)}{10}$$

比较实部、虚部,并将  $M=2, h=\frac{1}{2}$  代入,有

$$\begin{cases} \frac{4 \times 2}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2A}\right)^2} = \frac{\omega}{5} \\ 1 - \omega^2 = 0 \end{cases}$$

联立求解得  $\omega=1, A=12.72$ 。

4. 非线性特性的描述函数为

$$N(A) = 1 - \frac{2}{\pi} \left[ \arcsin \frac{\Delta}{A} + \frac{\Delta}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta}{A}\right)^2} \right]$$

分别做出  $-\frac{1}{N(A)}$  和  $G_p(j\omega)$  曲线如图 8.3.4(b) 所示。令

$$\begin{cases} \angle G_p(j\omega_g) = -180^\circ \\ |G_p(j\omega_g)| = 1 \end{cases}$$

可解得

$$\begin{cases} \omega_g = \sqrt{2} \\ K = 3 \end{cases}$$

图(b)中做出了  $K=1$  和  $K>3$  的两条代表曲线,由此可见当  $K<3$  时  $G_p(j\omega)$  不包围  $-\frac{1}{N(A)}$  曲线,所以系统稳定的  $K$  值为  $0<K<3$ , 当  $K>3$  时系统不稳定。

$$5. \quad N(A) = \frac{4M}{\pi A} = \frac{1}{\pi}, \quad G(j\omega) = \frac{Ke^{-\pi\omega}}{j\omega(j\omega+1)(j\omega+2)}$$

画出  $\frac{-1}{N(A)}$  和  $G(j\omega)$  曲线如图解 8.3.5 所示

示, 当  $K$  改变时, 只影响自振振幅  $A$ , 不改变自振频率  $\omega$ ; 而当  $\tau \neq 0$  时, 会使自振频率降低, 幅值增加。因此可以调节  $K, \tau$  大小实现要求的自振运动。

由自振条件

$$N(A)G(j\omega) = -1$$

$$\text{即 } \frac{1}{\pi} \times \frac{Ke^{-\pi\tau}}{j\omega(1+j\omega)(2+j\omega)} = -1$$

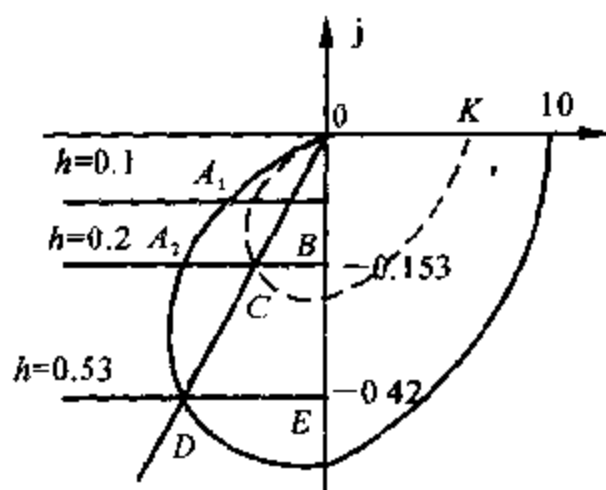
将  $\omega = 1$  代入上式可解得

$$K = 9.93, \quad \tau = 0.322$$

$$6. (1) \quad -\frac{1}{N(A)} = -\frac{\pi A}{4} \sqrt{1 - \left(\frac{h}{A}\right)^2} - j \frac{\pi h}{4}$$

$$G(j\omega) = \frac{10}{(0.4j\omega + 1)(2j\omega + 1)}$$

画出  $-\frac{1}{N(A)}$  和  $G(j\omega)$  曲线如图解 8.3.6 所示。



图解 8.3.6  $-\frac{1}{N(A)}$  和  $G(j\omega)$  曲线

由自振条件

$$N(A)G(j\omega) = -1$$

$$\text{可解得 } h = 0.1 \text{ 时 } \begin{cases} A_1 = 0.27 \\ \omega_1 = 7 \text{ rad/s} \end{cases}$$

$$h = 0.2 \text{ 时} \quad \begin{cases} A_2 \approx 0.42 \\ \omega_2 = 5.9 \text{ rad/s} \end{cases}$$

由此可见当  $h \uparrow$ , 则  $A \uparrow, \omega \downarrow$ 。

(2)  $K$  应减小。

① 首先在  $G(j\omega)$  曲线上找到  $\omega = 4 \text{ rad/s}$  时的点  $D$ , 此时对应  $h = 0.53$ 。

② 做直线  $OD$  交  $h = 0.2$  时  $\frac{-1}{N(A)}$  曲线于  $C$  点, 过  $C$  做  $G(j\omega)$  曲线 (如图解 8.3.6 中虚线所示)。

在  $\triangle OCB$  和  $\triangle ODE$  中有

$$\frac{\overline{OC}}{\overline{OD}} = \frac{K}{10} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OE}} = \frac{0.157}{0.42}$$

所以

$$K = \frac{0.157 \times 10}{0.42} = 3.74$$

7. 由图 8.3.7 可得

$$\ddot{c} = \begin{cases} M, & c + \beta \dot{c} < 0 \\ -M, & c + \beta \dot{c} > 0 \end{cases}$$

因此,  $c + \beta \dot{c} = 0$  为开关线。

分别求解  $\ddot{c} = \pm M$ , 可得

$$\begin{cases} \dot{c}^2 = 2M + A_1, & c + \beta \dot{c} < 0 & \text{相轨迹为开口向右的抛物线} \\ \dot{c}^2 = -2M + A_2, & c + \beta \dot{c} > 0 & \text{相轨迹为开口向左的抛物线} \end{cases}$$

(1) 当  $\beta = 0$  时, 开关线为  $\dot{c}$  轴, 相轨迹见图解 8.3.7(a), 为一族封闭曲线, 奇点在坐标原点, 为中心点。

(2) 当  $\beta < 0$  时, 开关线沿原点向右旋转, 相轨迹见图解 8.3.7(b), 奇点在坐标原点, 为不稳定的焦点。

(3) 当  $\beta > 0$  时, 开关线沿原点向左旋转, 相轨迹见图解 8.3.7(c), 奇点在坐标原点, 为稳定的焦点。

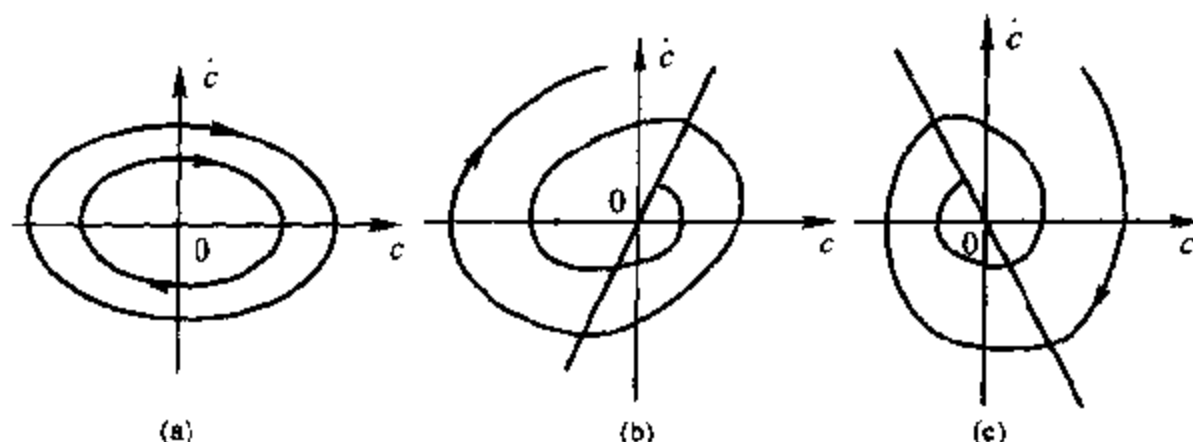
8. (1) 奇点坐标为  $(0, 0)$

线性化方程为:  $\ddot{x} + \frac{1}{2}x = 0$ , 故

$$s_{1,2} = \pm j\sqrt{\frac{1}{2}}$$

奇点为中心点。

(2) 奇点坐标为  $(0, 0)$



图解 8.3.7

线性化方程为:  $\ddot{x} - \dot{x} + x = 0$ , 故

$$s_{1,2} = 0.5 \pm j0.866$$

奇点为不稳定的焦点。

(3) 奇点坐标为  $(0,0)$  和  $(-2,0)$

当在  $(0,0)$  点时, 线性化方程为  $\ddot{x} + 0.5\dot{x} + 2x = 0$ , 故

$$s_{1,2} = -0.25 \pm j1.39$$

奇点为稳定的焦点。

当奇点在  $(-2,0)$  点时, 线性化方程为  $\ddot{x} + 0.5\dot{x} - 2x = 0$ , 故

$$s_1 = 1.186, \quad s_2 = -1.686$$

奇点为鞍点。

9. 由

$$\frac{C(s)}{Y(s)} = \frac{K}{s(Ts+1)}$$

可得

$$T\ddot{c} + \dot{c} = Ky \quad (1)$$

又由

$$E(s) = R(s) - C(s) \rightarrow c = r - e \quad (2)$$

把式 (2) 代入式 (1), 并整理有

$$T\ddot{e} + \dot{e} + Ky = T\ddot{r} + \dot{r} \quad (3)$$

由图 8.3.9 可得非线性部分微分方程为

$$y = \begin{cases} 1, & e > 0 \\ -1, & e < 0 \end{cases} \quad (4)$$

把式 (4) 代入式 (3) 并考虑  $r(t) = 1(t)$ , 则有

$$\begin{cases} T\ddot{e} + \dot{e} + K = 0, & K > 0 \\ T\ddot{e} + \dot{e} - K = 0, & K < 0 \end{cases} \quad (e = 0 \text{ 为开关线}) \quad (5)$$

设初始条件为  $e_0 = 1, \dot{e}_0 = 0$

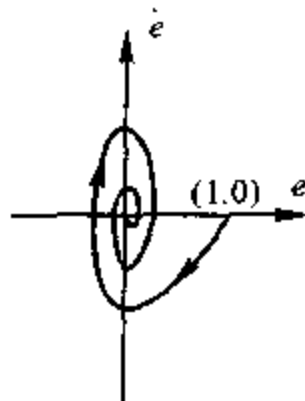
将  $\ddot{e} = \dot{e} \frac{d\dot{e}}{de}$  代入式 ⑤, 有

$$\left. \begin{aligned} de &= -\frac{T\dot{e}}{K+e}d\dot{e}, & e > 0 \\ de &= -\frac{T\dot{e}}{e-K}d\dot{e}, & e < 0 \end{aligned} \right\}$$

两端积分可得相轨迹方程为

$$\begin{cases} e = 1 - T\dot{e} + TK \ln\left(\frac{\dot{e}}{K} + 1\right), & e > 0 \\ e = 1 - T\dot{e} - TK \ln\left(-\frac{\dot{e}}{K} + 1\right), & e < 0 \end{cases}$$

可绘出  $e-\dot{e}$  平面上的相轨迹如图解 8.3.9 所示。



图解 8.3.9

## 8.4 课后习题全解

8.4.1 某线性系统的结构图如图 8.4.58 所示, 试分别绘制下列三种情况时, 变量  $e$  的相轨迹, 并根据相轨迹分别作出相应的  $e(t)$  曲线。

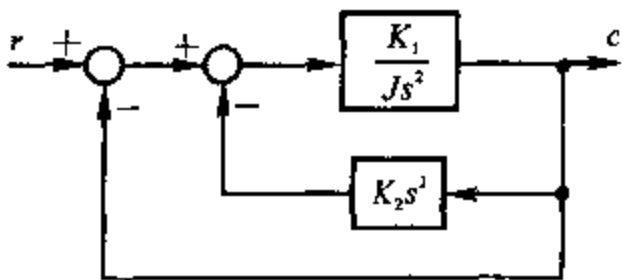


图 8.4.58 题 8.4.1 的线性系统结构图

(1)  $J = 1, K_1 = 1, K_2 = 2$ , 初始条件  $e(0) = 3, \dot{e}(0) = 0; e(0) = 1, \dot{e}(0) = -2.5$ ;

(2)  $J = 1, K_1 = 1, K_2 = 0.5$ , 初始条件  $e(0) = 3, \dot{e} = 0; e(0) = -3, \dot{e}(0) = 0$ ;

(3)  $J = 1, K_1 = 1, K_2 = 0$ , 初始条件  $e(0) = 1, \dot{e}(0) = 1; e(0) = 0, \dot{e}(0) = 2$ 。

解 依结构图有

$$\frac{C(s)}{E(s)} = \frac{\frac{K_1}{Js^2}}{1 + \frac{K_1 K_2}{J}} = \frac{K_1}{(J + K_1 K_2)s^2}$$

所以  $\ddot{c}(t) = \frac{K_1}{J + K_1 K_2} e(t)$

$r(t) \approx 0$  时  $c(t) \approx -e(t)$

所以  $\ddot{e}(t) = \frac{-K_1}{J + K_1 K_2} e(t)$

由积分法:

$$\dot{e}(t) d\dot{e}(t) = \frac{-K_1}{J + K_1 K_2} e(t) de(t)$$

$$\dot{e}(t)^2 \Big|_0^t + \frac{K_1}{J + K_1 K_2} e(t)^2 \Big|_0^t = 0$$

$$\dot{e}(t)^2 + \frac{K_1}{J + K_1 K_2} e(t)^2 = \dot{e}(0)^2 + \frac{K_1}{J + K_1 K_2} e(0)^2$$

代入  $K_1 = J = 1$  得:

$$\dot{e}(t)^2 + \frac{1}{1 + K_2} e(t)^2 = \dot{e}(0)^2 + \frac{1}{1 + K_2} e(0)^2$$

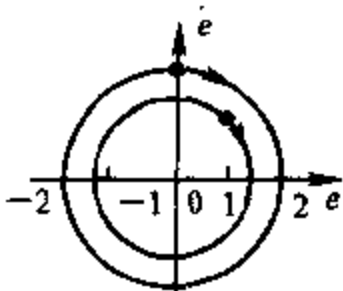
列表计算(见表解 8.4.1)

表解 8.4.1

$K_2$	初条件	相轨迹方程	相轨迹
2	$e(0) = 3, \dot{e}(0) = 0$ $e(0) = 1, \dot{e}(0) = -2.5$	$\dot{e}^2 + \frac{1}{3}e^2 = 3$ $\dot{e}^2 + \frac{1}{3}e^2 = 6.583$	
0.5	$e(0) = 3, \dot{e}(0) = 0$ $e(0) = -3, \dot{e}(0) = 0$	$\dot{e}^2 + \frac{2}{3}e^2 = 6$ $\dot{e}^2 + \frac{2}{3}e^2 = 6$	



续表

$K_2$	初条件	相轨迹方程	相轨迹
0	$e(0) = 1, \dot{e}(0) = 1$	$\dot{e}^2 + e^2 = 2$	
	$e(0) = 0, \dot{e}(0) = 2$	$\dot{e}^2 + e^2 = 4$	

## 8.4.2 设一阶非线性系统的微分方程为

$$\dot{x} = -x + x^3$$

试确定系统有几个平衡状态,分析各平衡状态的稳定性,并作出系统的相轨迹。

解 令  $\dot{x} = 0$  得

$$-x + x^3 = x(x-1)(x+1) = 0$$

系统平衡状态为

$$x_e = 0, -1, +1$$

当  $x_e = 0$  时,将原微分方程线性化得

$$\dot{x} = -x$$

进行拉氏变换,系统在  $x_e = 0$  处的特征方程为

$$s+1=0$$

特征根为

$$s = -1$$

可见  $x_e = 0$  是一个稳定的平衡点。

当  $x_e = -1$  时,令  $x = x_0 - 1$  进行平移变换,原微分方程变为

$$\dot{x}_0 = -(x_0 - 1) + (x_0 - 1)^3 = 2x_0 - 3x_0^2 - x_0^3$$

在  $x_0 = 0$  (即  $x = -1$ ) 处进行线性化,有

$$\dot{x}_0 = 2x_0$$

特征方程为

$$s-2=0$$

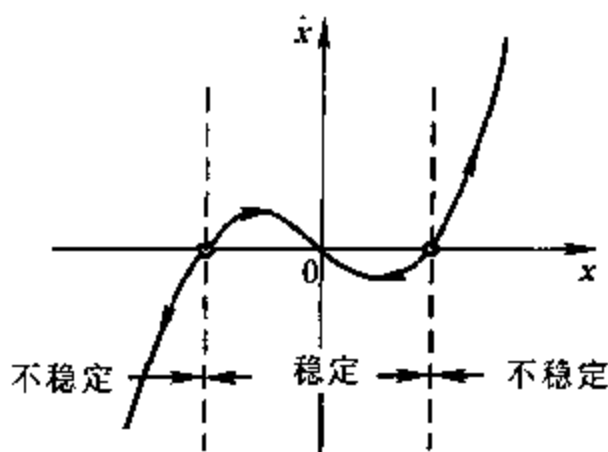
特征根为

$$s = 2$$

因此  $x_e = -1$  是一个不稳定的平衡点。同理讨论  $x_e = 1$  也是一个不稳定的平

衡点。

画出系统相轨迹如图解 8.4.2 所示。可见,当初始条件  $|x(0)| < 1$  时,系统会收敛到稳定的平衡点  $x_e = 0$ ,当  $|x(0)| > 1$  时,系统会发散。



图解 8.4.2 由方程  $\ddot{x} = -x + x^3$  描述的系统的相平面图

8.4.3 试确定下列方程的奇点及其类型,并用等倾线法绘制它们的相平面图:

- (1)  $\ddot{x} + \dot{x} + |x| = 0$ ;
- (2)  $\ddot{x} + x + \text{sign}(\dot{x}) = 0$ ;
- (3)  $\ddot{x} + \sin x = 0$ ;
- (4)  $\ddot{x} + |x| = 0$ ;
- (5)  $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + x_2. \end{cases}$

解 (1) 原方程可改写为:

$$\begin{cases} \text{I: } \ddot{x} + \dot{x} + x = 0, & x \geq 0 \\ \text{II: } \ddot{x} + \dot{x} - x = 0, & x < 0 \end{cases}$$

系统特征方程及特征根为:

$$\begin{cases} \text{I: } s^2 + s + 1 = 0, & s_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ (稳定焦点)} \\ \text{II: } s^2 + s - 1 = 0, & s_{1,2} = -1.618, +0.618 \text{ (鞍点)} \end{cases}$$

推导等倾斜线方程:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= f(x, \dot{x}) = -\dot{x} - |x| \\ \frac{d\dot{x}}{dx} \cdot \dot{x} &= -\dot{x} - |x| \end{aligned}$$

令 
$$\alpha = \frac{d\dot{x}}{dx} = -1 - \frac{|x|}{x}$$

所以 
$$\dot{x} = \frac{-1}{1+\alpha} |x| = \beta |x|$$

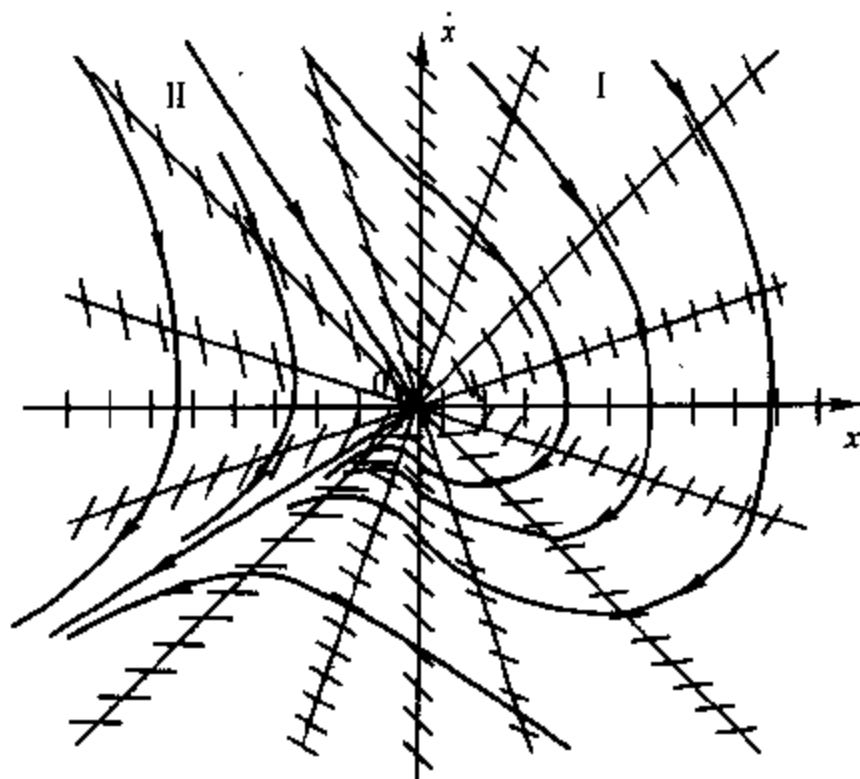
$$\begin{cases} \text{I: } \alpha = -1 - \frac{1}{\beta}, & x \geq 0 \\ \text{II: } \alpha = \frac{1}{\beta} - 1, & x < 0 \end{cases}$$

计算列表(见表解 8.4.3(1))

表解 8.4.3(1)

$\beta$	$-\infty$	$-3$	$-1$	$-\frac{1}{3}$	$0$	$\frac{1}{3}$	$1$	$3$	$\infty$
I: $\alpha = -1 - \frac{1}{\beta}$	$-1$	$-\frac{2}{3}$	$0$	$2$	$-\infty$	$-4$	$-2$	$-\frac{4}{3}$	$-1$
II: $\alpha = \frac{1}{\beta} - 1$	$-1$	$-\frac{4}{3}$	$-2$	$-4$	$\infty$	$2$	$0$	$-\frac{2}{3}$	$-1$

画出系统相平面图,如图解 8.4.3(1)。



图解 8.4.3(1)

$$(2) \ddot{x} + x + \text{sign}(\dot{x}) = 0$$

$$\text{sign}(\dot{x}) = \begin{cases} 1, & \dot{x} > 0, & \text{I} \\ 0, & \dot{x} = 0, & \text{II} \\ -1, & \dot{x} < 0, & \text{III} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{x} + x + 1 = 0, & \dot{x} > 0, & x_e = -1 \\ \ddot{x} + x = 0, & \dot{x} = 0, & x_e = 0 \\ \ddot{x} + x - 1 = 0, & \dot{x} < 0, & x_e = 1 \end{cases}$$

系统特征方程及特征根

$$s^2 + 1 = 0, \quad s_{1,2} = \pm j \quad (\text{中心点})$$

$$\text{I} : \dot{x} \frac{dx}{dx} = a \cdot \dot{x} = -x - 1, \quad \dot{x} = \frac{-(x+1)}{a}$$

$$\text{II} : \dot{x} = 0$$

$$\text{III} : \dot{x} \frac{dx}{dx} = a \dot{x} = 1 - x, \quad \dot{x} = \frac{-(x-1)}{a}$$

列表计算(见表解 8.4.3(2)), 做出相轨迹如图解 8.4.3(2)。

表解 8.4.3(2)

$\alpha$	$-\infty$	$-3$	$-1$	$-1/3$	$0$	$1/3$	$1$	$3$	$\infty$
$\beta = -1/2$	$0$	$1/3$	$1$	$3$	$-\infty$	$-3$	$-1$	$-1/3$	$0$

(3) 令  $\ddot{x} = \dot{x} = 0$  得  $\sin x = 0$ , 得出系统的奇点

$$x_e = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$$

当  $x_e = 2k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  时, 令  $x = 2k\pi + x_0$ , 原方程变为:

$$\ddot{x} = \ddot{x}_0 = -\sin(2k\pi + x_0) = -\sin x_0$$

在奇点  $x_0 = 0$  (即  $x_e = 2k\pi$ ) 处的线性化方程为  $\ddot{x}_0 = -x_0$ , 特征方程为  $s^2 + 1 = 0$ , 特征根为  $s_{1,2} = \pm j$ , 奇点为中心点。

当  $x_e = (2k+1)\pi, k = 0, \pm 1, \dots, \pm 2, \dots$  时, 令  $x = (2K+1)\pi + x_0$ , 原方程变为:

$$\ddot{x} = \ddot{x}_0 = -\sin[(2K+1)\pi + x_0] = \sin x_0$$

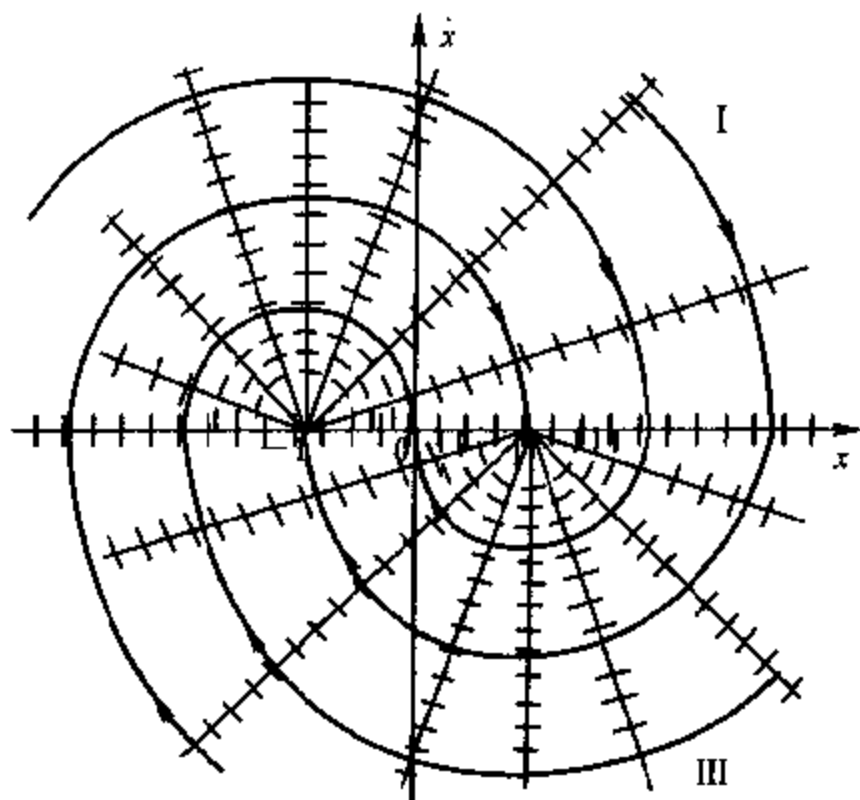
在奇点  $x_0 = 0$  (即  $x_e = (2K+1)\pi$ ) 处的线性化方程为:  $\ddot{x}_0 = x_0$ , 特征方程为  $s^2 - 1 = 0$ , 特征根为  $s_{1,2} = \pm 1$ , 奇点为鞍点。

用等倾斜线法作相轨迹

$$\dot{x} \frac{dx}{dx} + \sin x = \dot{x}a + \sin x = 0$$

$$\dot{x} = -\frac{1}{a} \sin x$$

列表计算(见表解 8.4.3(3)), 做出相轨迹如图解 8.4.3(3)。



图解 8.4.3(2)

表解 8.4.3(3)

$a$	-2	-1	-1/2	-1/4	0	1/4	1/2	1	2
$-1/a$	1/2	1	2	4	$\infty$	-4	-2	-1	1/2

(4) 原方程可写为

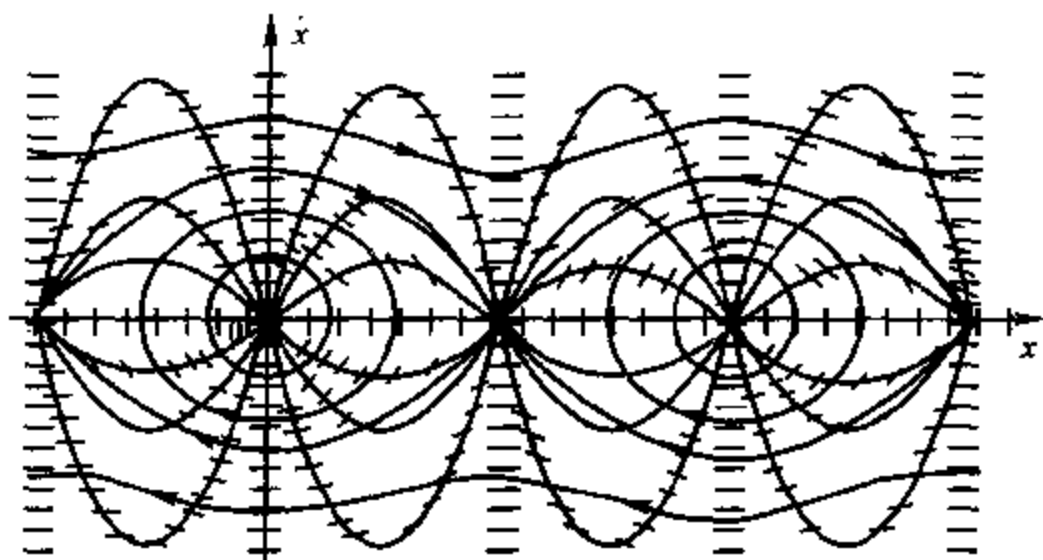
$$\begin{cases} \ddot{x} + x = 0, & x \geq 0, & \text{I} \\ \ddot{x} - x = 0, & x < 0, & \text{II} \end{cases}$$

特征方程及特征根:

$$\text{I } s^2 + 1 = 0, \quad s_{1,2} = \pm j \quad (\text{中心点})$$

$$\text{II } s^2 - 1 = 0, \quad s_{1,2} = \pm 1 \quad (\text{鞍点})$$

用等倾斜线法作相轨迹, 由原方程



图解 8.4.3(3)

$$\dot{x} = \dot{x} \frac{dx}{dx} = -|x|$$

$$\dot{x} = \frac{-1}{a} |x|$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{-1}{a}x, & x \geq 0 \\ \dot{x} = \frac{1}{a}x, & x < 0 \end{cases}$$

列表计算, (见表解 8.4.3(4)), 作出相轨迹如图解 8.4.3(4)。

表解 8.4.3(4)

$a$	-3	-1	-1/3	0	1/3	1	3	$\infty$
$-1/a$	1/3	1	3	$-\infty$	-3	-1	-1/3	0
$1/a$	-1/3	-1	-3	$\infty$	3	1	1/3	0

(5)

$$\dot{x}_1 = x_1 + x_2 \quad \text{①}$$

$$\dot{x}_2 = 2x_1 + x_2 \quad \text{②}$$

由式 ①

$$x_2 = \dot{x}_1 - x_1 \quad \text{③}$$

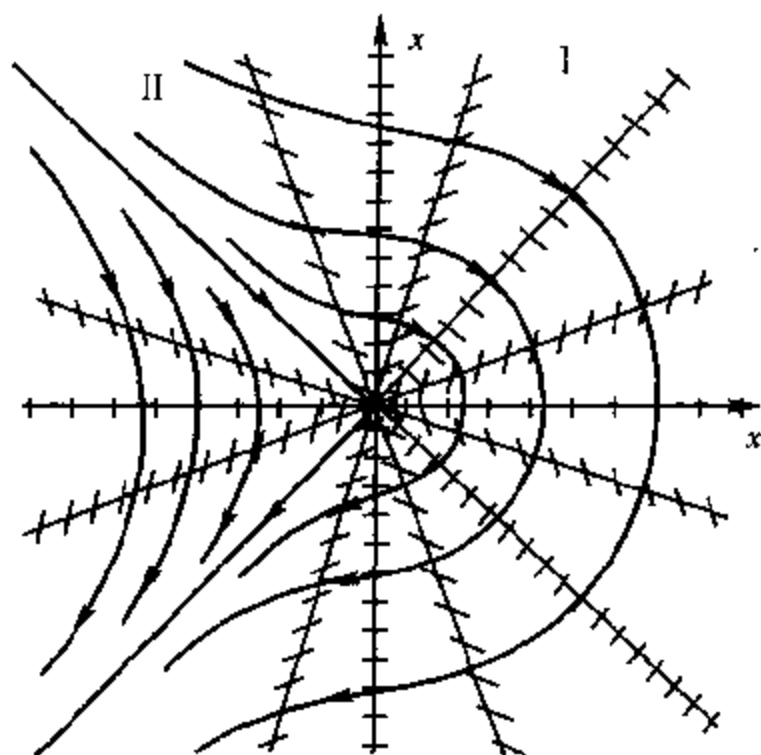
式 ③ 代入式 ②:

$$\ddot{x}_1 - \dot{x}_1 = 2x_1 + \dot{x}_1 - x_1$$

$$\ddot{x}_1 - 2\dot{x}_1 - x_1 = 0 \quad \text{④}$$

令

$$\ddot{x}_1 = \dot{x}_1 = 0$$



图解 8.4.3(4)

得平衡点

$$x_e = 0$$

由式 ④ 得特征方程及特征根为:

$$s^2 - 2s - 1 = 0$$

解得

$$\lambda_{1,2} = 2.414, -0.414 (\text{鞍点})$$

用等倾斜线法作相轨迹:

$$\ddot{x}_1 = \dot{x}_1 \frac{d\dot{x}_1}{dx_1} = \dot{x}_1 a = 2\dot{x}_1 + x_1$$

$$\dot{x}_1 = \frac{x_1}{a-2}$$

列表计算(见表解 8.4.3(5)), 作出相轨迹如图解 8.4.3(5)。

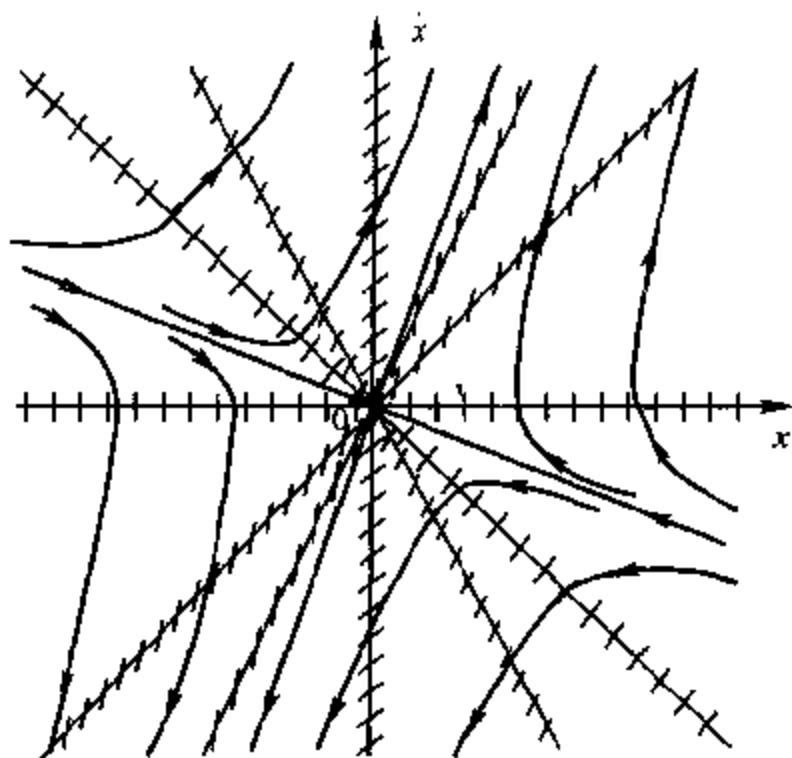
表解 8.4.3(5)

$a$	2	2.5	3	$\infty$	1	1.5	2
$\beta = 1/(a-2)$	$\infty$	2	1	0	-1	-2	$\infty$

8.4.4 若非线性系统的微分方程为

(1)  $\ddot{x} + (3\dot{x} - 0.5)\dot{x} + x + x^2 = 0;$

(2)  $\ddot{x} + x\dot{x} + x = 0;$



图解 8.4.3(5)

$$(3) \ddot{x} + \dot{x}^2 + x = 0.$$

试求系统的奇点,并概略绘制奇点附近的相轨迹。

解 (1) 由原方程得

$$\begin{aligned}\ddot{x} = f(x, \dot{x}) &= -(3\dot{x} - 0.5)\dot{x} \cdot x - x^2 = \\ &= -3\dot{x}^2 + 0.5\dot{x} - x - x^2\end{aligned}$$

$$\text{令} \quad \ddot{x} = \dot{x} = 0$$

$$\text{得} \quad x + x^2 = x(x+1) = 0$$

解出奇点  $x_* = 0, -1$ 。在奇点处线性化处理。

在  $x_* = 0$  处:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \left. \frac{\partial f(x, \dot{x})}{\partial x} \right|_{x=\dot{x}=0} \cdot x + \left. \frac{\partial f(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}} \right|_{x=\dot{x}=0} \cdot \dot{x} = \\ &= (-1 - 2x) \Big|_{x=\dot{x}=0} \cdot x + (-6\dot{x} + 0.5) \Big|_{x=\dot{x}=0} \cdot \dot{x} = \\ &= -x + 0.5\dot{x}\end{aligned}$$

$$\text{即} \quad \ddot{x} - 0.5\dot{x} + x = 0$$

特征方程及特征根



$$s_{1,2} = \frac{0.5 \pm \sqrt{0.5^2 - 4}}{2} = 0.25 \pm j0.984 \quad (\text{不稳定的焦点})$$

在  $x_e = -1$  处:

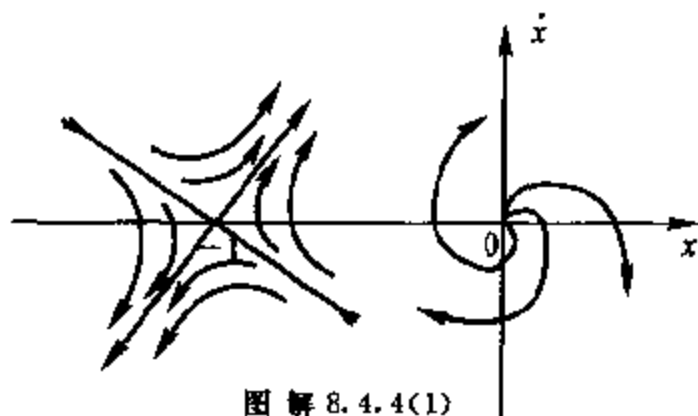
$$\ddot{x} = (-1 - 2x) \bigg|_{\substack{x=-1 \\ \dot{x}=0}} \cdot x + (-6\dot{x} + 0.5) \bigg|_{\substack{x=-1 \\ \dot{x}=0}} \cdot \dot{x} = x + 0.5\dot{x}$$

即  $\ddot{x} - 0.5\dot{x} - x = 0$

特征根

$$s_{1,2} = \frac{0.5 \pm \sqrt{0.5^2 + 4}}{2} = \begin{cases} 1.218 \\ -0.718 \end{cases} \quad (\text{鞍点})$$

概略画出奇点附近的相轨迹:如图解 8.4.4(1)。



图解 8.4.4(1)

(2) 由原方程得

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}) = -x\dot{x} - x$$

令  $\ddot{x} = \dot{x} = 0$  得奇点  $x_e = 0$ , 在奇点处线性化:

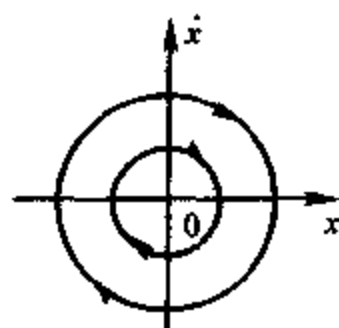
$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{\partial f}{\partial x} \bigg|_{x=\dot{x}=0} \cdot x + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \bigg|_{x=\dot{x}=0} \cdot \dot{x} = \\ &(-\dot{x} - 1) \bigg|_{x=\dot{x}=0} \cdot x - x \bigg|_{x=\dot{x}=0} \cdot \dot{x} \end{aligned}$$

得  $\ddot{x} = -x$

即  $\ddot{x} + x = 0$

特征根:  $s_{1,2} = \pm j$  (中心点)

概略画出奇点附近的相轨迹:如图解 8.4.4(2)。



图解 8.4.4(2)

(3) 由原方程得

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}) = -\dot{x}^2 - x$$

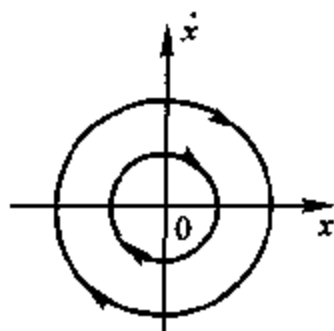
令  $\ddot{x} = \dot{x} = 0$  解得奇点  $x_e = 0$ , 在奇点处线性化:

$$\ddot{x} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_e=0} \cdot x + \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right|_{x=x_e=0} \cdot \dot{x} = -x$$

即  $\ddot{x} + x = 0$

特征根  $s_{1,2} = \pm j$  (中心点)

概略绘制奇点附近的相轨迹: 如图 8.4.4(3)



图解 8.4.4(3)

8.4.5 非线性系统的结构图如图 8.4.59 所示, 系统开始是静止的, 输入信号  $r(t) = 4 \times 1(t)$ , 试写出开关线方程, 确定奇点的位置和类型, 作出该系统的相平面图, 并分析系统的运动特点。

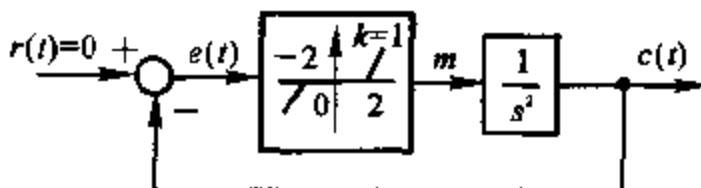


图 8.4.59 题 8.4.5 的非线性系统结构图

解 由结构图, 线性部分传递函数为

$$\frac{C(s)}{M(s)} = \frac{1}{s^2}$$

得

$$\ddot{c}(t) = m(t) \quad (1)$$

由非线性环节有:

$$m(t) = \begin{cases} 0, & |e| \leq 2, \quad \text{I} \\ e(t) - 2, & e > 2, \quad \text{II} \\ e(t) + 2, & e < -2, \quad \text{III} \end{cases} \quad (2)$$

由比较点得

$$c(t) = r(t) - e(t) = 4 - e(t) \quad (3)$$

将式 (3), 式 (2) 代入式 (1) 得

$$\ddot{e}(t) = \begin{cases} 0, & |e| \leq 2, \quad \text{I} \\ 2 - e(t), & e > 2, \quad \text{II} \\ -2 - e(t), & e < -2, \quad \text{III} \end{cases}$$

开关线方程为  $e(t) = \pm 2$

I:  $\ddot{e}(t) = 0, \quad \dot{e} = C(\text{常数})$

II:  $\ddot{e} + e - 2 = 0$

令  $\dot{e} = \ddot{e} = 0$ , 得奇点  $e_0^{\text{II}} = 2$ 。

特征方程及特征根为:

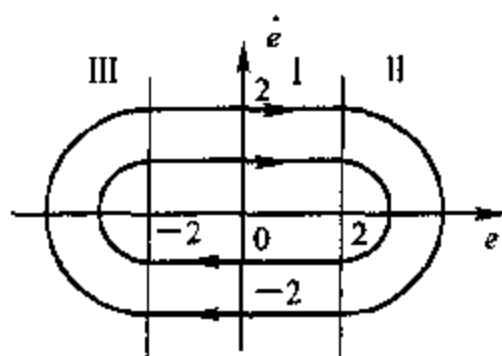
$$s^2 + 1 = 0, \quad s_{1,2} = \pm j \quad (\text{中心点})$$

$$\text{III: } \ddot{e} + e + 2 = 0$$

令  $\ddot{e} = \dot{e} = 0$ , 得奇点  $e_0^{\text{III}} = -2$ 。

特征方程及特征根为:

$$s^2 + 1 = 0, \quad s_{1,2} = \pm j \quad (\text{中心点})$$



图解 8.4.5

相轨迹如图解 8.4.5 所示, 可看出系统运动呈现周期振荡状态。

**8.4.6** 变增益控制系统的结构图及其中非线性元件  $G_N$  的输入输出特性如图 8.4.60 所示, 设系统开始处于零初始状态, 若输入信号  $r(t) = R \times 1(t)$ , 且  $R > e_0$ ;  $kK < \frac{1}{4T} < K$ , 试绘出系统的相平面图, 分析采用变增益放大器对系统性能的影响。

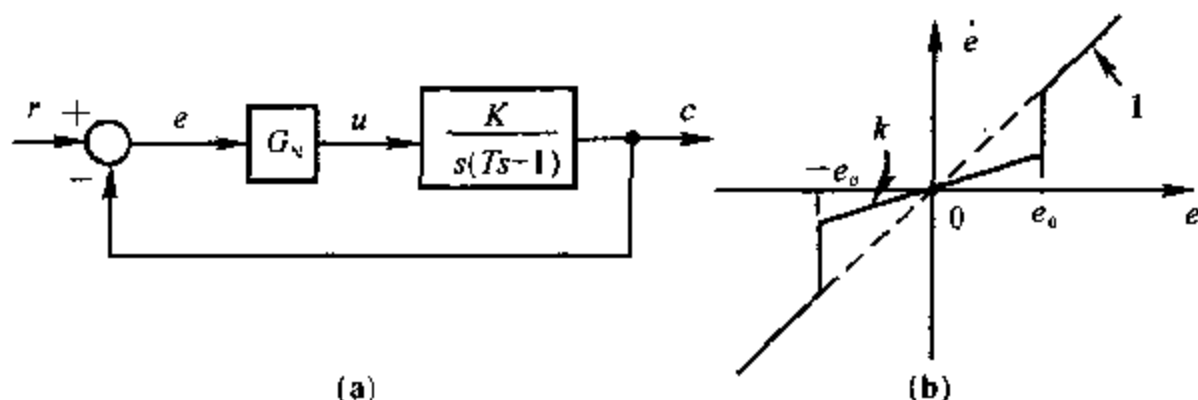


图 8.4.60 题 8.4.6 具有非线性放大器的系统

**解** 依结构图, 线性部分微分方程为

$$T\dot{c} + \dot{c} = ku \quad (1)$$

非线性部分方程为

$$u = \begin{cases} ke, & |e| \leq e_0 \\ e, & |e| > e_0 \end{cases} \quad (2)$$

由比较点

$$e = r - c \quad (3)$$

式 (3), 式 (2) 代入式 (1) 得:

$$\begin{aligned} T\ddot{e} + \dot{e} + Ku &= T\ddot{r} + \dot{r} = 0 \\ \begin{cases} T\ddot{e} + \dot{e} + Ke = 0, & |e| > e_0, \quad \text{I} \\ T\ddot{e} + \dot{e} + kKe = 0, & |e| < e_0, \quad \text{II} \end{cases} \end{aligned}$$

令  $\ddot{e} = \dot{e} = 0$ , 得系统平衡点  $e_0 = 0$ 。

$$\text{I:} \quad s^2 + \frac{1}{T}s + \frac{K}{T} = 0$$

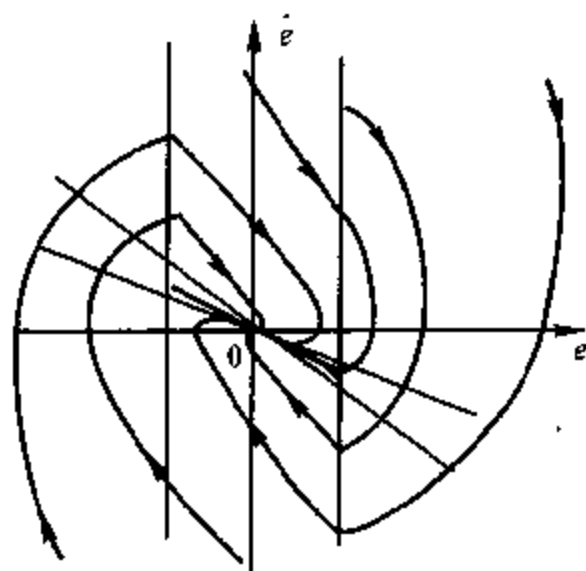
$$s_{1,2} = \frac{-\frac{1}{T} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{T}\right)^2 - \frac{4K}{T}}}{2} = -\frac{1}{2T} \pm \frac{1}{2T} \sqrt{1 - 4KT} =$$

$$\frac{1}{2T}(-1 \pm j\sqrt{4KT - 1}) \quad (\text{稳定焦点})$$

$$\text{II:} \quad s^2 + \frac{1}{T}s + \frac{kK}{T} = 0$$

$$s_{1,2} = \frac{-1}{2T}(1 \pm \sqrt{1 - 4KTk}) \quad (\text{稳定节点})$$

概略作出系统相轨迹如图解 8.4.6。由图可见当误差  $e$  较大时, 系统增益较大, 系统响应较快;  $e$  较小时, 系统增益较小, 响应比较平缓。这样有利于提高系统动态性能。



图解 8.4.6

8.4.7 图 8.4.61 为一带有库仑摩擦的二阶系统, 试用相平面法讨论库仑摩擦对系统单位阶跃响应的影响。

解 由系统结构图有:

$$\frac{C(s)}{E(s)} = \frac{5}{s} \cdot \frac{1}{0.5s + 1 \pm 2} \quad \begin{cases} +: \dot{c} > 0 \\ -: \dot{c} < 0 \end{cases}$$

$$s(0.5s + 1 \pm 2)C(s) = 5E(s)$$

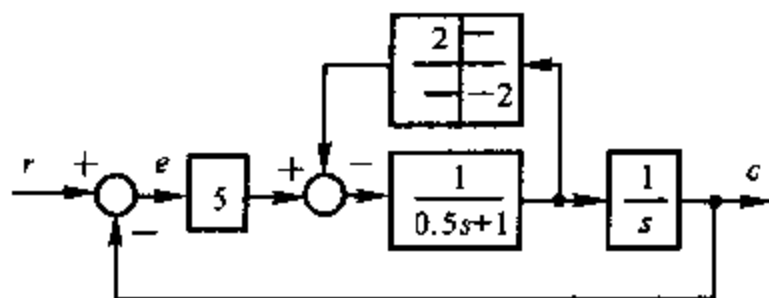


图 8.4.61 题 8.4.7 有库仑摩擦的二阶系统

$$\begin{cases} 0.5\ddot{e} + 3\dot{e} = 5e, & \dot{e} > 0, & \text{I} \\ 0.5\ddot{e} - \dot{e} = 5e, & \dot{e} < 0, & \text{II} \end{cases} \quad \text{①}$$

$$c = r - e = 1 - e \quad \text{②}$$

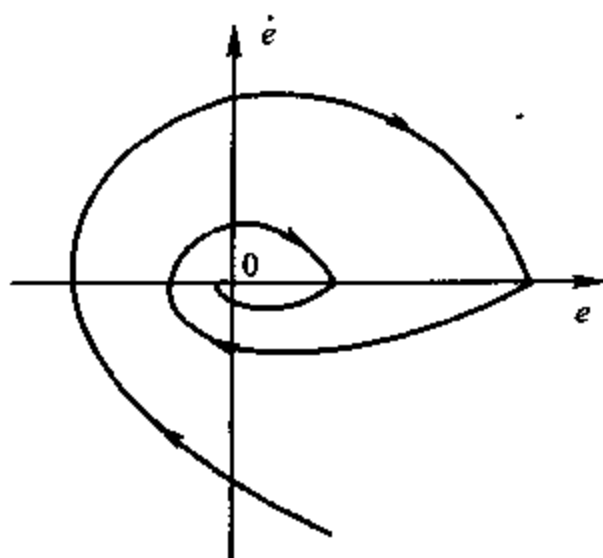
式 ② 代入式 ① 有:

$$\begin{cases} \ddot{e} + 6\dot{e} + 10e = 0, & \dot{e} < 0, & \text{I} \\ \ddot{e} - 2\dot{e} + 10e = 0, & \dot{e} > 0, & \text{II} \end{cases}$$

特征方程与特征根

$$\begin{cases} \text{I: } s^2 + 6s + 10 = 0, & s_{1,2} = -3 \pm j \\ \text{II: } s^2 - 2s + 10 = 0, & s_{1,2} = 1 \pm j3 \end{cases}$$

概略作出系统相轨迹如图解 8.4.7, 可见系统运动振荡收敛。



图解 8.4.7

8.4.8 设非线性系统如图 8.4.62 所示, 输入为单位斜坡函数。试在  $e-\dot{e}$  平面上绘制相轨迹。

解 依结构图, 线性部分微分方程为

$$\ddot{c} = m \quad \text{①}$$

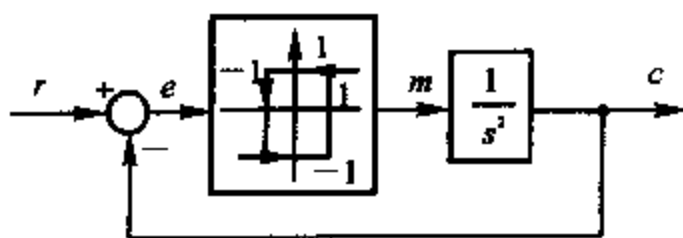


图 8.4.62 题 8.4.8 的非线性系统

非线性部分方程为:

$$m = \begin{cases} 1 & \begin{cases} e > -1, & \dot{e} < 0 \\ e > 0 \end{cases} \\ -1 & \begin{cases} e < 0, & \dot{e} > 0 \\ e < -1 \end{cases} \end{cases} \quad (2)$$

由比较点

$$e = r - c = t - c \quad (3)$$

式③,式②代入式①并整理得:

$$\ddot{e} = \begin{cases} -1 & \begin{cases} e > -1, & \dot{e} < 0 \\ e > 0 \end{cases} & \text{I} \\ 1 & \begin{cases} e < 0, & \dot{e} > 0 \\ e < -1 \end{cases} & \text{II} \end{cases}$$

所以

$$\begin{cases} \text{I: } \ddot{e} + 1 = 0 \\ \text{II: } \ddot{e} - 1 = 0 \end{cases}$$

在 I 区:

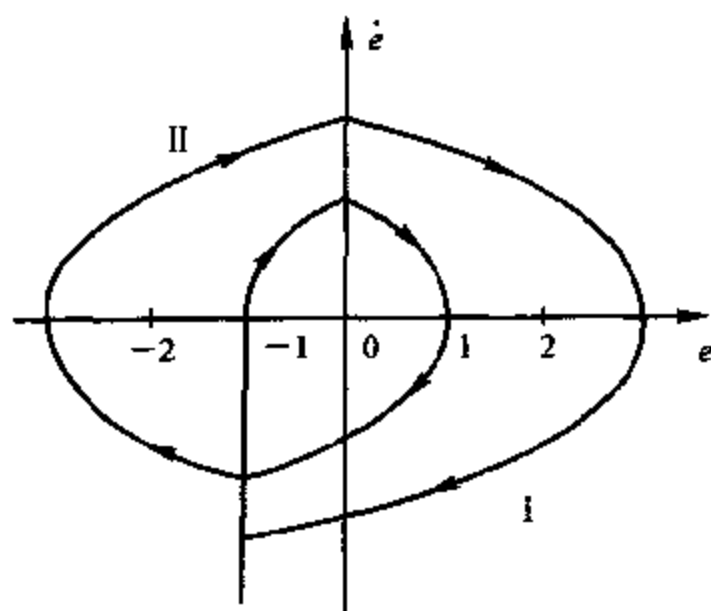
$$\begin{aligned} \ddot{e} &= -1 \\ \dot{e} de &= -de \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \dot{e}^2 = -e + C_1 \quad (\text{抛物线})$$

同理在 II 区可得:

$$\frac{1}{2} \dot{e}^2 = e + C_2 \quad (\text{抛物线})$$

概略作出系统相轨迹如图解 8.4.8,可见系统运动振荡发散。



图解 8.4.8

8.4.9 设非线性系统如图 8.4.63 所示。若输出为零初始条件,  $r(t) = 1(t)$ , 要求:

- (1) 在  $e-\dot{e}$  平面上画出相轨迹;
- (2) 判断该系统是否稳定, 最大稳态误差是多少;
- (3) 绘出  $e(t)$  及  $c(t)$  的时间响应大致波形。

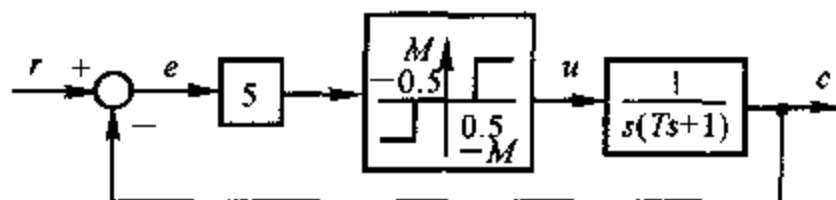


图 8.4.63 题 8.4.9 的非线性系统

解 (1) 依结构图, 线性部分微分方程为:

$$T\ddot{c} + \dot{c} = u \quad (1)$$

非线性部分方程为:

$$u = \begin{cases} +M, & 5e > 0.5 \\ 0, & |5e| \leq 0.5 \\ -M, & 5e < -0.5 \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{由比较点} \quad c = r - e = 1 - e \quad (3)$$

式③, 式②代入式①并整理得

$$T\ddot{e} + \dot{e} = -u = \begin{cases} -M, & e > 0.1 & \text{I} \\ 0, & |e| \leq 0.1 & \text{II} \\ +M, & |e| < -0.1 & \text{III} \end{cases}$$

$$\text{在 I 区:} \quad T\ddot{e} + \dot{e} + M = 0$$

$$\text{在 II 区:} \quad T\ddot{e} + \dot{e} = 0$$

$$\text{在 III 区:} \quad T\ddot{e} + \dot{e} - M = 0$$

用等倾斜线法作相轨迹:

$$\text{I 区:} \quad T\ddot{e} = T \frac{d\dot{e}}{de} \dot{e} = T\alpha\dot{e} = -\dot{e} - M$$

$$\dot{e} = \frac{-M}{T\alpha + 1} \quad (\text{水平线})$$

$$\text{II 区:} \quad T\ddot{e} = T\alpha\dot{e} = -\dot{e}$$

$$(T\alpha + 1)\dot{e} = 0, \quad \begin{cases} a = \frac{-1}{T} \\ \dot{e} = 0 \end{cases} \quad (e = \text{常数})$$

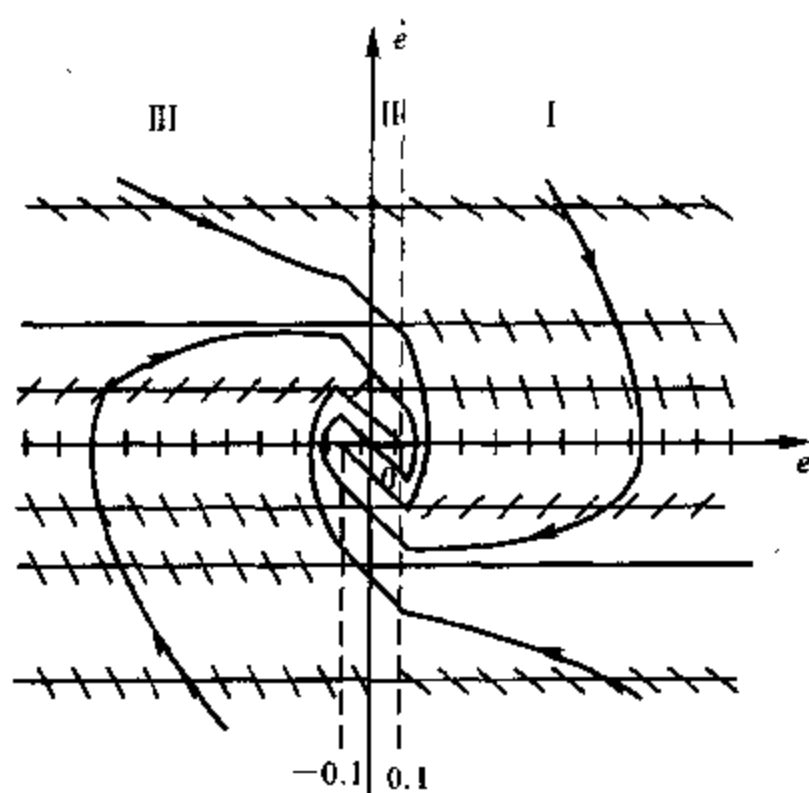
Ⅲ区:  $T\dot{e} = T\alpha\dot{e} = -\dot{e} + M$

$$\dot{e} = \frac{M}{T\alpha + 1} \quad (\text{水平线})$$

列表计算(取  $M = T = 1$ )(见表解 8.4.9)

表解 8.4.9

$\alpha$	$-1/2T$	0	$1/T$	$\infty$	$-3/T$	$-2/T$	$-3/2T$
I, $-1/(\alpha+1)$	-2	-1	-1/2	0	1/2	1	2
II, $1/(\alpha+1)$	2	1	1/2	0	-1/2	-1	-2

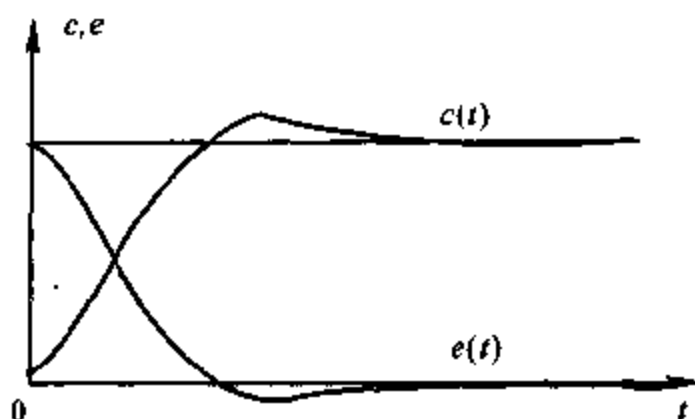


图解 8.4.9(1)

(2) 由相轨迹图解 8.4.9(1) 看出, 系统是稳定的, 并且最大稳态误差为  $e_{\max} = \pm 0.1$ 。

(3) 绘出  $e(t), c(t)$  的时间响应大致波形如图解 8.4.9(2) 所示。





图解 8.4.9(2)

8.4.10 已知具有理想继电器的非线性系统如图 8.4.64 所示,试用相平面法分析:

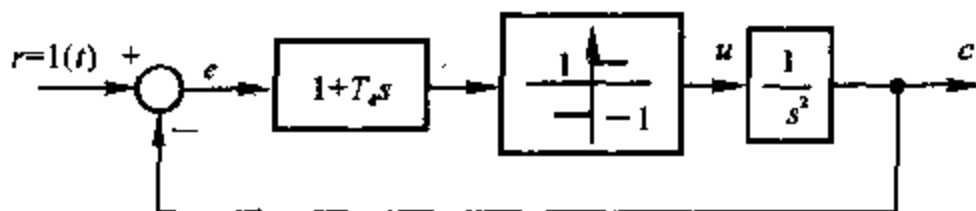


图 8.4.64 题 8.4.10 具有理想继电器的非线性系统

(1)  $T_d = 0$  时系统的运动;

(2)  $T_d = 0.5$  时系统的运动,并说明比例微分控制对改善系统性能的作用;

(3)  $T_d = 2$ ,并考虑实际继电器有延迟时系统的运动。

解 依结构图,线性部分微分方程为:

$$\ddot{c} = u \quad (1)$$

非线性部分方程为:

$$u = \begin{cases} 1, & e + T_d \dot{e} > 0, & \text{I} \\ -1, & e + T_d \dot{e} < 0, & \text{II} \end{cases} \quad (2)$$

开关线方程

$$\dot{e} = \frac{-1}{T_d} e$$

由比较点

$$c = r - e = 1 - e \quad (3)$$

式③,式②代入式①并整理得

$$\ddot{e} = \begin{cases} -1, & e + T_d \dot{e} > 0, & \text{I} \\ 1, & e + T_d \dot{e} < 0, & \text{II} \end{cases}$$

在 I 区:  $\ddot{e} = \dot{e} \frac{d\dot{e}}{de} = -1$

解出  $\dot{e}^2 = -2e$  (抛物线)

同理在 II 区可得:  $\dot{e} = 2e$  (抛物线)

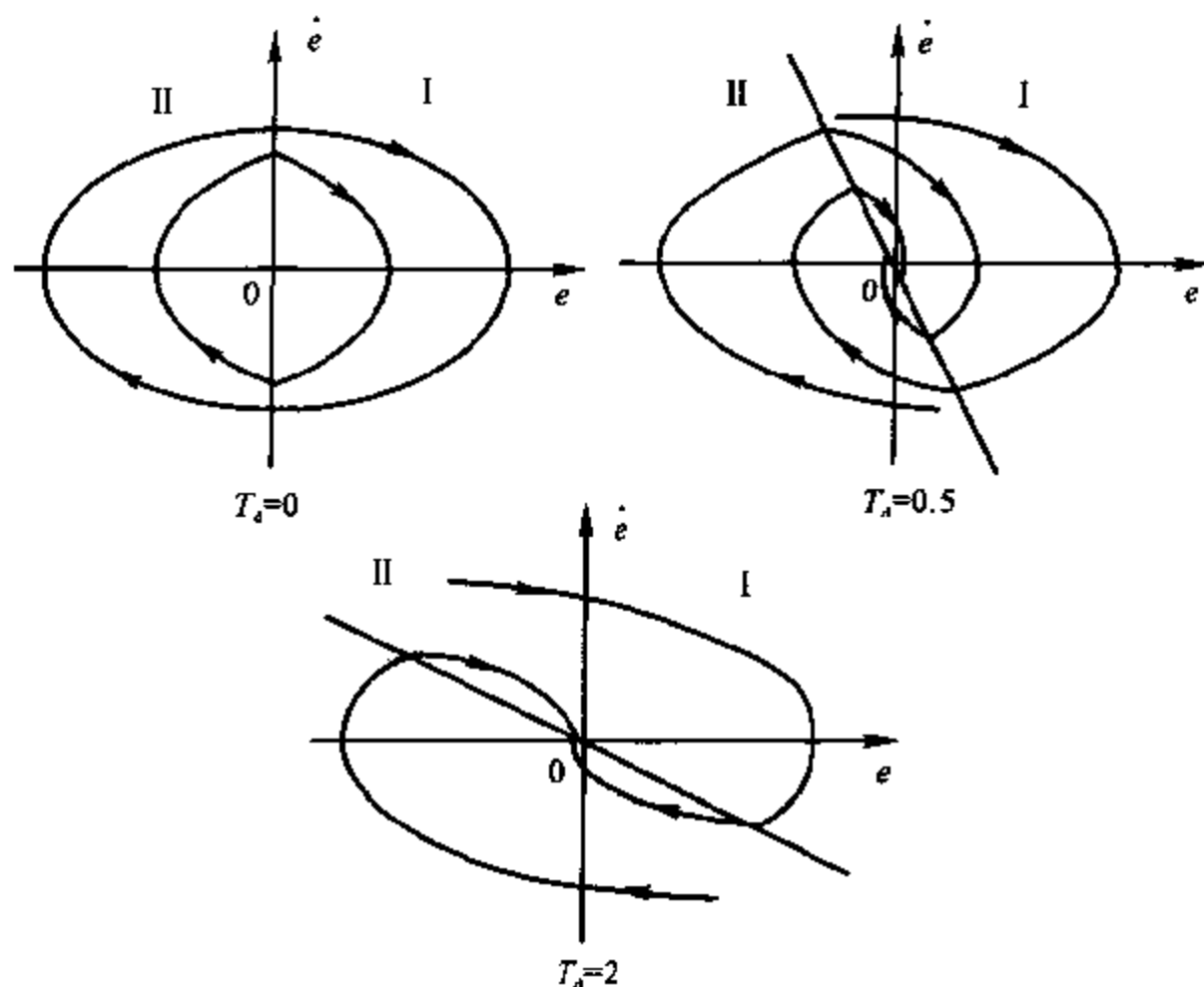
概略作出相轨迹如图解 8.4.10, 开关线方程分别为:

$T_d = 0$  时,  $e = 0$ ;

$T_d = 0.5$  时,  $\dot{e} = -2e$ ;

$T_d = 2$  时,  $\dot{e} = -0.5e$ 。

由相轨迹可见: 加入比例微分控制可以改善系统的稳定性; 当微分作用增强时, 系统振荡性减小, 响应加快。



图解 8.4.10

8.4.11 非线性系统的结构图如图 8.4.65 所示, 图中  $a = 0.5, K = 8, T = 0.5, K_t = 0.5$ , 要求:

(1) 当开关断开时, 绘制初始条件为  $e(0) = 2, \dot{e}(0) = 0$  的相轨迹;

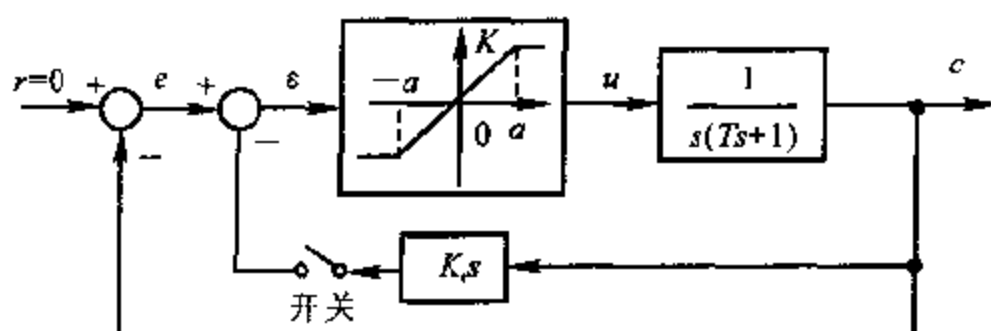


图 8.4.65 题 8.4.11 的非线性系统

(2) 当开关闭合时, 绘制相同初始条件下的相轨迹, 并说明测速反馈的作用。

解 (1) 依结构图, 线性部分微分方程为:

$$T\ddot{c} + \dot{c} = u \quad (1)$$

非线性部分方程为

$$u = \begin{cases} +Ka, & e > a, & \text{I} \\ -Ke, & |e| \leq a, & \text{II} \\ -Ka, & e < -a, & \text{III} \end{cases} \quad (2)$$

由比较点:  $c = -e \quad (3)$

式 (3), 式 (2) 代入式 (1) 并整理得:

$$\begin{cases} T\ddot{e} + \dot{e} = -Ka, & \text{I} \\ T\ddot{e} + \dot{e} = Ke, & \text{II} \\ T\ddot{e} + \dot{e} = Ka, & \text{III} \end{cases}$$

用等倾斜线法作相轨迹:

在 I 区:  $T\ddot{e} + \dot{e} = T\dot{e} \frac{d\dot{e}}{de} + \dot{e} = T\dot{e}a + \dot{e} = -Ka$

$$\dot{e} = \frac{-Ka}{Ta + 1} = \frac{-4}{0.5a + 1} \quad (\text{水平线})$$

同理得 III 区等倾斜线方程

$$\dot{e} = \frac{Ka}{Ta + 1} = \frac{4}{0.5a + 1} \quad (\text{水平线})$$

列表计算(见表解 8.4.11(1))

表解 8.4.11(1)

$\alpha$	0	2	6	14	$\infty$	-18	-10	-6	-4
I: $\frac{-4}{0.5\alpha+1}$	-4	-2	-1	-0.5	0	0.5	1	2	4
III: $\frac{4}{0.5\alpha+1}$	4	2	1	0.5	0	-0.5	-1	-2	-4

在 II 区:  $T\dot{e} + \dot{e} = (T\alpha + 1)\dot{e} = Ke$

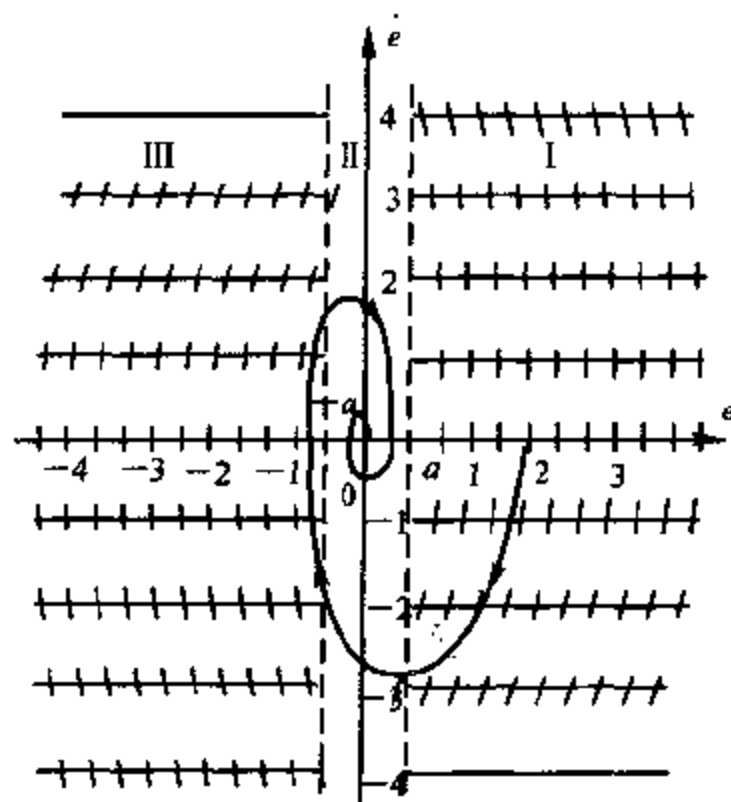
$$\dot{e} = \frac{-Ke}{T\alpha + 1} = \frac{-8}{0.5\alpha + 1} \cdot e$$

列表计算(见表解 8.4.11(2))

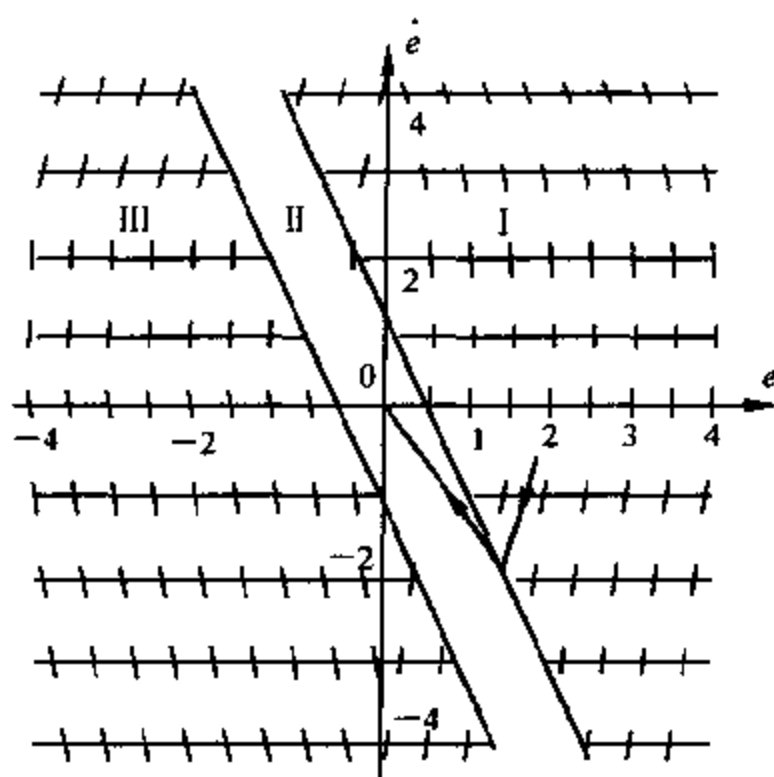
表解 8.4.11(2)

$\alpha$	0	2	6	$\infty$	-10	-6	-4	-2
II: $\frac{-8}{0.5\alpha+1}$	-8	-4	-2	0	2	4	8	$\infty$

依表作系统相轨迹如图解 8.4.11(1) 所示。



图解 8.4.11(1)



图解 8.4.11(2)

(2) 依结构图, 线性部分微分方程为:

$$T\ddot{c} + \dot{c} = u \quad (1)$$

非线性部分方程为:

$$u = \begin{cases} Ka, & e - K_1\dot{c} > a \\ Ke, & |e - K_1\dot{c}| \leq a \\ -Ka, & e - K_1\dot{c} < -a \end{cases} \quad (2)$$

由比较点:

$$c = r - e = -e \quad (3)$$

式③, 式②代入式①并整理得:

$$\begin{cases} T\ddot{e} + \dot{e} = -Ka, & e + K_1\dot{e} > a, & \text{I} \\ T\ddot{e} + \dot{e} = -K(e + K_1\dot{e}), & |e + K_1\dot{e}| \leq a, & \text{II} \\ T\ddot{e} + \dot{e} = Ka, & e + K_1\dot{e} < -a, & \text{III} \end{cases}$$

I, III 区方程与(1)题中讨论相同, 等倾斜线方程分别为:

在 I 区:  $\dot{e} = \frac{-Ka}{T\alpha + 1} = \frac{-4}{0.5\alpha + 1}$

在 III 区:  $\dot{e} = \frac{Ka}{T\alpha + 1} = \frac{4}{0.5\alpha + 1}$

对于 II 区:  $T\ddot{e} + (1 + KK_1)\dot{e} = -Ke$

$$T_e \frac{de}{dt} + (1 + KK_1)e = (1 + T_a + KK_1)\dot{e} = -Ke$$

$$\dot{e} = \frac{-Ke}{1 + T_a + K \cdot K_1} = \frac{-16}{a + 10}e$$

列表计算(见表解 8.4.11(3))。

表解 8.4.11(3)

$a$	-10	-5	-2	0	6	$\infty$	-26	-18
$\Pi: \frac{-16}{a+10}$	$-\infty$	-4	-2	-1.6	-1	0	1	2

开关线方程为

$$\dot{e} = \frac{-1}{K_1}e \pm \frac{1}{K_1}a = -2(e \mp a)$$

画相轨迹如图解 8.4.11(2) 所示,可见测速反馈使开关线位置发生了变化,系统增加了阻尼,系统性能得到了改善。

8.4.12 设三个非线性系统的非线性环节一样,其线性部分分别为

$$(1) G(s) = \frac{1}{s(0.1s+1)};$$

$$(2) G(s) = \frac{2}{s(s+1)};$$

$$(3) G(s) = \frac{2(1.5s+1)}{s(s+1)(0.1s+1)}.$$

用描述函数法分析时,哪个系统分析的准确度高?

解 线性部分的低通滤波特性越好,用描述函数法分析所得结果的准确程度越高。分别作出三个系统线性部分的对数幅频特性如图解 8.4.12 所示。由图可见,第二个系统线性部分  $L_2$  的高频段衰减较快,低通滤波特性好,所以系统(2)的描述函数法分析结果的准确程度高。

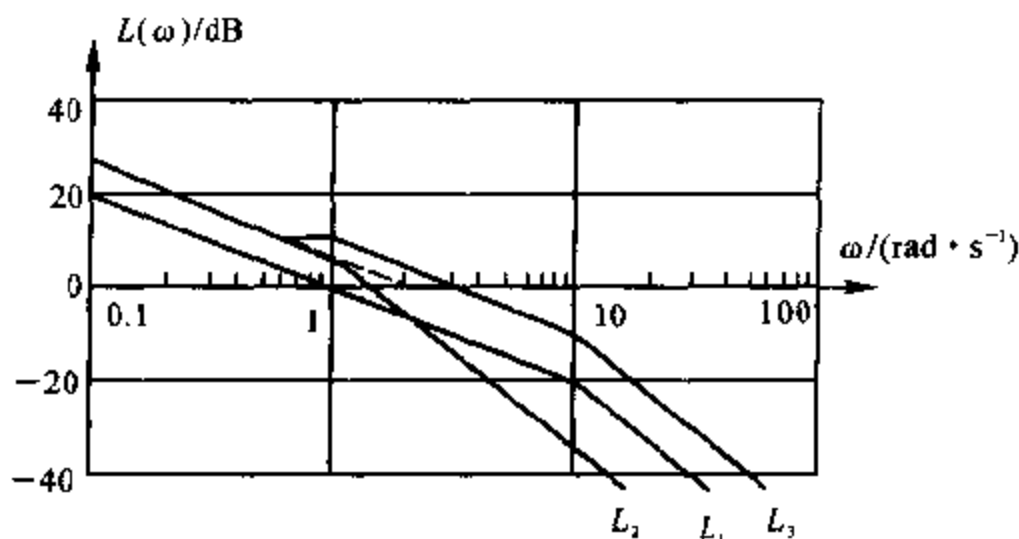
8.4.13 试推导下列非线性特性的描述函数:

(1) 变增益特性(见参考文献[1]表 8.1 中第九项);

(2) 具有死区的继电特性(见参考文献[1]表 8.1 中第二项);

(3)  $y = x^3$ 。

$$\text{解 (1) } y(t) = \begin{cases} K_1 A \sin \omega t, & 0 \leq \omega t \leq \varphi_1 \\ K_1 s + K_2 (A \sin \omega t - s), & \varphi_1 \leq \omega t \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$



图解 8.4.12

$$A \sin \omega \varphi_1 = s$$

$$\varphi_1 = \arcsin \frac{s}{A}$$

其输入-输出波形见图解 8.4.13(1)。

非线性特性是单值奇对称的,  $y(t)$  是奇函数, 所以有

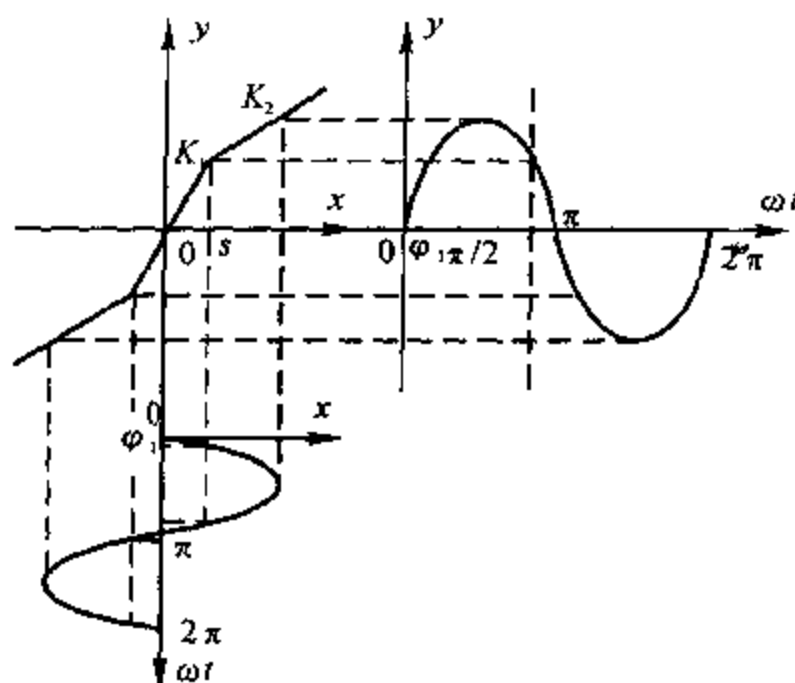
$$A_1 = 0$$

由于  $y(t)$  波形对称

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \cdot \sin \omega t \cdot d(\omega t) = \\ &= \frac{4K_1 A}{\pi} \int_0^{\varphi_1} \frac{1}{2} (1 - \cos 2\omega t) d(\omega t) + \frac{4s}{\pi} \int_{\varphi_1}^{\frac{\pi}{2}} (K_1 - K_2) \sin \omega t \cdot d(\omega t) + \\ &= \frac{4K_2 A}{\pi} \int_{\varphi_1}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \omega t \cdot d(\omega t) = \\ &= \frac{2K_1 A}{\pi} \left[ \omega t - \frac{1}{2} \sin 2\omega t \right]_0^{\varphi_1} + \frac{4s(K_1 - K_2)}{\pi} [-\cos \omega t]_{\varphi_1}^{\frac{\pi}{2}} + \\ &= \frac{2K_2 A}{\pi} \left[ \omega t - \frac{1}{2} \sin 2\omega t \right]_{\varphi_1}^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= \frac{2K_1 A}{\pi} \left[ \arcsin \frac{s}{A} - \frac{s}{A} \sqrt{1 - \left( \frac{s}{A} \right)^2} \right] + \frac{4s(K_1 - K_2)}{\pi} \sqrt{1 - \left( \frac{s}{A} \right)^2} + \\ &= \frac{2K_2 A}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{s}{A} + \frac{s}{A} \sqrt{1 - \left( \frac{s}{A} \right)^2} \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{2A}{\pi}(K_1 - K_2) \left[ \arcsin \frac{s}{A} - \frac{s}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{s}{A}\right)^2} \right] + K_2 A + \\ & \frac{4s(K_1 - K_2)}{\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{s}{A}\right)^2} = \\ & K_2 A + \frac{2A}{\pi}(K_1 - K_2) \left[ \arcsin \frac{s}{A} + \frac{s}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{s}{A}\right)^2} \right] = \\ & A \left[ K_2 + \frac{2}{\pi}(K_1 - K_2) \left( \arcsin \frac{s}{A} + \frac{s}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{s}{A}\right)^2} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\text{故 } N(A) = \frac{B_1}{A} + j \frac{A_1}{A} = K_2 + \frac{2}{\pi}(K_1 - K_2) \left( \arcsin \frac{s}{A} + \frac{s}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{s}{A}\right)^2} \right)$$



图解 8.4.13(1)

$$(2) \quad y(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \omega t \leq \varphi_1 \\ K(A \sin \omega t - \Delta), & \varphi_1 \leq \omega t \leq \varphi_2 \\ K(a - \Delta), & \varphi_2 \leq \omega t \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

其输入-输出波形见图解 8.4.13(2)。

函数  $y(t)$  是奇函数, 并且上下波形对称, 1/4 波形对称, 因此有:  $A_1 = 0$ ,  $\varphi_1 = \arcsin \frac{\Delta}{A}$ ,  $\varphi_2 = \arcsin \frac{a}{A}$

$$B_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \cdot \sin \omega t \cdot d(\omega t) =$$



$$\begin{aligned}
& \frac{4}{\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} y(t) \sin \omega t \cdot d(\omega t) + \frac{4}{\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} y(t) \sin \omega t \cdot d(\omega t) + \\
& \frac{4}{\pi} \int_{\varphi_2}^{\frac{\pi}{2}} y(t) \sin \omega t \cdot d(\omega t) = \\
& \frac{4}{\pi} \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} K(A \sin \omega t - \Delta) \sin \omega t d(\omega t) + \frac{4}{\pi} \int_{\varphi_2}^{\frac{\pi}{2}} K(a - \Delta) \sin \omega t \cdot d(\omega t) = \\
& \frac{4K\Delta}{\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (-\sin \omega t) d(\omega t) + \frac{4KA}{\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sin^2 \omega t \cdot d(\omega t) + \\
& \frac{4K(a - \Delta)}{\pi} \int_{\varphi_2}^{\frac{\pi}{2}} \sin \omega t \cdot d(\omega t) = \\
& \frac{4K\Delta}{\pi} [\cos \omega t]_{\varphi_1}^{\varphi_2} + \frac{2KA}{\pi} \left[ \omega t - \frac{1}{2} \sin 2\omega t \right]_{\varphi_1}^{\varphi_2} + \\
& \frac{4K(a - \Delta)}{\pi} [-\cos \omega t]_{\varphi_2}^{\frac{\pi}{2}} = \\
& \frac{4K\Delta}{\pi} \left[ \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2} - \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta}{A}\right)^2} \right] + \\
& \frac{2KA}{\pi} \left[ \arcsin \frac{a}{A} - \arcsin \frac{\Delta}{A} - \frac{a}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2} + \frac{\Delta}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta}{A}\right)^2} \right] + \\
& \frac{4K(a - \Delta)}{\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2} = \\
& \frac{2KA}{\pi} \left[ \arcsin \frac{a}{A} - \arcsin \frac{\Delta}{A} + \frac{a}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2} - \frac{\Delta}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta}{A}\right)^2} \right]
\end{aligned}$$

$$\text{故 } N(A) = \frac{B_1}{A} + j \frac{A_1}{A} =$$

$$\frac{2K}{A} \left[ \arcsin \frac{a}{A} - \arcsin \frac{\Delta}{A} + \frac{a}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2} - \frac{\Delta}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta}{A}\right)^2} \right]$$

$$(3) y(t) = A^3 \sin^3 \omega t$$

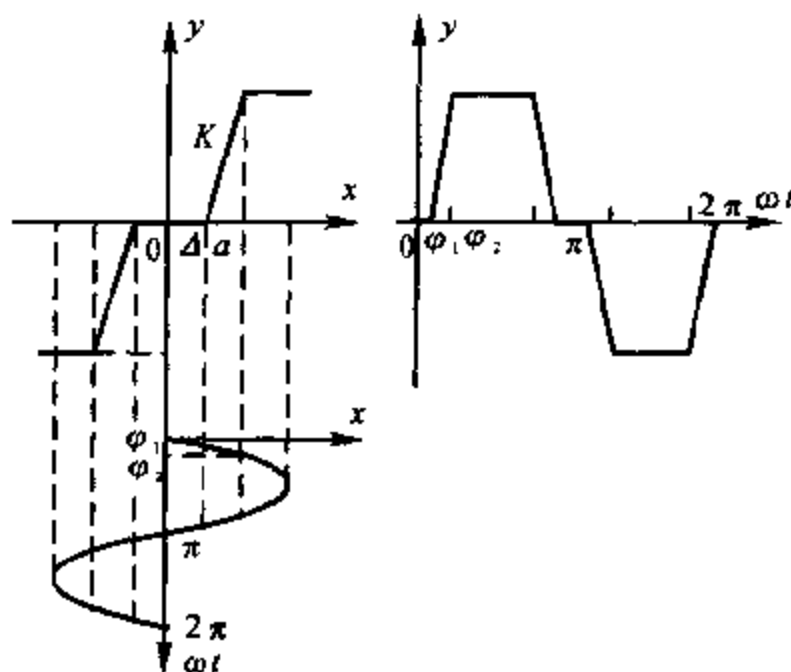
其输入-输出波形见图解 8.4.13(3)。

$$\begin{aligned}
B_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} A^3 \sin^4 \omega t \cdot d(\omega t) = \frac{4A^3}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} (1 - \cos 2\omega t)^2 \cdot d(\omega t) = \\
& \frac{A^3}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2\cos 2\omega t + \cos^2 2\omega t) \cdot d(\omega t) = \\
& \frac{A^3}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2} \right] - \frac{A^3}{\pi} [\sin 2\omega t]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{A^3}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 4\omega t + 1}{2} d(\omega t) =
\end{aligned}$$

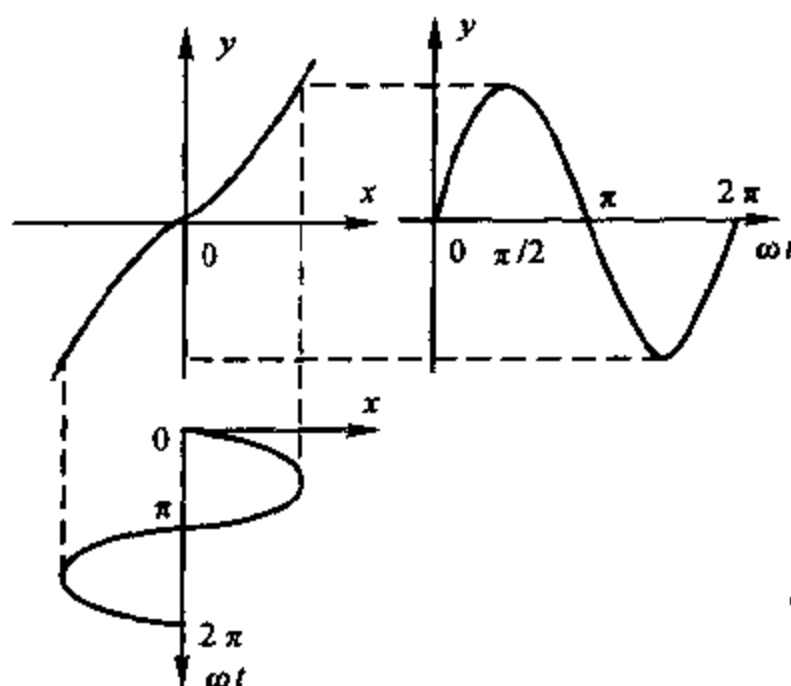
$$\frac{A^3}{2} - 0 + \frac{A^3}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 4\omega t \cdot d(\omega t) + \frac{A^3}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d(\omega t) = \frac{3A^3}{4}$$

故

$$N(A) = \frac{B_1}{A} + j \frac{A_1}{A} = \frac{3A^2}{4}$$



图解 8.4.13(2)



图解 8.4.13(3)

8.4.14 将图 8.4.66 所示非线性系统简化成典型结构图形式,并写出线

性部分的传递函数。

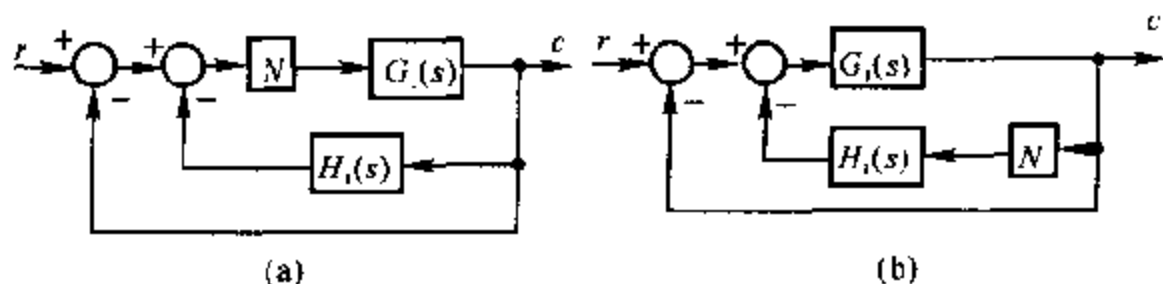


图 8.4.66 题 8.4.16 的非线性系统结构图

解 (a) 先将  $N(A)$  看做线性环节, 求原系统的闭环传递函数  $\Phi(s)$ , 然后取  $\Phi(s)$  的分母令其为零, 推写出  $G(s) \times N(s) = -1$  的形式, 便可定出  $G(s)$ 。

依原图, 有:

$$\Phi(s) = \frac{NG_1(s)}{1 + NG_1(s) + NG_1(s)H_1(s)}$$

令

$$1 + NG_1(s) + NG_1(s)H_1(s) = 0$$

$$G_1(s)[1 + H_1(s)] \cdot N = -1$$

所以

$$G(s) = G_1(s)[1 + H_1(s)]$$

(b) 同(a)的方法, 先求出  $\Phi(s)$  有:

$$\Phi(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s) + G_1(s)H_1(s) \cdot N}$$

令

$$1 + G_1(s) + G_1(s)H_1(s) \cdot N = 0$$

$$H_1(s) \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)} \cdot N = -1$$

所以

$$G(s) = H_1(s) \cdot \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)}$$

8.4.15 根据已知非线性特性的描述函数求图 8.4.67 所示各种非线性特性的描述函数。

解 (a) 非线性环节可看成是图解 8.4.15(1) 所示两个非线性环节的叠加, 因此

$$N(A) = N_1(A) + N_2(A) =$$

$$\frac{4Ka}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2} + \frac{2K}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{a}{A} - \frac{a}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2} \right] =$$

$$K - \frac{2K}{\pi} \arcsin \frac{a}{A} + \frac{2Ka}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2}$$

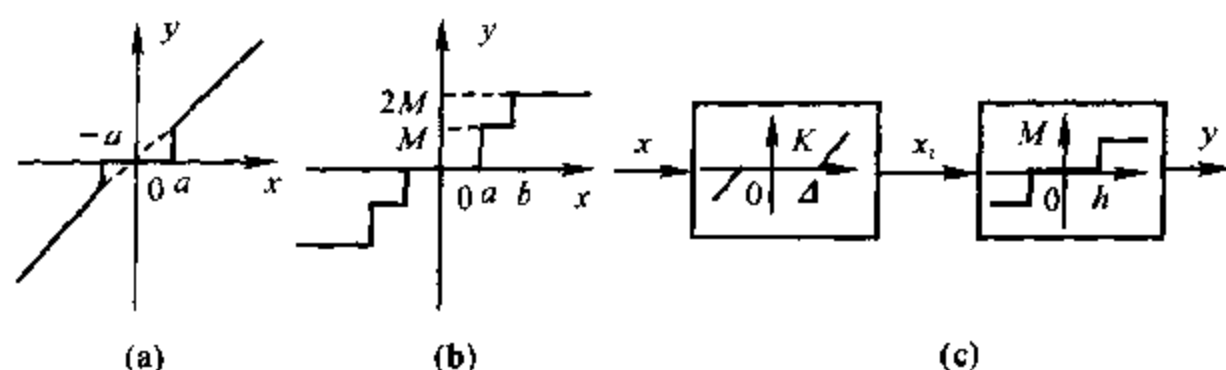
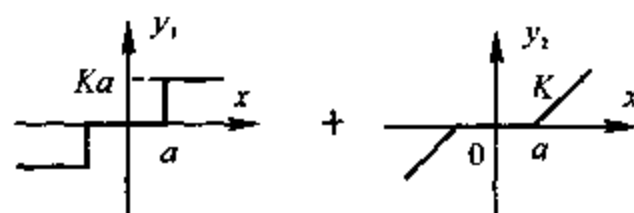


图 8.4.67 题 3.4.15 的非线性特性



图解 8.4.15(1)

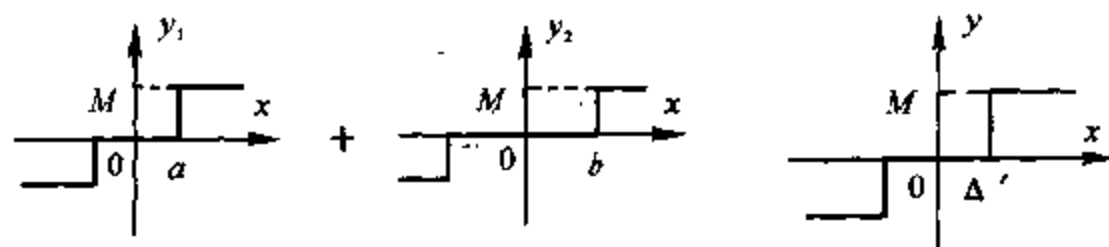
(b) 非线性环节可看成是图解 8.4.15(2) 所示两个非线性环节的叠加，因此

$$N(A) = \frac{4M}{\pi A} \left[ \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{b}{A}\right)^2} \right]$$

(c) 两个非线性环节可等效为图解 8.4.15(3) 所示的非线性环节，其中

$$\Delta' = \Delta + \frac{h}{K}$$

$$N(A) = \frac{4M}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta'}{A}\right)^2} \quad (A \geq \Delta')$$



图解 8.4.15(2)

图解 8.4.15(3)

8.4.16 某单位反馈系统,其前向通路中有一描述函数  $N(A) = e^{-j\frac{\pi}{4}}/A$  的非线性元件,线性部分的传递函数为  $G(s) = \frac{15}{s(0.5s+1)}$ ,试用描述函数法确定系统是否存在自振?若有,参数是多少?

$$\text{解} \quad -\frac{1}{N(A)} = -Ae^{j\frac{\pi}{4}} = e^{j\pi} \cdot Ae^{j\frac{\pi}{4}} = Ae^{j\frac{5\pi}{4}}$$

画出  $\frac{-1}{N(A)}$  与  $G(j\omega)$  的曲线(见图解 8.4.16),可看出

D 点是稳定的自振点。由自振条件:

$$N(A) \cdot G(j\omega) = -1$$

$$\text{即} \quad N(A) = \frac{-1}{G(j\omega)} = \frac{-j\omega(0.5j\omega+1)}{15} =$$

$$\frac{0.5\omega^2 - j\omega}{15} =$$

$$\frac{\omega \sqrt{(0.5\omega)^2 + 1}}{15} e^{-j\arctan 0.5\omega} = \frac{1}{A} e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

$$\text{比较得} \quad \tan \frac{\pi}{4} = 1 = \frac{1}{0.5\omega}, \quad \omega = 2$$

$$A = \frac{15}{\omega \sqrt{(0.5\omega)^2 + 1}} = 5.3.$$

故自振参数为  $\omega = 2, A = 5.3$ 。

8.4.17 已知非线性系统的结构图如图 8.4.68 所示,图中非线性环节的描述函数  $N(A) = \frac{A+6}{A+2} (A > 0)$ ,试用描述函数法确定:

(1) 使该非线性系统稳定、不稳定以及产生周期运动时,线性部分的  $K$  值范围;

(2) 判断周期运动的稳定性,并计算稳定周期运动的振幅和频率。

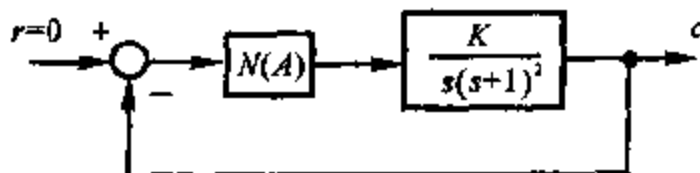
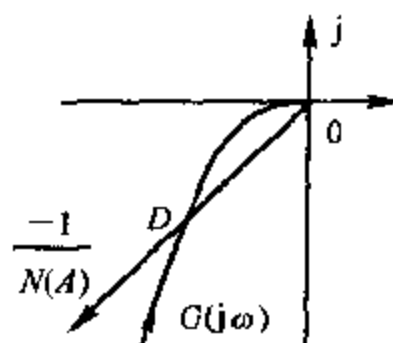
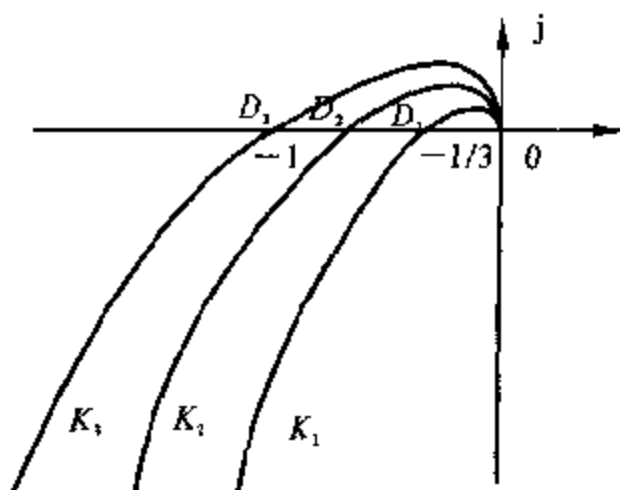


图 8.4.68 题 8.4.17 的非线性系统

解 (1) 画出负倒描述函数曲线(见图解 8.4.17)



图解 8.4.16



图解 8.4.17

$$\frac{-1}{N(A)} = \frac{-(A+2)}{A+6}$$

$$\frac{-1}{N(0)} = -\frac{1}{3}, \quad \frac{-1}{N(\infty)} = -1$$

$$\frac{dN(A)}{dA} = \frac{-4}{(A+2)^2} < 0$$

$N(A)$  单调降,  $\frac{-1}{N(A)}$  也为单调降函数。画出  $G(j\omega)$  曲线, 可看出, 当  $K$  从小到大变化时, 系统会由稳定变成自振, 最终不稳定。

求使  $\text{Im}[G(j\omega)] = 0$  的  $\omega$  值, 令

$$\angle G(j\omega) = -90^\circ - 2\arctan\omega = -180^\circ$$

得

$$\arctan\omega = 45^\circ, \quad \omega = 1$$

令

$$|G(j\omega)|_{\omega=1} = \frac{K}{\omega(\sqrt{\omega^2+1})^2} \Big|_{\omega=1} =$$

$$\frac{K}{2} = \begin{cases} \frac{1}{3} \rightarrow K_1 = \frac{2}{3} \\ 1 \rightarrow K_3 = 2 \end{cases}$$

得出  $K$  值与系统特性之间的关系:

$$K: 0 \xrightarrow{\text{稳定}} \frac{2}{3} \xrightarrow{\text{自振}} 2 \xrightarrow{\text{不稳定}} \infty$$

(2) 系统周期运动是稳定的。由自振条件:

$$N(A)G(j\omega) \Big|_{\omega=1} = \frac{A+6}{A+2} \cdot \frac{-K}{2} = \frac{-(A+6)K}{2(A+2)} = -1$$

$$(A+6)K = 2A+4$$

解出 
$$\begin{cases} A = \frac{6K-4}{2-K} \\ \omega = 1 \end{cases} \quad \left(\frac{2}{3} < K < 2\right)$$

8.4.18 非线性系统如图 8.4.69 所示, 试用描述函数法分析周期运动的稳定性, 并确定系统输出信号振荡的振幅和频率。

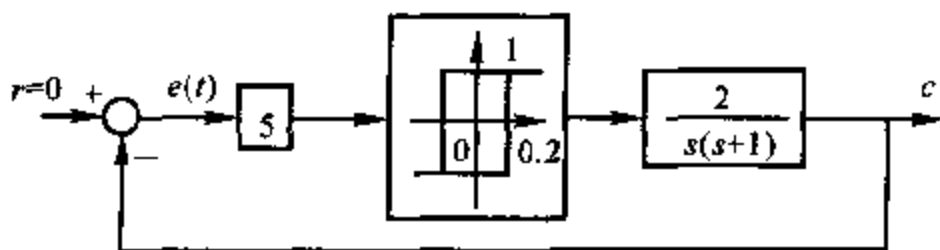
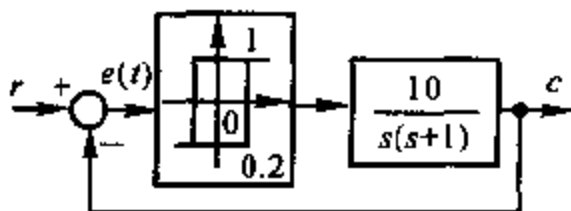


图 8.4.69 题 8.4.18 的非线性系统

解 将系统结构图等效变换为图解 8.4.18



图解 8.4.18

$$G(j\omega) = \frac{10}{j\omega(j\omega+1)} = \frac{-10}{\omega^2+1} - j \frac{10}{\omega(\omega^2+1)}$$

$$N(A) = \frac{4}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{0.2}{A}\right)^2} - j \frac{4 \times 0.2}{\pi A^2} = \frac{4}{\pi A} \left[ \sqrt{1 - \left(\frac{0.2}{A}\right)^2} - j \frac{0.2}{A} \right]$$

$$-\frac{1}{N(A)} = \frac{-\pi A}{4} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{0.2}{A}\right)^2} - j \frac{0.2}{A}} = \frac{-\pi A \sqrt{1 - \left(\frac{0.2}{A}\right)^2} + j \frac{0.2}{A}}{4 \left[ 1 - \left(\frac{0.2}{A}\right)^2 + \left(\frac{0.2}{A}\right)^2 \right]}$$

$$= \frac{-\pi A \sqrt{1 - \left(\frac{0.2}{A}\right)^2}}{4} - j \frac{0.2\pi}{4}$$

令  $G(j\omega)$  与  $\frac{-1}{N(A)}$  的实部、虚部分别相等得:

$$\frac{10}{\omega^2+1} = \frac{\pi A}{4} \sqrt{1 - \left(\frac{0.2}{A}\right)^2}$$

$$\frac{10}{\omega(\omega^2 + 1)} = \frac{0.2\pi}{4} = 0.157$$

两式联立求解得:  $\omega = 3.91$ ,  $A = 0.806$ , 输出信号振幅  $A_c = \frac{A}{5} = 0.161$ 。

8.4.19 试用描述函数法说明图 8.4.70 所示系统必然存在自振, 并确定  $c$  的自振振幅和频率, 画出  $c, x, y$  的稳态波形。

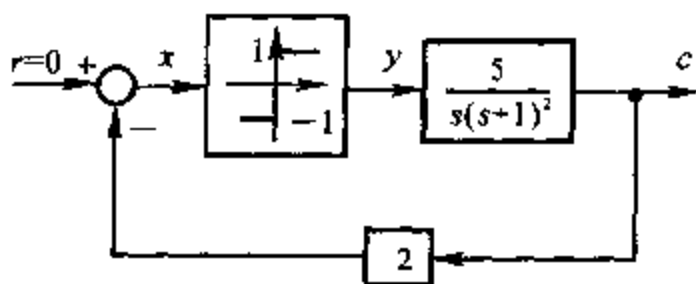


图 8.4.70 题 8.4.19 的非线性系统

解

$$N(A) = \frac{4}{\pi A}, \quad \frac{-1}{N(A)} = \frac{-\pi A}{4}$$

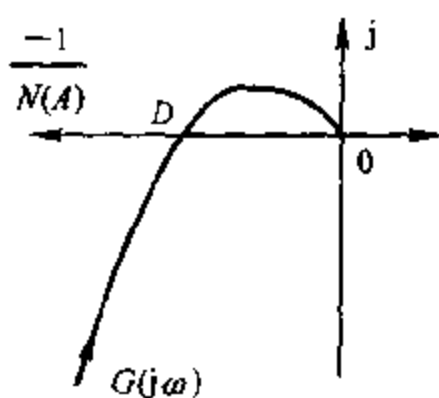
作图解 8.4.19(1) 可见 D 点是稳定的自振点, 由自振条件:

$$N(A) \cdot G(j\omega) = -1$$

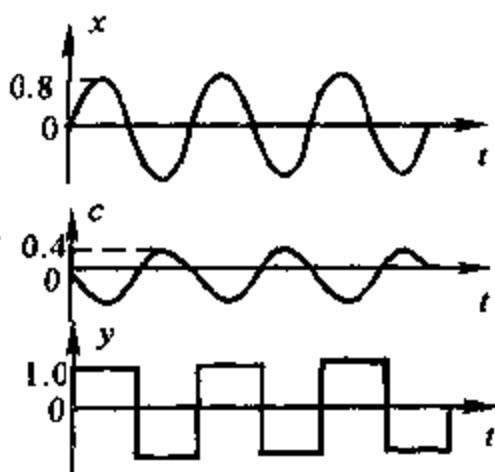
$$N(A) = \frac{-1}{G(j\omega)}$$

即

$$\frac{4}{\pi A} = \frac{-j\omega(j\omega + 2)^2}{10} = \frac{-4\omega^2}{10} + \frac{j\omega(4 - \omega^2)}{10}$$



(1)



(2)

图解 8.4.19



令虚部为零,解出  $\omega = 2$ ,代入实部得  $A = 0.796$ 。最后得出自振参数:  $A = 0.796, \omega = 2$ 。

$x, c, y$  点的信号波形见图解 8.4.19(2)。

**8.4.20** 试用描述函数法和相平面法分析图 8.4.71 所示非线性系统的稳定性及自振。

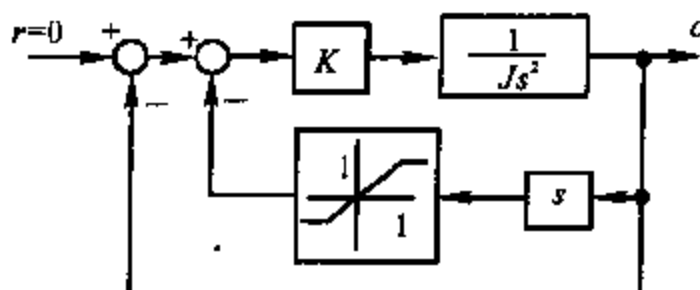


图 8.4.71 题 8.4.20 的非线性系统

**解** (1) 用描述函数法分析。先将结构图等效为典型结构形式:

$$\Phi(s) = \frac{K \frac{1}{Js^2}}{1 + K \frac{1}{Js^2} + K \frac{1}{Js^2} \cdot s \cdot N}$$

取  $\Phi(s)$  的分母令其为零,推导出  $G(s) \times N(s) = -1$  的形式,便可定出  $G(s)$ 。

解得

$$G(s) = \frac{Ks}{Js^2 + K}$$

画出  $G(j\omega)$  曲线和  $\frac{-1}{N(A)}$  曲线如图解 8.4.20(2) 所示。两曲线不相交,且  $\frac{-1}{N(A)}$  曲线在  $G(j\omega)$  曲线之外,故系统稳定。

(2) 用相平面分析法,线性部分传递函数为:(由结构图解 8.4.20(1))

$$J\dot{c} + Kc = Ku \quad (1)$$

由非线性环节有

$$u = \begin{cases} 1, & e > 1 \\ e, & |e| \leq 1 \\ -1, & e < -1 \end{cases} \quad (2)$$

由比较点得

$$e = -c \quad (3)$$

将式③,式②代入式①整理得:

$$J\ddot{e} + Ke = -Ku = \begin{cases} 0, & e > 1, & \text{I} \\ -Ke, & |e| \leq 1, & \text{II} \\ 0, & e < -1, & \text{III} \end{cases}$$

I, III 区的特征方程及特征根为

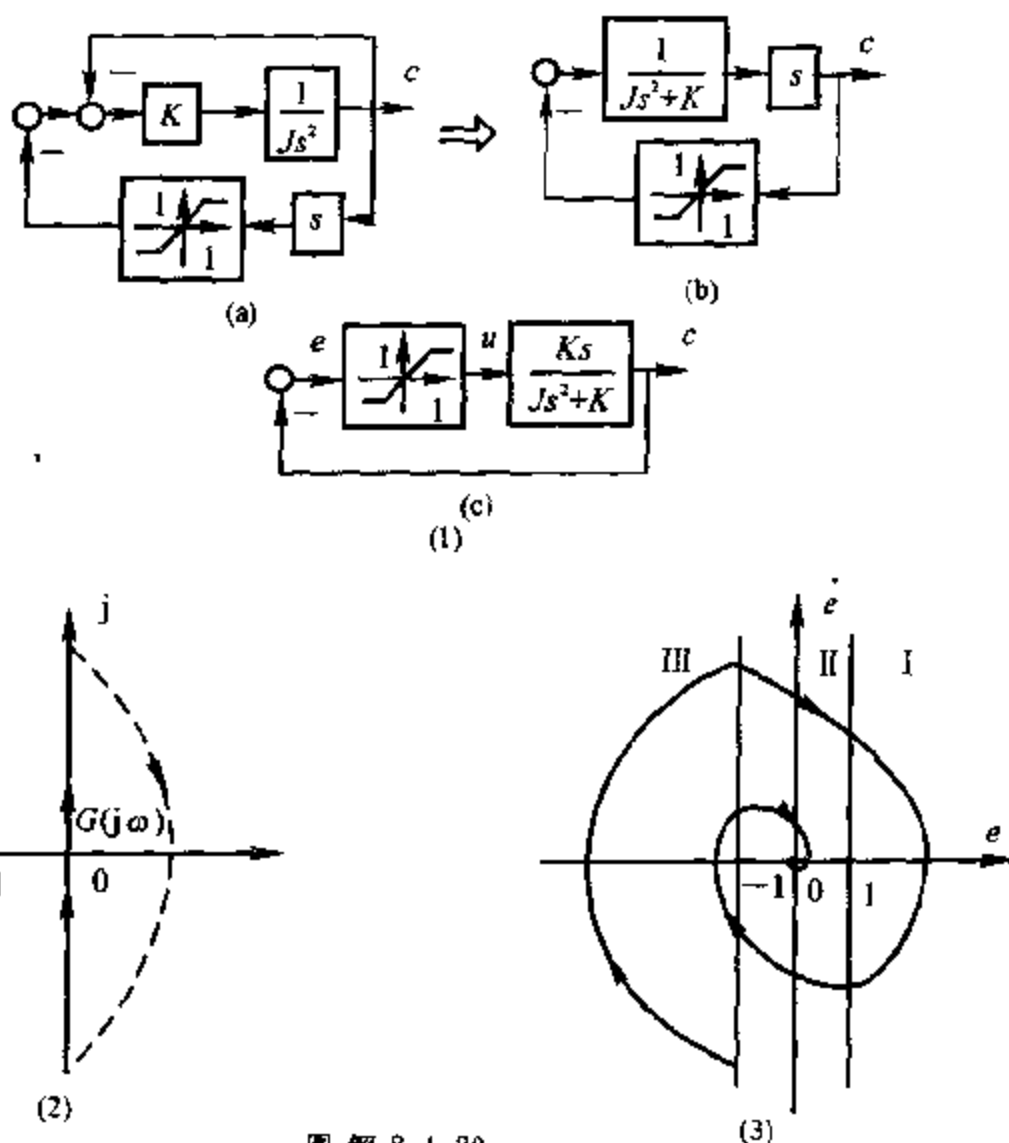
$$Js^2 + K = 0, \quad s_{1,2} = \pm j\sqrt{\frac{K}{J}}$$

II 区的特征方程及特征根为

$$Js^2 + Ks + K = 0, \quad s_{1,2} = \frac{-K}{2J} \pm \frac{1}{2J} \sqrt{K^2 - 4JK}$$

当  $K \geq 4J$  时,  $e_0 = 0$  为稳定的节点; 当  $K < 4J$  时,  $e_0 = 0$  为稳定的焦点。

概略画出系统相轨迹如图解 8.4.20(3) 所示, 可看出系统响应最终稳定。



图解 8.4.20

## 8.4.21 已知非线性系统的输入和输出关系式

$$\ddot{y} + af(\ddot{y}, \dot{y}, y) = \ddot{u} + bg(\dot{u}, u)$$

试求伪线性系统的结构及实现形式。

解 由原系统方程可得

$$\ddot{u} = \ddot{y} + af(\ddot{y}, \dot{y}, y) - bg(\dot{u}, u)$$

取伪线性系统的输入为

$$\Phi = \ddot{y}$$

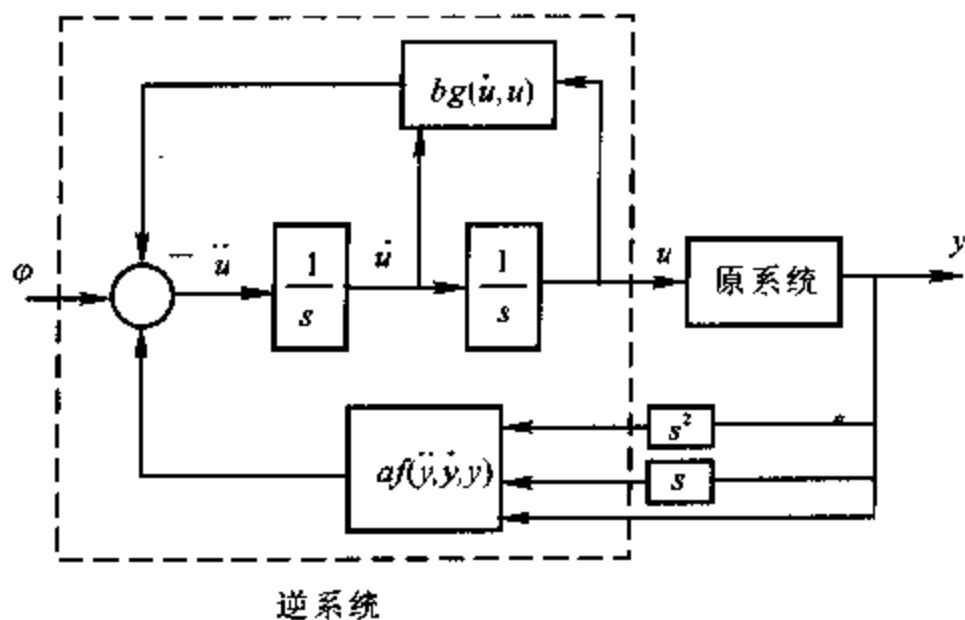
则逆系统方程为

$$\ddot{u} = \Phi + af(\ddot{y}, \dot{y}, y) - bg(\dot{u}, u)$$

可得

$$y(s) = \frac{1}{s^3} \Phi(s)$$

则伪线性系统的结构及实现形式如图解 8.4.21 所示。



图解 8.4.21

## 第9章 线性系统的状态空间分析与综合

---

### 9.1 重点内容提要

#### 9.1.1 线性系统的状态空间描述

##### 1. 基本概念

(1) 状态: 系统在时间域中的行为或运动信息的集合。

(2) 状态变量: 确定系统状态的一组独立(数目最小)的变量。

(3) 状态向量: 以系统  $n$  个状态变量为分量构成的向量。

(4) 状态空间: 以  $n$  个状态变量作为基底所组成的  $n$  维空间。

(5) 状态方程: 描述系统状态变量与输入变量之间关系的一阶微分(差分)方程组。

(6) 输出方程: 描述系统输出变量和输入变量之间函数关系的代数方程组。

(7) 状态空间表达式(动态方程): 状态方程与输出方程的组合。

(8) 线性系统: 状态空间表达式为线性函数的系统, 即

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{cases}$$

(9) 线性定常系统: 状态空间表达式中的系数矩阵都是常数的线性系统。

##### 2. 线性定常连续系统状态空间表达式的建立。

描述系统所用的状态变量必须是独立变量。系统状态变量的个数是惟一的。 $n$  阶系统的状态变量数只能是  $n$  个。但是, 状态变量的选取不具有惟一性, 因此系统状态空间表达式也不具有惟一性, 选取不同的状态变量, 便会有不同的状态空间表达式。

系统的状态空间表达式可以根据系统机理、微分方程(差分方程)、传递函

数、方块图、信号流图建立。按状态空间表达式绘制的系统结构图称为状态变量图。

根据状态矩阵的形式或特点,单输入-单输出系统的状态方程有可控标准型、可观标准型、约当型(含对角型)三种基本的规范形式。

### 3. 状态转移矩阵 $\Phi(t)$ 的求法及其性质

(1) 幂级数法 
$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2}A^2t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}A^kt^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}A^kt^k$$

(2) 拉普拉斯变换法 
$$\Phi(t) = e^{At} = L^{-1}[(sI - A)^{-1}]$$

(3) 凯莱-哈密顿定理 
$$e^{At} = \sum_{m=0}^{n-1} \alpha_m(t)A^m$$

#### (4) $\Phi(t)$ 的性质

$$\Phi(0) = I$$

$$\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t) = \Phi(t)A$$

$$\Phi(t_1 \pm t_2) = \Phi(t_1)\Phi(\pm t_2) = \Phi(\pm t_2)\Phi(t_1)$$

$$\Phi^{-1}(t) = \Phi(-t), \Phi^{-1}(-t) = \Phi(t)$$

$$x(t_2) = \Phi(t_2 - t_1)x(t_1)$$

$$\Phi(t_2 - t_0) = \Phi(t_2 - t_1)\Phi(t_1 - t_0)$$

$$[\Phi(t)]^k = \Phi(kt)$$

$$\text{若 } AB = BA, e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt} = e^{Bt}e^{At}$$

### 4. 线性连续定常系统动态方程的求解

#### (1) 齐次状态方程的解:

$$x(t) = \Phi(t)x(0)$$

#### (2) 非齐次状态方程的解:

(a) 积分法 
$$x(t) = \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau =$$

$$\Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(\tau)Bu(t-\tau)d\tau$$

(b) 拉氏变换法 
$$x(t) = L^{-1}[(sI - A)^{-1}x(0)] + L^{-1}[(sI - A)^{-1}BU(s)]$$

### 5. 线性离散系统状态空间表达式的求解

(1) 递推公式 
$$x(k) = G^k x(0) + \sum_{i=1}^{k-1} G^{k-i-1} Hu(i) \quad k=1, 2, \dots$$

(2) z 变换法 
$$x(t) = Z^{-1}[(zI - G)^{-1}x(0)] + Z^{-1}[(zI - G)^{-1}HU(z)]$$

## 6. 系统的传递函数矩阵及实现

传递函数矩阵  $G(s)$ : 初始条件为零时, 输出向量拉氏变换式与输入向量拉氏变换式之间的传递关系, 简称传递矩阵, 即

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

由给定的一个  $G(s)$ , 若找到一系统  $S(A, B, C, D)$  能满足上式则称该系统是  $G(s)$  的一个实现, 实现并不惟一, 常用标准形式来实现。若阶数相等则称为  $G(s)$  的最小实现。

传递函数的规范型实现主要有可控标准型、可观标准型和约当型三类。约当型(对角型)的实现不是惟一的; 而可控标准型与可观标准型的(最小)实现则是惟一的, 具体结构如下。

$$G(s) = \frac{\beta_{n-1}s^{n-1} + \beta_{n-2}s^{n-2} + \cdots + \beta_1 s + \beta_0}{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \alpha_{n-2}s^{n-2} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0} + b_n$$

可控标准型

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$c = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \cdots \quad \beta_{n-1}], \quad d = b_n$$

可观标准型

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$c = [0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1], \quad d = b_n$$

## 9.1.2 线性系统的可控性与可观测性

## 1. 系统状态可控性及其判据

(1) 对于  $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$  形式的线性系统, 如果状态空间中的所有非零状态  $x(t) \neq 0$  都可在  $u(t)$  作用下在有限时间  $T$  内转移到  $x(T) = 0$ , 则称系统状态完全可控, 简称系统可控。可控性是系统状态运动的一个定性特征, 表征

控制作用  $u(t)$  对状态变量  $x(t)$  的影响程度。

(2) 线性定常系统可控性常用判据：

(a) 秩判据：连续  $\text{rank}[B \ AB \ \cdots \ A^{n-1}B] = n$

离散  $\text{rank}[H \ GH \ \cdots \ G^{n-1}H] = n$ ；

(b)  $(sI - A)^{-1}B$  的行向量线性无关；

(c) 状态矩阵  $A$  为对角阵且对角元素互异时，输入矩阵  $B$  无全零行；

(d) 当  $A$  阵为约当阵且重特征值只对应一个约当块时， $B$  阵中对应互异特征值的行元素不全为零，约当块最后一行元素不全为零（相同特征值分布在不同约当块时不适用）；

(e) 单输入系统为可控标准型或可化为可控标准型。

## 2. 系统输出可控性

若在有限时间间隔  $[t_0, t_1]$  内，存在无约束分段连续控制函数  $u(t)$ ，使任意初始输出  $y(t_0)$  转移到任意最终输出  $y(t_1)$ ，则称系统是输出完全可控的，简称输出可控。它与状态可控性没有必然的联系。其可控性判据为

$$\text{rank}[CB \ CAB \ \cdots \ CA^{n-1}B \ D] = q$$

## 3. 系统可观测性及其判据

(1) 对系统  $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ ,  $y(t) = C(t)x(t)$  存在一个有限时间  $t$ ，对于所有  $t \in [t_0, t_1]$ ，在给定  $t_0$  下，可由输出  $y(t)$  惟一确定状态向量的初值  $x(t_0)$ ，则称系统是完全可以观测的，简称系统可测。它表征状态可由输出量  $y(t)$  反应的能力。

(2) 线性定常连续系统可观测性常用判据

$$(a) \text{ 秩判据：连续 } \text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n$$

$$\text{离散 } \text{rank}[C^T \ G^T C^T \ \cdots \ (G^T)^{n-1} C^T] = n;$$

(b) 系统  $C(sI - A)^{-1}$  的列向量线性无关；

(c) 状态矩阵  $A$  为对角阵且对角元素互异时，输出矩阵  $C$  无全零列；

(d) 当  $A$  阵为约当阵且重特征值只对应一个约当块时， $C$  阵中对应互异特征值的列元素不全为零，约当块最后一列元素不全为零（相同特征值分布在不同约当块时不适用）；

(e) 单输出系统为可观测标准型或可化为可观测标准型。

## 4. 连续时间系统离散化后的可控性和可观测性与原系统之间的关系

连续系统不可控(不可观测),离散化后的系统一定不可控(不可观测);连续系统可控(可观测),离散化后的系统不一定可控(可观测),与采样周期的选择有关。

## 9.1.3 线性定常系统的线性变换

## 1. 状态空间表达式的线性变换

非奇异线性变换的目的通常是将系统变成某种规范形式,如可控标准型、可观测标准型、对角型、约当型,以便于分析与综合设计。非奇异线性变换是等价变换,它不改变系统原有的特性。

$$\text{变换前} \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad \text{变换后} \begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u \\ y = \bar{C}\bar{x} + \bar{D}u \end{cases}$$

$$x = P\bar{x}, \quad \bar{x} = P^{-1}x, \quad \bar{A} = P^{-1}AP, \quad \bar{B} = P^{-1}B, \quad \bar{C} = CP, \quad \bar{D} = D$$

## 2. 非奇异线性变换的不变特性

非奇异线性变换不改变系统的固有特性(即特征值,传递函数矩阵,可控性,可观测性均不变)。

## 3. 对偶原理

系统  $S_1(A, B, C)$  和系统  $S_2(A^T, C^T, B^T)$  互为对偶系统,则若系统  $S_1$  可控,则  $S_2$  可观测;若  $S_1$  可观测,则  $S_2$  可控。

## 4. 线性定常系统的结构分解

从可控性,可观测性出发,状态变量可分解为可控可观测  $x_{co}$ , 可控不可观测  $x_{c\bar{o}}$ , 不可控可观测  $x_{\bar{c}o}$ , 不可控不可观测  $x_{\bar{c}\bar{o}}$  四类。与此对应,状态空间划分为4个子空间,系统也分解为4个子系统,这称为系统的规范分解。规范分解更能明显的揭示系统的结构特征和传递特征。分解途径:从可控性矩阵或可观测性矩阵中,选出线性无关的列或行向量,经扩充后构成非奇异矩阵,然后实施线性变换。

## 9.1.4 线性定常系统的反馈结构及状态观测器

## 1. 常用反馈结构及其对系统特性的影响

(1) 状态反馈:两种形式 反馈至参考输入(重点),反馈至状态微分

$$\text{闭环动态方程} \quad \dot{x} = (A - BK)x + Bv, y = Cx$$



用状态反馈任意配置单输入系统闭环极点的充要条件是:系统可控。

状态反馈不改变系统可控性,但可能会改变可观测性(定理 9-1);状态反馈不改变闭环传递函数的零点。

(2) 输出反馈:两种形式 反馈至状态微分(重点),反馈至参考输入。

$$\text{闭环动态方程} \quad \dot{x} = (A - BFC)x + Bv, y = Cx$$

用输出至状态微分的反馈任意配置单输出系统闭环极点的充要条件是:系统可观测。

输出至状态微分的反馈不改变系统可观测性,但可能改变可控性(定理 9-2)。

输出至参考输入的反馈不改变系统可观测性和可控性(定理 9-3)。

## 2. 状态观测器及其设计

用被控对象的输出量和输入量建立状态观测器来重构状态。状态观测器分全维状态观测器和降维状态观测器。全维状态观测器状态向量的维数与被控对象状态向量的维数相同;降维状态观测器状态向量的维数小于被对象状态向量的维数。

全维状态观测器动态方程  $\dot{\hat{x}}(t) = (A - HC)\hat{x}(t) + Bu + Hy, \hat{y} = C\hat{x}$ 。H 阵按任意极点配置的需要来选择,以决定状态估计误差衰减的速率,通常希望观测器的响应速度比状态反馈系统的响应速度快 3~10 倍。

## 3. 分离定理

若被控系统可控可观测,用状态观测器估值形成状态反馈时,其系统的极点配置和观测器设计可分别独立进行,即 K 和 H 阵的设计可分别独立进行。

# 9.1.5 李雅普诺夫稳定性分析

## 1. 李雅普诺夫意义下的稳定性

平衡状态:满足  $\dot{x}_e = f(x_e, t) = 0$  的  $x_e$  称为平衡状态。

设系统初始状态位于以平衡状态  $x_e$  为球心,  $\delta$  为半径的闭环域  $S(\delta)$  内,即

$$\|x_0 - x_e\| \leq \delta, \quad t = t_0$$

若能使系统方程的解  $x(t; x_0, t_0)$  在  $t \rightarrow \infty$  的过程中,都位于以  $x_e$  为球心,任意规定的半径为  $\varepsilon$  的闭环域  $S(\varepsilon)$  内,即

$$\|x(t; x_0, t_0) - x_e\| \leq \varepsilon, t \geq t_0$$

则称系统的平衡状态  $x_e$  在李雅普诺夫意义下是稳定的。

一致稳定:稳定性与起始时间无关;大范围稳定:系统稳定性与初始状态无关;渐近稳定:状态随时间逐渐收敛于平衡状态;不稳定:无论  $\delta$  和  $\varepsilon$  多么小,只要存在一个初始状态,使得  $\|x(t; x_0, t_0) - x_0\| > \varepsilon, t \geq t_0$ 。

系统稳定性与输入无关;若线性定常系统是李雅普诺夫意义下稳定的,则一定是大范围内一致渐近稳定的。

### 2. 李雅普诺夫第一法(间接法)

对于线性定常系统  $\dot{x} = Ax, x(0) = x_0, t \geq 0$  有

(1) 系统的每一平衡状态是在李雅普诺夫意义下稳定的充要条件是:  $A$  的所有特征值均具有非正(负或零)实部,且具有零实部的特征值为  $A$  的最小多项式的单根。

(2) 系统的惟一平衡状态  $x_e = 0$  是渐近稳定的充要条件是  $A$  的所有特征值均有负实部。

### 3. 李雅普诺夫第二法

标量函数的定号性。李雅普诺夫函数是能量函数,是正定的标量函数。

对于定常系统  $\dot{x} = f(x, t), t \geq 0, f(0, t) = 0$ , 如果存在一个具有连续一阶导数的标准函数  $V(x)$ , 且  $V(0) = 0$ , 若

(1) 满足:

(a)  $V(x)$  为正定;

(b)  $\dot{V}(x)$  为负定;

(c) 当  $\|x\| \rightarrow \infty$  时  $V(x) \rightarrow \infty$ 。

则系统在原点是大范围渐近稳定的(定理 9-11)。

(2) 满足:

(a)  $V(x)$  为正定;

(b)  $\dot{V}(x)$  为负半定;

(c)  $\dot{V}[x(t; x_0, t_0), t]$  在非零状态不恒为零;

(d) 当  $\|x\| \rightarrow \infty$  时  $V(x) \rightarrow \infty$ 。

则定常系统在原点是大范围渐近稳定的(定理 9-12)。

(3) 满足:

(a)  $V(x)$  为正定;

(b)  $\dot{V}(x)$  为负半定;

(c)  $\dot{V}[x(t; x_0, t_0), t]$  在非零状态存在恒为零。

则系统在原点是李雅普诺夫稳定的,但不是渐近稳定的。

(4) 满足:

(a)  $V(x)$  为正定;

(b)  $\dot{V}(x)$  为正定(有界)。

则系统不稳定(定理 9-13)。

#### 4. 李雅普诺夫第二法在线性定常系统稳定分析中的应用

(1) 对于线性定常连续系统  $\dot{x} = Ax$ ,  $A$  为非奇异矩阵, 原点是系统惟一的平衡状态。取二次型函数作为可能的李雅普诺夫函数  $V(x) = x^T Px$ , 则  $\dot{V}(x) = x^T (A^T P + AP)x = -x^T Qx$ 。系统渐近稳定的充要条件是: 给定一个正定对称矩阵  $Q$ , 存在正定对称矩阵  $P$ , 使  $A^T P + AP = -Q$  成立(定理 9-14)。

(2) 线性离散系统  $x(k+1) = Gx(k)$  在平衡状态  $x_e = 0$  渐近稳定的充要条件是: 任意给定的一个正定对称矩阵  $Q$ , 存在一个正定对称矩阵  $P$  满足李雅普诺夫方程  $G^T P G - P = -Q$ (定理 9-15)。

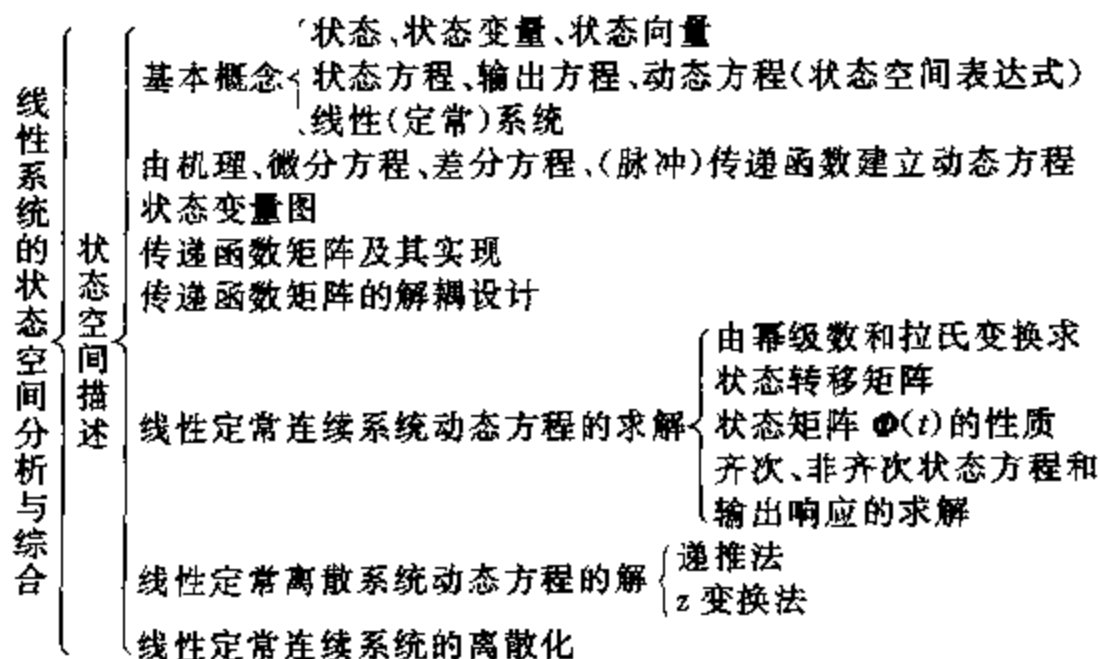
(若标量函数  $V[x(k)] = -x^T(k)Qx(k)$  不恒为零, 则  $Q$  可取正半定矩阵。)

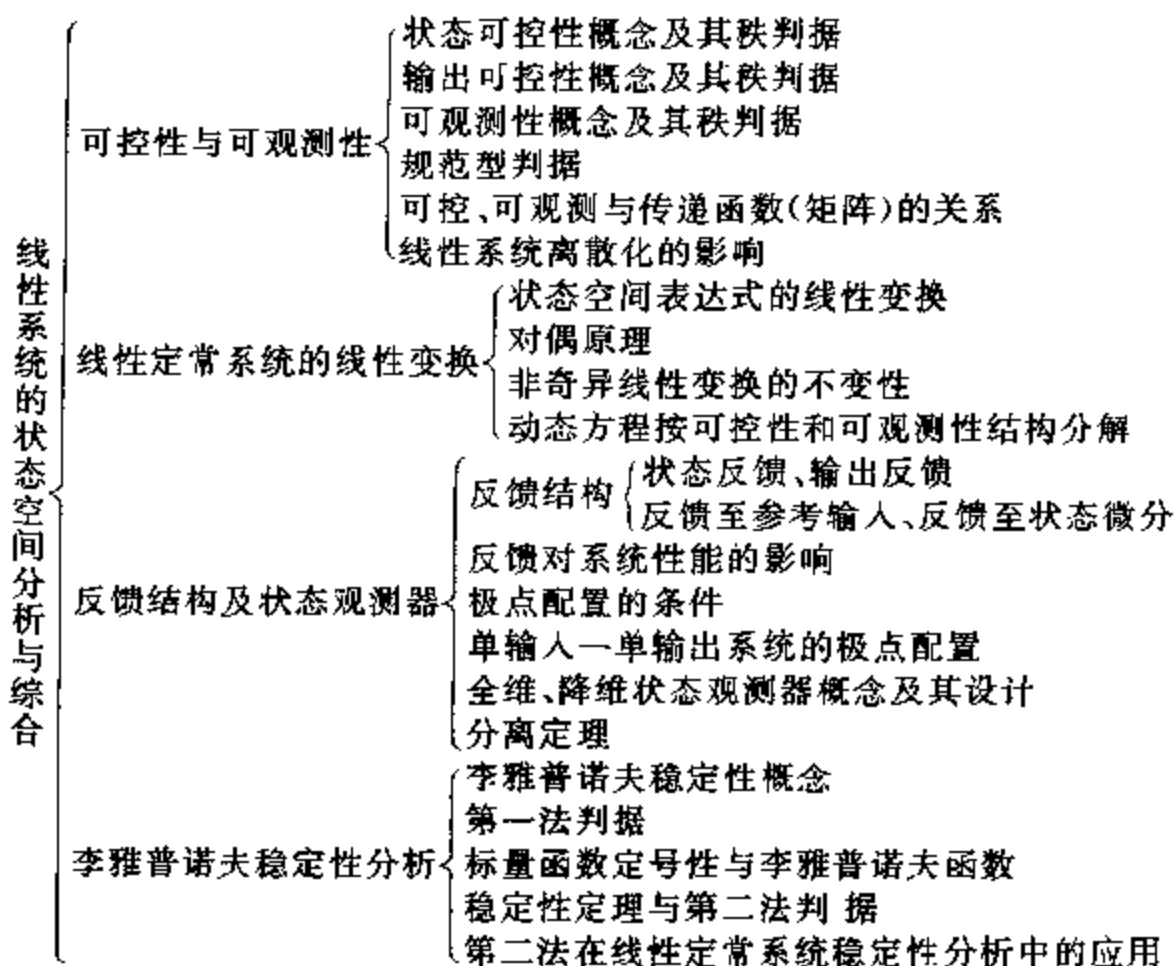
(3) 分析方法:

(a) 给定  $P$  验  $Q$ ;

(b) 给定  $Q$  验  $P$ 。

## 9.2 知识结构图





### 9.3 考点及典型题选解

本章主要考点有:

(1) 状态变量及状态空间的有关概念;由系统机理、方框图、微分方程(差分方程)、传递函数(脉冲传递函数)建立状态空间表达式,画状态变量图,传递函数(矩阵)的实现;可控标准型,可观测标准型,对角型,约当型;由状态空间表达式求传递函数矩阵;系统转移矩阵性质的证明与应用;由状态矩阵  $A$  求状态转移矩阵  $\Phi(t)$ ;线性定常连续系统状态方程的求解;离散动态方程求解。

(2) 系统可控性,可观测性的概念;电路网络可控、可观测的直观判别;线性定常系统可控、可观测性秩判据及应用;约当(对角)规范型系统的可控、可观测性判据;系统可控性,可观测性与传递函数的关系。

(3) 非奇异线性变换的不变特性及证明;状态空间表达式向可控标准型,可观测标准型,对角型,约当型的变换;对偶原理及应用;对线性定常系统按可控、可观进行规范分解。

(4) 状态反馈任意配置系统极点的有关概念,单输入—单输出系统状态反馈矩阵  $K$  的确定与极点配置;输出反馈任意配置系统极点的有关概念,单输入—单输出系统输出反馈矩阵  $H$  的确定与极点配置;分离定理;状态观测器概念与全维状态观测器设计。

(5) 李雅普诺夫稳定性的有关概念;标量函数的定号性概念及判别;平衡状态求解;用李雅普诺夫函数及直接法 4 个定理判定系统稳定性;线性定常系统由  $P$  验  $Q$  和由  $Q$  验  $P$  的稳定性判定。

### 9.3.1 典型题

#### 1. 反馈系统

如图 9.3.1 所示,试判别系统的可控性与可观性。

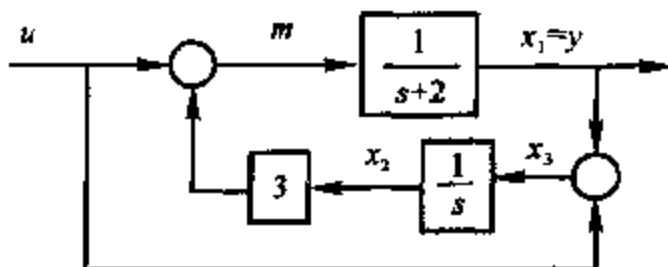


图 9.3.1

2. 验证下面三个矩阵是否为转移矩阵。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin t & \cos t \\ 0 & -\cos t & \sin t \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2e^{2t} - e^t & e^t + e^{2t} \\ e^{2t} - e^t & 2e^t - e^{2t} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}) \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

3. 设系统状态方程  $\dot{X} = AX$ , 并已知其转移矩阵为

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & (1-2t)e^{-2t} & 4te^{-2t} \\ 0 & -te^{-2t} & (1-2t)e^{-2t} \end{bmatrix}, \text{ 试求 } \Phi^{-1}(t) \text{ 和系统的系数矩阵 } A.$$

4. 设系统状态方程  $\dot{X} = AX$ , 并已知该系统的解如下

$$\text{当 } X(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ 时, } X(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$\text{当 } X(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ 时, } X(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-2t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix}$$

试求系统的系数矩阵  $A$ 。

5. 系统的状态方程  $\dot{X} = AX + Bu$ , 设状态变量初始条件为零, 试求系统的解  $X(t)$ 。

(1)  $u(t) = a\delta(t)$ , 其中  $a$  是常数,  $\delta(t)$  是单位脉冲函数;

(2)  $u(t) = a1(t)$ , 其中  $1(t)$  是单位阶跃函数。

6. 离散系统状态方程为  $X(k+1) = GX(k) + Hu(k)$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad X(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad u(k) = 1$$

(1) 试用递推法求解  $X(k)$  ( $k=0, 1, 2, 3$ );

(2) 试用  $z$  变换法求解  $X(k)$ 。

7. 设一系统是由两个子系统串联组成的, 如图 9.3.2 所示。已知子系统  $S_1$  的状态方程为

$$\dot{X}_1 = AX_1 + B_1 u_1, \quad y_1 = C_1 X_1$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_1 = [2 \quad 1]$$

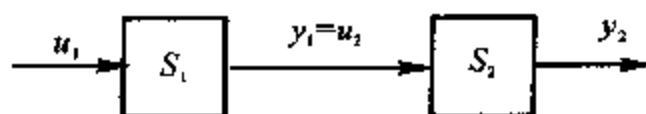


图 9.3.2

已知子系统  $S_2$  的状态方程为  $\dot{X}_2 = AX_2 + B_2 u_2, y_2 = C_2 X_2, A_2 = -2, B_2 = 1, C_2 = 1$ 。

(1) 试求串联系统的状态方程;

(2) 试判别系统的可控性与可观测性;

(3) 试求系统的传递函数。

8. 系统结构图如图 9.3.3 所示。按图中的状态变量列写出系统状态空间表达式。

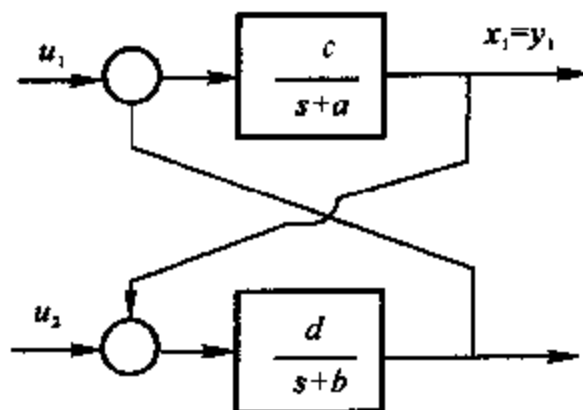


图 9.3.3

9. 传递函数矩阵为  $G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 & \frac{-1}{s^2+1} \end{bmatrix}^T$ , 求系统的可控标准型最小实现。

10. 将下列状态空间表达式变换为对角标准型。

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} u, \quad y = [1 \quad 0 \quad 0] x$$

$$\begin{aligned} 11. \text{ 设系统状态空间描述为 } \dot{x} &= \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u \\ y &= [0 \quad 1] x \end{aligned}$$

(1) 画出系统状态变量图;

(2) 求系统传递函数;

(3) 判定系统可控性;

(4) 求系统状态转移矩阵  $\Phi(t)$ ;

(5) 当  $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ ,  $u(t) = 0$  时, 求系统输出  $y(t)$ ;

(6) 设计全维状态观测器, 将观测器极点配置在  $\{-10+j10, -10-j10\}$  处;

(7) 在(6)的基础上, 设计状态反馈矩阵  $K$ , 使系统闭环极点配置在  $\{-5+j5, -5-j5\}$  处;

(8) 画出系统总体状态变量图。

12. 设描述线性定常系统的状态方程与输出方程分别为

$$\dot{X} = AX + Bu, \quad y = CX$$

式中  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 100 \end{bmatrix}$ ,  $C = [1 \quad 0]$ , 试根据反馈方程  $u = r - FX$

确定状态反馈矩阵  $F = [f_1 \quad f_2]$ , 要求状态反馈系统的相对阻尼比  $\zeta = 0.707$  及无阻尼自振频率  $\omega_n = 10 \text{ rad/s}$ , 反馈方程中的  $r$  为系统的控制函数。假定该系统的状态变量  $x_1, x_2$  是不可测量的。

13. 确定系统的平衡状态, 并用李雅普诺夫方程判别其稳定性。

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 - kx_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - kx_2(x_1^2 + x_2^2) \end{aligned}$$

### 9.3.2 典型题解析

#### 1. 系统可观测, 但不可控

2. 主要从状态转移矩阵的前两个性质出发判断, (1) 否 (2) 否 (3) 是

$$3. \Phi^{-1}(t) = \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & (1+2t)e^{2t} & -4te^{2t} \\ 0 & te^{-2t} & (1+2t)e^{2t} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

4. 联立两个非齐次解  $[X^1(t) \ X^2(t)] = \Phi[X^1(0) \ X^2(0)]$ , 先求出  $\Phi$ , 然后再利用状态转移矩阵性质求  $A$ ,  $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$

5. (1)  $X(t) = e^{At}Ba$  (2)  $X(t) = A^{-1}(e^{At} - I)Ba$ . 解题(1)时注意区分  $0^-$ ,  $0^+$ , 用积分法求得零正时刻的初始条件, 然后按齐次方程求解。(1)和(2)存在导数积分关系。

$$6. (1) \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, 0, 2.84, 0.16 \dots \\ -1, 1.84, -0.84, 1.386 \dots \end{bmatrix}$$

$$(2) X(k) = \begin{bmatrix} -\frac{17}{6}(-0.2)^k + \frac{22}{9}(-0.8)^k + \frac{25}{18} \\ \frac{3.4}{6}(-0.2)^k - \frac{17.6}{9}(-0.8)^k + \frac{7}{18} \end{bmatrix}$$

$$7. (1) \text{ 注意将 } u_2 \text{ 通过 } y_1 \text{ 替换成 } x_1, x_2, A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C = [0 \ 0 \ 1]$$

(2) 可观测, 但不可控

$$(3) G(s) = \frac{(s+2)}{(s+1)(s+3)} \cdot \frac{1}{(s+2)}$$

$$8. \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & -c \\ -d & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

9. 传递函数矩阵的最小公分母为  $D(s) = s^3 + s$ , 按可控标准型, 可得

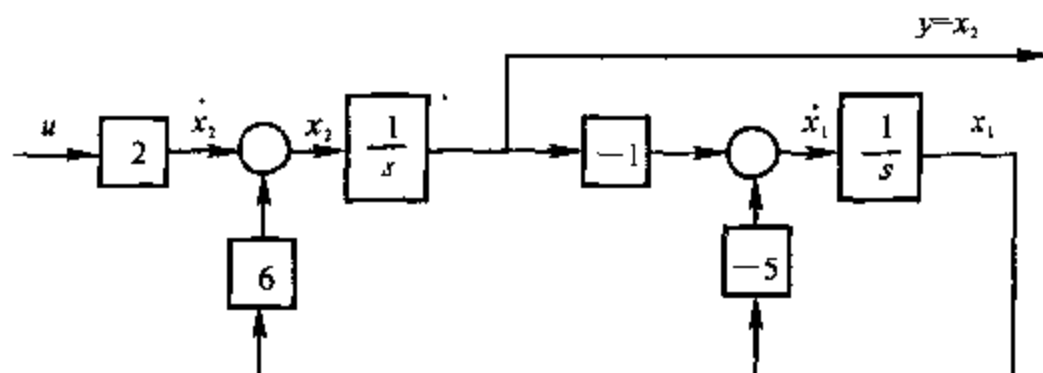
$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ - & -1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \dot{x}$$

10. 注意利用可控标准型与对角型之间的线性变换矩阵,



$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = [1 \quad 1 \quad 1] \hat{x}$$

11. (1) 状态变量图见图解 9.3.11(1)



图解 9.3.11(1)

(2)  $G(s) = \frac{2(s+5)}{s^2+5s+6}$

(3) 系统可控、可观测

(4)  $\Phi(t) = \begin{bmatrix} 3e^{-3t} - 2e^{-2t} & e^{-3t} - e^{-2t} \\ -6e^{-3t} + 6e^{-2t} & -2e^{-3t} + 3e^{-2t} \end{bmatrix}$

(5)  $y(t) = Cx(t) = C\Phi(t)x(0) = 9e^{-2t} - 2t - 6e^{-3t}$

(6) 观测器的误差反馈矩阵为  $H = \begin{bmatrix} -119 \\ 6 \\ -15 \end{bmatrix}$

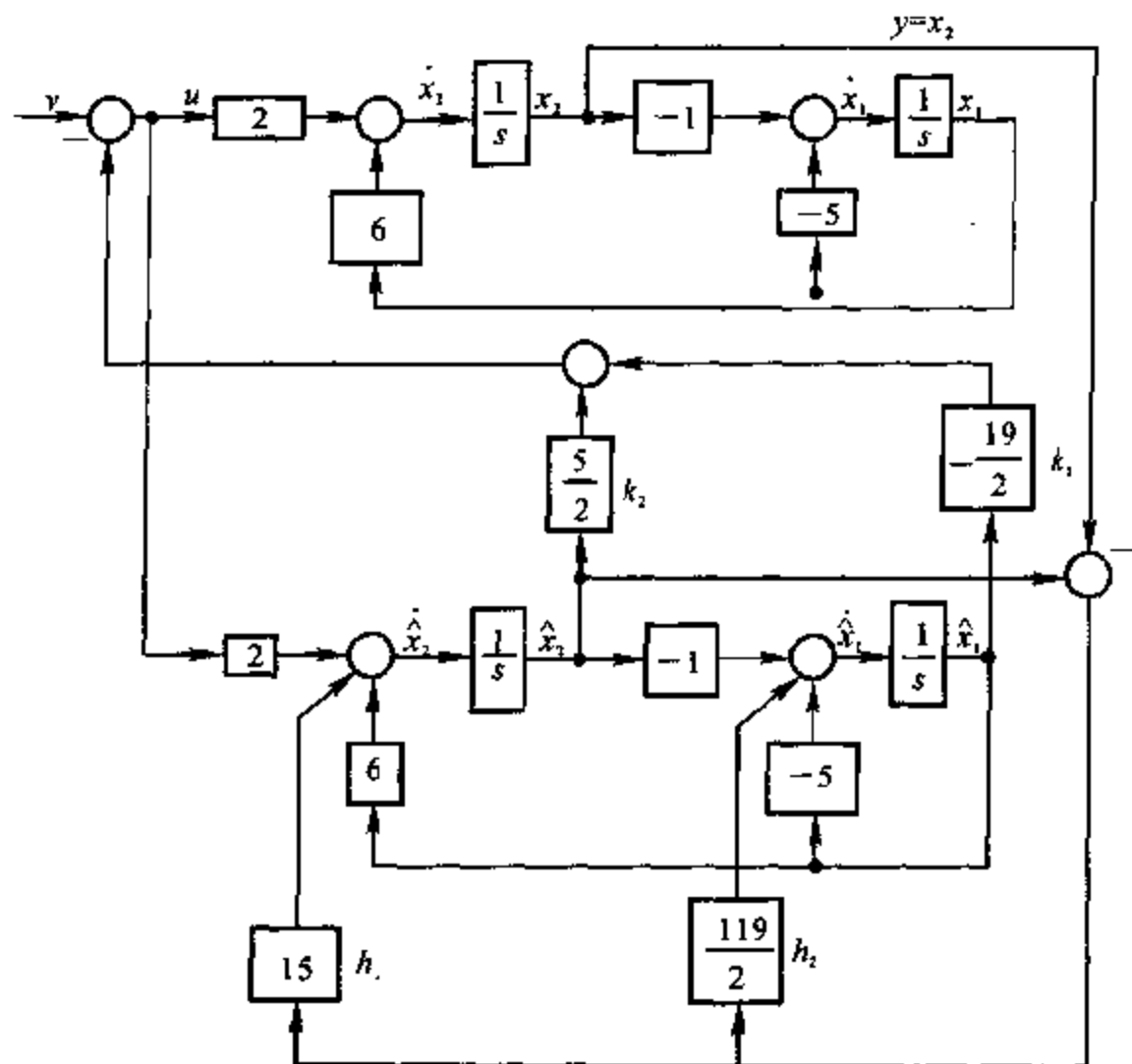
(7)  $K = \begin{bmatrix} \frac{19}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$

(8) 系统总体状态变量图见图解 9.3.11(8)

12.1) 先根据阻尼比与无阻尼自然频率求闭环极点; 2) 因状态不能测量, 须设计状态观测器, 观测器极点比闭环极点远离虚轴 5 倍左右; 3) 状态反馈阵为  $[1 \quad 0.0914]$ 。

13.1)  $x_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  是系统惟一的平衡状态, 2) 选  $V(X) = x_1^2 + x_2^2$ , 3)  $k > 0$ , 系

统大范围一致渐近稳定,  $k = 0$  系统大范围一致稳定,  $k < 0$ , 系统不稳定。



图解 9.3.11(8)

## 9.4 课后习题全解

### 9.4.1 已知电枢控制的直流伺服电机的微分方程组及传递函数

$$U_a = R_a I_a + L_a \frac{di_a}{dt} + E_b$$

$$E_b = K_b \frac{d\theta_m}{dt}$$

$$M_m = C_m i_a$$

$$M_m = J_m \frac{d^2 \theta_m}{dt^2} + f_m \frac{d\theta_m}{dt}$$

$$\frac{\theta_m(s)}{U_a(s)} = \frac{C_m}{s[L_a J_m s^2 + (L_a f_m + J_m + j_m R_a)s + (R_a f_m + K_b C_m)]}$$

- (1) 设状态变量  $x_1 = \theta_m, x_2 = \dot{\theta}_m, x_3 = \ddot{\theta}_m$  及输出量  $\theta_m$ , 试建立其动态方程;  
 (2) 设状态变量  $\bar{x}_1 = i_a, \bar{x}_2 = \theta_m, \bar{x}_3 = \dot{\theta}_m$  及  $\theta_m$ , 试建立其动态方程;  
 (3) 设  $x = T\bar{x}$ , 确立两组状态变量间的变换阵。

解 (1) 由题意可知:

$$\begin{cases} x_1 = \theta_m \\ x_2 = \dot{x}_1 = \dot{\theta}_m \\ x_3 = \dot{x}_2 = \ddot{\theta}_m \\ y = \theta_m = x_1 \end{cases}$$

由已知

$$\begin{cases} U_a = R_a i_a + L_a \dot{i}_a + E_b \\ E_b = K_b \dot{\theta}_m \\ M_m = C_m i_a \\ M_m = J_m \ddot{\theta}_m + f_m \dot{\theta}_m \end{cases}$$

$$\text{可推导出} \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -\frac{f_m L_a + J_m R_a}{L_a J_m} x_3 - \frac{R_a f_m + K_b C_m}{L_a J_m} x_2 - \frac{C_m}{L_a J_m} U_a \\ y = x_1 \end{cases}$$

由上式, 可列动态方程如下:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{R_a f_m + K_b C_m}{L_a J_m} & -\frac{f_m L_a + J_m R_a}{L_a J_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{C_m}{L_a J_m} \end{bmatrix} U_a$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

- (2) 由题意可知:  $\bar{x}_1 = i_a, \bar{x}_2 = \theta_m, \bar{x}_3 = \dot{\theta}_m, y = \theta_m$ 。可推导出

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 = \dot{i}_a = -\frac{R_a}{L_a}i_a - \frac{K_b}{L_a}\dot{\theta}_m + \frac{1}{L_a}U_a = -\frac{R_a}{L_a}\bar{x}_1 - \frac{K_b}{L_a}\bar{x}_3 + \frac{1}{L_a}U_a \\ \dot{\bar{x}}_2 = \dot{\theta}_m = \bar{x}_3 \\ \dot{\bar{x}}_3 = \dot{\theta}_m = \frac{C_m}{J_m}i_a - \frac{f_m}{J_m}\dot{\theta}_m = \frac{C_m}{J_m}\bar{x}_1 - \frac{f_m}{J_m}\bar{x}_3 \\ y = \theta_m = \bar{x}_2 \end{cases}$$

可列动态方程如下

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \\ \dot{\bar{x}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & 0 & -\frac{K_b}{L_a} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{C_m}{J_m} & 0 & -\frac{f_m}{J_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} U_a$$

$$(3) y = [0 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{由 } \begin{cases} x_1 = \theta_m \\ x_2 = \dot{\theta}_m \\ x_3 = \ddot{\theta}_m \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} \bar{x}_1 = i_a \\ \bar{x}_2 = \theta_m \\ \bar{x}_3 = \dot{\theta}_m \end{cases} \quad \text{得}$$

$$\begin{cases} x_1 = \bar{x}_2 = \theta_m \\ x_2 = \bar{x}_3 = \dot{\theta}_m \\ x_3 = \ddot{\theta}_m = \frac{C_m}{J_m}i_a - \frac{f_m}{J_m}\dot{\theta}_m = \frac{C_m}{J_m}\bar{x}_1 - \frac{f_m}{J_m}\bar{x}_3 \end{cases}$$

由上式可得变换矩阵如下

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{C_m}{J_m} & 0 & -\frac{f_m}{J_m} \end{bmatrix}$$

9.4.2 设系统微分方程为  $\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = u$ , 式中,  $u$  为输入量,  $x$  为输出量。

(1) 设取状态变量  $x_1 = x, x_2 = \dot{x}$  试列写动态方程;

(2) 设有状态变换  $x_1 = \bar{x}_1 + \bar{x}_2, x_2 = -\bar{x}_1 - 2\bar{x}_2$ , 试确定变换矩阵及变换后的动态方程。

解 (1) 由题意可知

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{x} = -3x_2 - 2x_1 + u \end{cases}$$

动态方程为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ (2) \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u = \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u \end{aligned}$$

**9.4.3** 设系统微分方程为  $\ddot{y} + 6\dot{y} + 11y = 6u$ , 式中  $u, y$  分别为系统输入, 输出量。试列写可控标准型(即  $A$  为友矩阵)及可观测标准型(即  $A$  为友矩阵转置)状态空间表达式, 并画出状态变量图。

**解** 由题意可得

$$\frac{y}{u} = \frac{6}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

可控标准型

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= [6 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

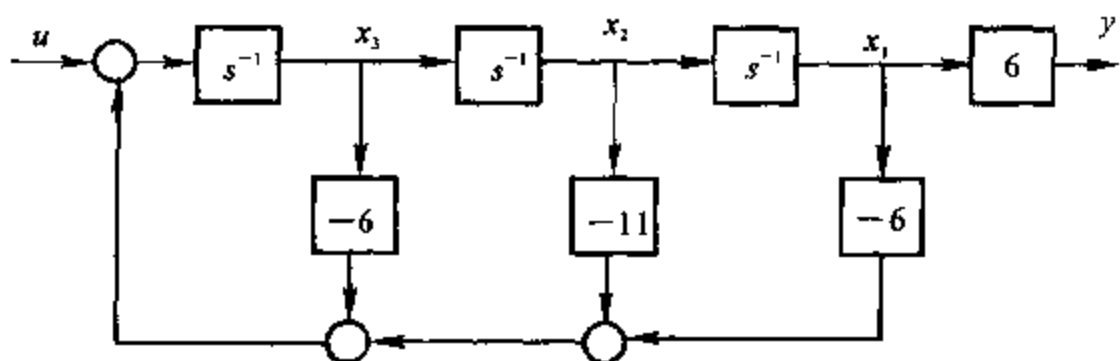
状态变量如图图解 9.4.3(1)。

由方程得可观测标准型

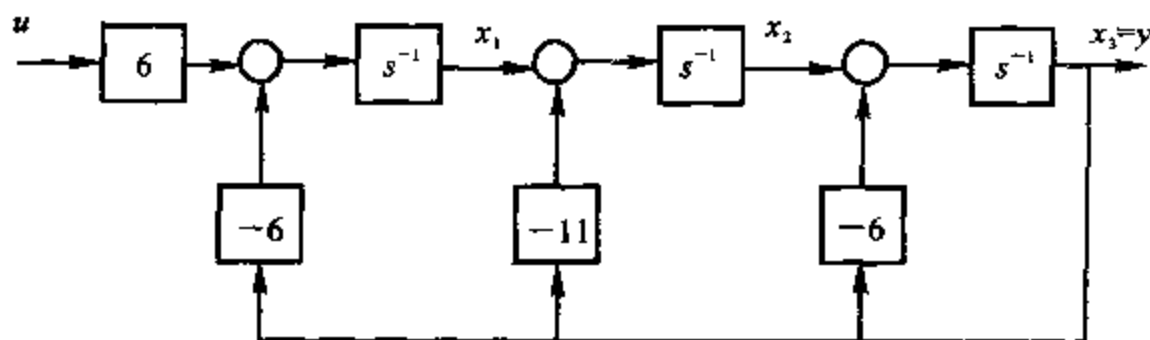
$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \\ \dot{\bar{x}}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \end{aligned}$$

$$y = [0 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix}$$

状态变量图如图解 9.4.3(2)



图解 9.4.3(1)



图解 9.4.3(2)

9.4.4 已知系统结构如图 9.4.4.(1) 所示, 其状态变量为  $x_1, x_2, x_3$ 。试求动态方程, 并画出状态变量图。

解 由结构图可得

$$\begin{cases} \frac{x_1}{x_2 - x_3} = \frac{2}{s(s+1)} & \Rightarrow s^2 x_1 + s x_1 = 2x_2 - 2x_3 & \text{即 } \ddot{x}_1 + \dot{x}_1 = 2x_2 - 2x_3 \\ \frac{x_3}{x_1} = s & \Rightarrow s x_1 = x_3 & \text{即 } \dot{x}_1 = x_3 \\ \frac{x_2}{u - x_1} = \frac{2}{s+3} & \Rightarrow s x_2 = -2x_1 - 3x_2 + 2u & \text{即 } \dot{x}_2 = -2x_1 - 3x_2 + 2u \end{cases}$$

由上述三式, 可列动态方程如下

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = x_1 = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

状态变量图如图解 9.4.4.(2) 所示。

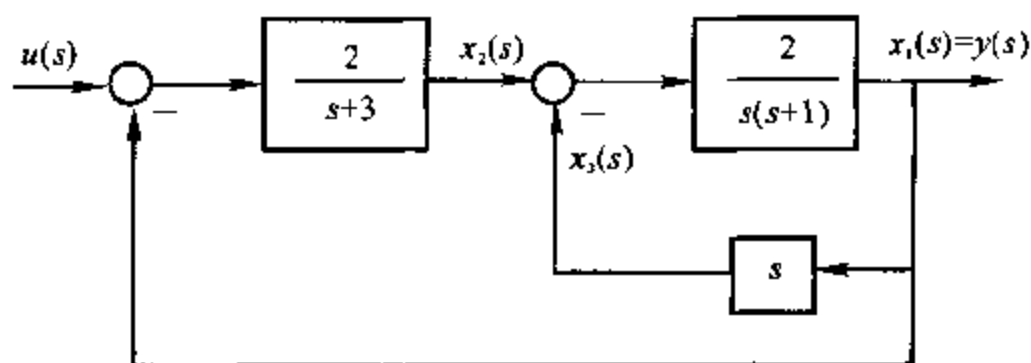


图 解 9.4.4(1)

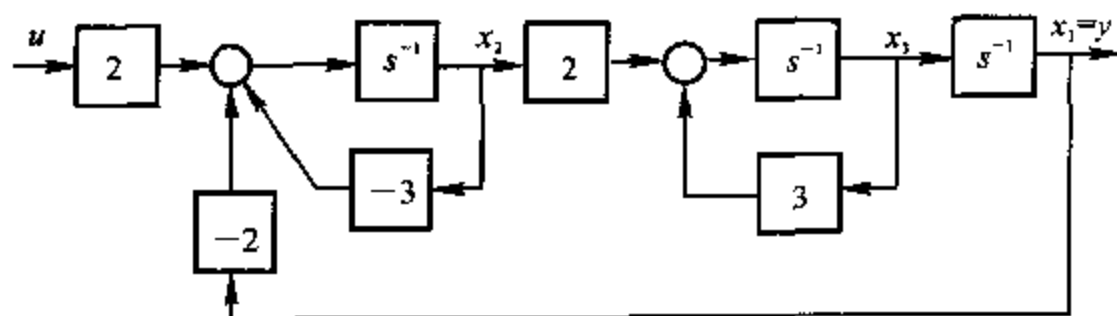


图 解 9.4.4(2)

#### 9.4.5 已知双输入-双输出系统状态方程和输出方程

$$\dot{x}_1 = x_2 + u_1$$

$$\dot{x}_2 = x_3 + 2u_1 - u_2$$

$$\dot{x}_3 = -6x_1 - 11x_2 - 6x_3 + 2u_2$$

$$y_1 = x_1 - x_2$$

$$y_2 = 2x_1 + x_2 - x_3$$

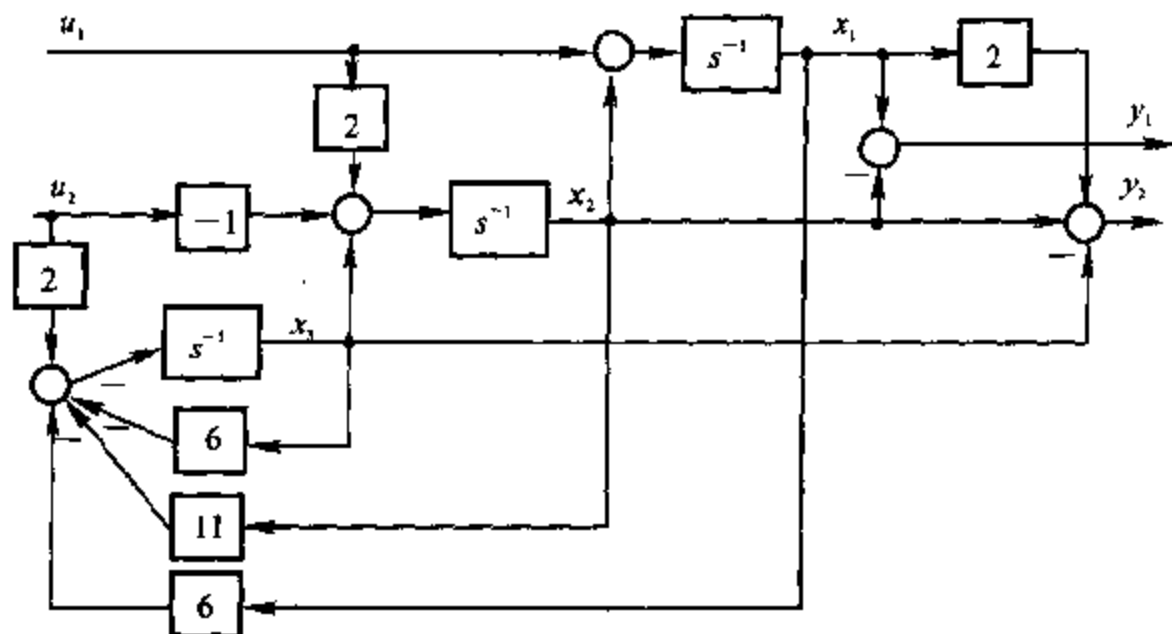
写出其向量-矩阵形式,并画出状态变量图。

解 由题中给定方程可列写出向量-矩阵

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

状态变量图如图解 9.4.5 所示。



图解 9.4.5

**9.4.6** 已知系统传递函数为  $G(s) = \frac{s^2 + 6s + 8}{s^2 + 4s + 3} = 1 + \frac{2s + 5}{s^2 + 4s + 3}$ , 试求可控标准型( $A$  为友矩阵), 可观测标准型( $A$  为友矩阵转置), 对角型( $A$  为对角阵)动态方程。

**解** (1) 由上式可得可控标准型

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= [5 \quad 2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + u \end{aligned}$$

(2) 可观测标准型



$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} + u$$

$$(3) \quad G(s) = \frac{s^2 + 6s + 8}{s^2 + 4s + 3} = 1 + \frac{1/2}{s+3} + \frac{3/2}{s+1}$$

由上式可得对角型

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 \\ 3/2 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + u$$

9.4.7 已知系统传递函数  $G(s) = \frac{5}{(s+1)^2(s+2)}$ , 试求约当阵(A 为约当阵)动态方程。

解 
$$G(s) = \frac{5}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{5}{(s+1)^2} - \frac{5}{s+1} + \frac{5}{s+2}$$

由上式, 可得约当型动态方程

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [5 \quad -5 \quad 5] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

9.4.8 已知矩阵  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ , 试求的特征方程, 特征值, 特征向量,

并求出变换矩阵将约当化。

解

$$(1) \quad \Delta(s) = |sI - A| = \begin{vmatrix} s & 1 & 0 & 0 \\ 0 & s & -1 & 0 \\ 0 & 0 & s & -1 \\ -1 & 0 & 0 & s \end{vmatrix} = s^4 - 1$$

$$(2) \lambda_1=1, \lambda_2=-1, \lambda_{3,4}=\pm j$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & j & \\ & & & -j \end{bmatrix}$$

$$(3) P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ j \\ -1 \\ -j \end{bmatrix}, P_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ j \\ j \end{bmatrix}$$

对角化变换矩阵

$$P = [P_1 \ P_2 \ P_3 \ P_4] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & j & -j \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -j & j \end{bmatrix}$$

$$PA = AP = \begin{bmatrix} 1 & -1 & j & -j \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -j & j \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

所以  $P$  可使  $A$  对角化

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{P}A = A\bar{P} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

所以,  $\bar{P}$  可使  $A$  模式化。

9.4.9 已知矩阵  $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , 试用幂级数法及拉普拉斯变换法求出矩

阵指数(即状态转移矩阵)。

解

(1) 级数法:

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2}A^2t^2 + \dots =$$

$$\begin{bmatrix} 1-t+\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{4}t^4+\dots & 0 \\ 0 & 1+t+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{4}t^4+\dots \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$$

(2) 拉氏变换法

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s-1} \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = L^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$$

9.4.10 试求下列状态方程的解

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} x$$

解 由题意可得

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ (sI - A)x = x_0 \\ x = (sI - A)^{-1}x_0 \\ x(t) = L^{-1}(sI - A)^{-1}x_0 \end{cases}$$

$$x(t) = L^{-1} \begin{bmatrix} s+1 & 0 & 0 \\ 0 & s+2 & 0 \\ 0 & 0 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} x_0 = L^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s+3} \end{bmatrix} x_0 =$$

$$\begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} x_0$$

9.4.11 已知系统状态方程为  $\dot{x} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$ , 初始条件为  $x_1(0) = 1, x_2(0) = 0$ 。试求系统在单位阶跃输入作用下的响应。

解 此题为求非奇次状态方程的解, 对于非奇次状态方程,

$$x(t) = \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

$$\Phi(t) = L^{-1}(sI - A)^{-1} = L^{-1} \begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ s-1 & s-1 \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$L^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & 0 \\ \frac{1}{(s-1)^2} & \frac{1}{s-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ te^t & e^t \end{bmatrix}$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ te^t & e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} e^{t-\tau} & 0 \\ (t-\tau)e^{t-\tau} & e^{t-\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} -1 + 2e^t \\ 2te^t \end{bmatrix}$$

9.4.12 已知线性系统状态转移矩阵

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - 5e^{-2t} & 4e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 3e^{-2t} & -3e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

试求该系统的状态阵  $A$ 。

解  $\dot{\Phi} = A\Phi, \quad \Phi(0) = I$

$$A = \dot{\Phi}(t) \big|_{t=0} = \begin{bmatrix} -2e^{-t} + 10e^{-2t} & -4e^{-t} + 2e^{-2t} \\ 2e^{-t} - 6e^{-2t} & 3e^{-t} - 4e^{-2t} \end{bmatrix} \bigg|_{t=0} = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$$

9.4.13 已知系统动态方程

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} u, \quad y = [0 \ 0 \ 1]x$$

试求传递函数  $G(s)$ 。

解

$$G(s) = C[(sI - A)^{-1}]B = [0 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 2 & s+3 & 0 \\ 1 & -1 & s-3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{s^3 - 7s - 6} [-s - 5 \quad s - 1 \quad s^2 + 3s + 2] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{2s^2+7s+3}{s^3-7s-6}$$

9.4.14 试求习题 9.4.5 所示系统的传递函数矩阵。

解

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 6 & 11 & s+6 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} \begin{bmatrix} -s^2-4s+29 & s^2+3s-4 \\ 4s^2+56s+52 & -3s^2-17s-14 \end{bmatrix}$$

9.4.15 已知差分方程

$$y(k+2) + 3y(k+1) + 2y(k) = 2u(k+1) + 3u(k)$$

试列写可控标准型(为友矩阵)离散动态方程,并求出  $u(k) = [u(0) \quad u(1)]^T = [1 \quad 1]^T$  时的系统响应。

解 由差分方程可得离散动态方程如下:

$$\begin{cases} x(k+1) = G \cdot x(k) + H \cdot u(k) \\ y(k) = C \cdot x(k) \end{cases}$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [3 \quad 2]$$

由于题目未指定初始条件,可设  $x(0) = 0$ , 则

$$x(1) = G \cdot x(0) + H \cdot u(0) = 0 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times 1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y(1) = C \cdot x(1) = [3 \quad 2] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 2$$

$$x(2) = G \cdot x(1) + H \cdot u(1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times 1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$y(2) = C \cdot x(2) = [3 \quad 2] \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = -1$$

9.4.16 已知连续系统的动态方程为  $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, y = [1 \quad 0]x$

设采样周期  $T=1$  s, 试求离散化动态方程。

解

$$\Phi(t) = L^{-1}[sI - A]^{-1} = L^{-1} \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s-2 \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$L^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s-2)} \\ 0 & \frac{1}{s-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(e^{2t}-1) \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$\Phi(T=1) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(e^2-1) \\ 0 & e^2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 3.19 \\ 0 & 7.39 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} G(T=1) &= \int_0^T \Phi(\tau) B d\tau = \int_0^1 \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(e^{2\tau}-1) \\ 0 & e^{2\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} d\tau = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\frac{1}{2}e^{2\tau}-\tau) \\ \frac{1}{2}e^{2\tau} \end{bmatrix}_0^1 = \\ &= \begin{bmatrix} 1.347 \\ 3.195 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

#### 9.4.17 试判断下列系统的状态可控性

$$(1) \dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$(2) \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$(3) \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$(4) \dot{x} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$(5) \dot{x} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$(6) \dot{x} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$\text{解 (1) } P_c = [B \mid AB \mid A^2B] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank} P_c = 2 < n = 3$$

所以该系统不可控。

$$(2) P_c = [B \mid AB \mid A^2B] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank} P_c = 2 < n = 3$$

所以该系统不可控。

$$(3) P_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank} P_c = 3 = n$$

所以该系统可控。

$$(4) P_c = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 16 \\ 2 & -8 & 32 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank} P_c = 2 < n = 3$$

所以该系统不可控。

$$(5) P_c = [B \mid AB \mid A^2B \mid A^3B] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2\lambda_1 & 3\lambda_1 \\ 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \lambda_1^3 \\ 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \lambda_1^3 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \lambda_2^3 \end{bmatrix}$$

该矩阵不满秩,所以该系统不可控。

(6) 该形式是约当标准型,所以该系统可控。

9.4.18 已知  $ad=bc$ , 试计算  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{100}$ 。

解 设  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ , 其特征式为

$$|sI - A| = \begin{vmatrix} s-a & -b \\ -c & s-d \end{vmatrix} = s^2 - (a+d)s + ad - cb$$

由题意  $ad = bc$ , 可得:

$$s^2 - (a+d)s = 0$$

由凯莱-哈密顿定理有

$$A^2 - (a+d)A = 0$$

即

$$A^2 = (a+d)A$$

$$A^{100} = (a+d)A^{99} = (a+d)^2 A^{98} = \cdots = (a+d)^{99} A = (a+d)^{99} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

9.4.19 设系统状态方程为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & a \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} 1 \\ b \end{bmatrix} u$$

设状态可控, 试求  $a, b$ 。

解

$$P_c = [B : AB] = \begin{bmatrix} 1 & b \\ b & ab-1 \end{bmatrix}$$

令  $|P_c| = ab - 1 - b^2 \neq 0 \Rightarrow a \neq b + \frac{1}{b}$  时, 即可满足可控性条件。

9.4.20 设系统传递函数为

$$G(s) = \frac{s+a}{s^3 + 7s^2 + 14s + 8}$$

设状态可控, 试求  $a$ 。

解

$$G(s) = \frac{s+a}{s^3 + 7s^2 + 14s + 8} = \frac{s+a}{(s+1)(s+2)(s+4)}$$

① 采用可控标准型, 不论为  $a$  何值, 系统总可控。

② 在任意三阶实现情况下可控, 则  $a \neq 1, 2, 4$ 。

9.4.21 判断下列系统的输出可控性。

$$(1) \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = [1 \ 0 \ 0]x$$



$$(2) \dot{x} = \begin{bmatrix} -a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -d \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = [1 \ 0 \ 0 \ 0]x$$

解 (1)  $S = [CB : CAB : CA^2B] = [0 \ 0 \ 1]$   
 $\text{rank} S = 1$

所以该系统输出可控。

(2)  $S = [CB : CAB : CA^2B : CA^3B] = [0 \ 0 \ 0 \ 0]$   
 $\text{rank} S = 0 \neq 1$

所以该系统输出不可控。

9.4.22 试判断下列系统的可观测性。

$$(1) \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = [1 \ 1 \ 0]x$$

$$(2) \dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} x, \quad y = [1 \ 1 \ 1]x$$

$$(3) \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} x, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} x$$

$$(4) \dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} x, \quad y = [0 \ 1 \ 1]x$$

解 (1)  $P_0 = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$   
 $\text{rank} P_0 = 3 = n$

所以该系统可观。

(2)  $P_0 = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 4 & 13 & 1 \end{bmatrix}$

$$\text{rank } P_0 = 3 = n$$

所以该系统可观。

(3) 该形式为约当标准型, 直接判定, 该系统可观。

(4) 该形式为约当标准型, 直接判定, 该系统不可观。

9.4.23 试确定使下列系统可观的  $a, b$ 。

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{bmatrix} x, \quad y = [1 \quad -1]x$$

解

$$P_0 = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ a & 1-b \end{bmatrix}$$

$|P_0| = 1 - b + a \neq 0 \Rightarrow b \neq a + 1$  时, 系统可观。

9.4.24 已知系统各矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

试用传递矩阵判断系统可控性, 可观测性。

解

$$\begin{aligned} (sI - A)^{-1} &= \begin{bmatrix} s-1 & -3 & -2 \\ 0 & s-4 & -2 \\ 0 & 0 & s-1 \end{bmatrix}^{-1} = \\ &= \frac{1}{(s-1)^2(s-4)} \begin{bmatrix} (s-1)(s-4) & 3(s-1) & 2(s-1) \\ 0 & (s-1)^2 & 2(s-1) \\ 0 & 0 & (s-1)(s-4) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

判断可控性:

$$\begin{aligned} (sI - A)^{-1}B &= \begin{bmatrix} s-4 & 3 & 2 \\ 0 & s-1 & 2 \\ 0 & 0 & s-4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{(s-1)(s-4)} \begin{bmatrix} 2 & s-4 \\ 2 & 0 \\ s-4 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

令

$$a_1[2 \quad s-4] + a_2[2 \quad 0] + a_3[s-4 \quad 0] = 0$$

解得

$$a_1 = a_2 = a_3 = 0$$

所以  $(sI - A)^{-1}B$  中三行向量线性无关, 因此该系统可控。

判断可观性:

$$C(sI-A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s-4 & 3 & 2 \\ 0 & s-1 & 2 \\ 0 & 0 & s-4 \end{bmatrix} \frac{1}{(s-1)(s-4)} =$$

$$\frac{1}{(s-1)(s-4)} \begin{bmatrix} s-4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & s-4 \end{bmatrix}$$

令 
$$a_1 \begin{bmatrix} s-4 \\ 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} - a_3 \begin{bmatrix} 2 \\ s-4 \end{bmatrix} = 0$$

解得 
$$a_1 = a_2 = a_3 = 0$$

所以,  $C(sI-A)^{-1}$  中三行向量线性无关, 因此该系统可观测。

9.4.25 将下列状态方程化为可控标准型:

$$\dot{x} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

解 
$$P_c = [B : AB] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$$

所以,  $\text{rank} P_c = 2$ , 系统可控, 可化为可控标准型。

$$P_c = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

取 
$$P_1 = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$$

则 
$$P = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_1 A \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, \quad P_1^{-1} = \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

验证: 
$$PAP^{-1} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & 5 \end{bmatrix}$$

$$PB = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

故可控标准型实现对应的  $A, B$  阵为:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

9.4.26 已知系统传递函数为

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+1}{s^2+3s+2}$$

试写出系统可控不可观测、可观测不可控、不可控不可观测的动态方程。

解

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+1}{s^2+3s+2} = \frac{s+1}{(s+1)(s+2)}$$

传递函数有零极点对消, 因此不可控或不可观。

可控不可观方程:

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{X} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} U$$

$$Y = [1 \quad 1] \mathbf{X}$$

可观测不可控方程:

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{X} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} U$$

$$Y = [0 \quad 1] \mathbf{X}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+1}{(s+1)(s+2)} = \frac{0}{s+1} + \frac{1}{s+2}$$

不可控不可观方程:

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{X} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} U$$

$$Y = [0 \quad 1] \mathbf{X}$$

9.4.27 已知系统各矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -6 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [-4 \quad -3 \quad 1 \quad 1]$$

试求可控子系统与不可控子系统的动态方程。

解

$$\mathbf{P}_c = [\mathbf{B} : \mathbf{AB} : \mathbf{A}^2\mathbf{B} : \mathbf{A}^3\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 11 & 47 & 191 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank} \mathbf{P}_c = 2$$

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 11 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} = \frac{1}{27} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 11 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 27 & 0 & -9 & 0 \\ 0 & 27 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{TAT}^{-1} &= \frac{1}{27} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 11 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 27 & 0 & -9 & 0 \\ 0 & 27 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -6 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 11 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\
 & \frac{1}{27} \begin{bmatrix} 0 & -108 & -75 & -16 \\ 27 & 135 & 21 & -2 \\ 0 & 0 & 81 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 54 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{TB} &= \frac{1}{27} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 11 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 27 & 0 & -9 & 0 \\ 0 & 27 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{CT}^{-1} &= [-4 \quad -3 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 11 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [1 \quad 10 \quad -4 \quad -3]
 \end{aligned}$$

所以,可控子系统为:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}}_c = \frac{1}{27} \begin{bmatrix} 0 & -108 \\ 27 & 135 \end{bmatrix} \mathbf{X}_c + \frac{1}{27} \begin{bmatrix} -75 & -16 \\ 21 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{X}_c + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y_c = [1 \quad 10] \mathbf{X}_c \end{cases}$$

不可控子系统为:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}}_c = \begin{bmatrix} 3 & \frac{2}{3} \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{X}_c = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \mathbf{X}_c \\ y_c = [-4 \quad -3] \mathbf{X}_c \end{cases}$$

**9.4.28** 系统各矩阵同习题 9.4.27,试求可观测子系统与不可观测子系统的动态方程。

**解** 利用 9.4.27 的对偶关系实现:

$$\bar{\mathbf{A}} = \frac{1}{27} \begin{bmatrix} 0 & 27 & 0 & 0 \\ -108 & 135 & 0 & 0 \\ -75 & 21 & 81 & 0 \\ -28 & -2 & 18 & 54 \end{bmatrix}$$

$$\bar{B} = C^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = B^T = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

可观子系统:

$$\begin{cases} \dot{X}_a = \frac{1}{27} \begin{bmatrix} 0 & 27 \\ -108 & 135 \end{bmatrix} X_a + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ Y_a = [1 \quad 0] X_a \end{cases}$$

不可观子系统:

$$\begin{cases} \dot{X}_b = \frac{1}{27} \begin{bmatrix} -75 & 21 \\ -28 & -2 \end{bmatrix} X_b + \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} X_a + \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \end{bmatrix} u \\ Y_b = 0 \end{cases}$$

9.4.29 设被控系统状态方程为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 10 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} u$$

可否用状态反馈任意配置闭环极点? 求状态反馈阵, 使闭环极点位于  $-10$ ,  $-1 \pm j\sqrt{3}$ , 并画出状态变量图。

解

$$P_c = [B \quad AB \quad A^2B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 90 \\ 10 & 100 & 990 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank} P_c = 3 = n$$

$$|sI - (A - Bk)| = (s+10)(s+1+j\sqrt{3})(s+1-j\sqrt{3})$$

$$\left| \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} [k_1 \quad k_2 \quad k_3] \right\} \right| =$$

$$s^3 + 12s^2 - 24s + 40$$

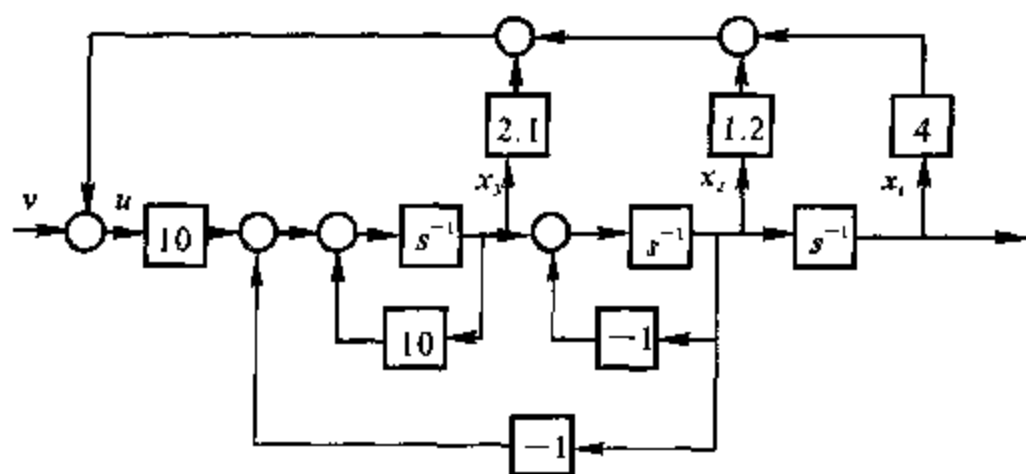
即

$$s^3 + (10k_3 - 9)s^2 + (10k_3 + 10k_2 - 9)s + 10k_1 = s^3 + 12s^2 + 24s + 40$$

解得

$$\begin{cases} k_1 = 4 \\ k_2 = 1.2 \\ k_3 = 2.1 \end{cases}$$

其状态变量图见图解 9.4.29。



图解 9.4.29

9.4.30 设被控系统动态方程为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = [1 \quad 0] x$$

试设计全维状态观测器,使其闭环极点位于 $-r, -2r(r>0)$ ,并画出状态变量图。

解

$$P_c = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

 $\text{rank} P_c = 2 = n$ , 可观, 可设计全维状态观测器。

观测器系统矩阵

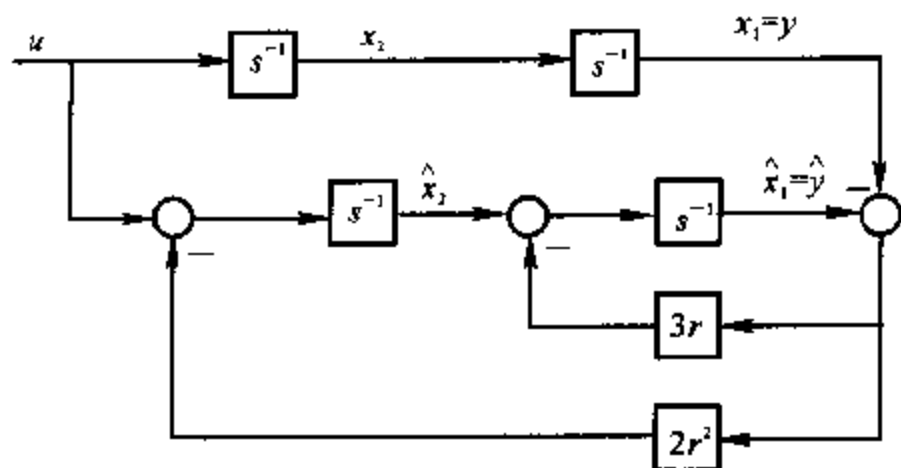
$$A - HC = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \end{bmatrix} [1 \quad 0] \right\} = \begin{bmatrix} -h_0 & 1 \\ -h_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{令 } |sI - (A - HC)| &= \begin{vmatrix} s + h_0 & -1 \\ h_1 & s \end{vmatrix} = s^2 + h_0 s + h_1 = \\ &= (s + r)(s + 2r) = s^2 + 3rs + 2r^2 \end{aligned}$$

解得

$$\begin{cases} h_0 = 3r \\ h_1 = 2r^2 \end{cases}$$

其状态变量图见图解 9.4.30。



图解 9.4.30

9.4.31 设被控系统动态方程为:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad y = [0 \quad 0 \quad 1]x$$

试检查被控系统可控性, 可观测性, 求出至输入的反馈矩阵, 使闭环极点位于  $-0.57, -0.22 \pm j1.3$ , 并画出状态变量图。

$$\text{解 } P_c = [B : AB : A^2B] = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 5 & 5 & -25 \\ 1 & -2 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -5 & 16 \end{bmatrix}$$

$\text{rank} P_c = 3 = n$ , 系统可控。

$$P_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 10 \end{bmatrix}$$

$\text{rank} P_o = 3 = n$ , 系统可观测。

$$A - HC = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} [0 \quad 0 \quad 1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5-h_0 \\ 1 & 0 & 1-h_1 \\ 0 & 1 & -3-h_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{令 } |sI - (A - HC)| = (s + 0.57)(s + 0.22 + j1.3)(s + 0.22 - j1.3)$$

即

$$\begin{vmatrix} s & 0 & h_0 - 5 \\ -1 & s & h_1 - 1 \\ 0 & -1 & s + 3 + h_2 \end{vmatrix} = s^3 + (3 + h_2)s^2 + (h_1 - 1)s + (h_0 - 5) =$$

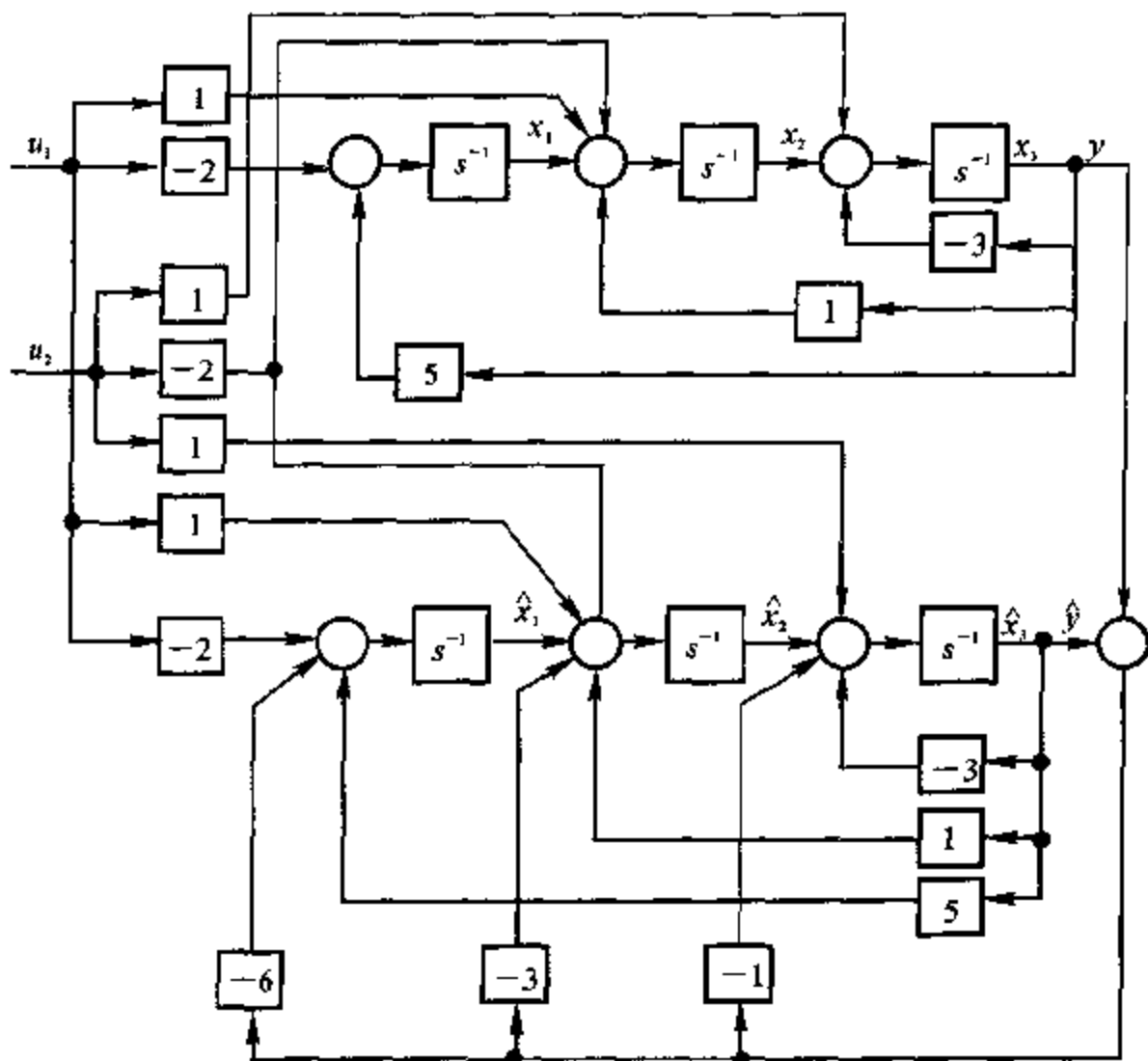


解得

$$s^3 + s^2 + 2s + 1$$

$$\begin{cases} h_0 = 6 \\ h_1 = 3 \\ h_2 = -2 \end{cases}$$

其状态变量图见图解 9.4.31。



图解 9.4.31

9.4.32 设系统传递函数为  $\frac{(s-1)(s+2)}{(s+1)(s-2)(s+3)}$ ，能否利用状态反馈将传递函数变成  $\frac{s-1}{(s+2)(s+3)}$ ？若有可能，求出状态反馈矩阵  $K$ ，并画出状态变量图。（提示：状态反馈不改变传递函数的零点）。

解 能。

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{(s-1)(s+2)}{(s+1)(s-2)(s+3)} = \frac{s^2+s-2}{s^3+2s^2-5s-6}$$

上式无零极点对消, 因此可控, 可任意配置极点。

用可控标准型实现:  $\dot{x} = Ax + Bu$ ,  $y = Cx$ 。其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & 5 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [-2 \quad 1 \quad 1]$$

为使传递函数变为  $\frac{s-1}{(s+2)(s+3)}$ , 需配置极点, 使得

$$D(s) = (s+2)^2(s+3) = s^3 - 7s^2 + 16s + 12$$

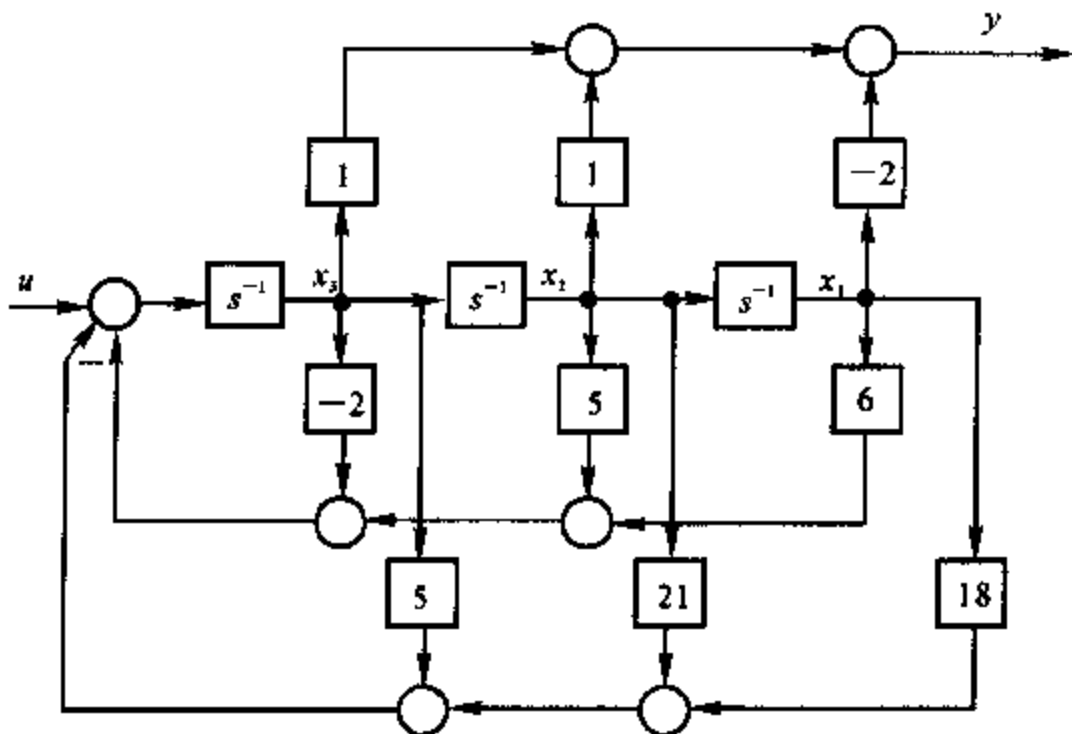
$$\text{令 } A - Bk = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6-k_1 & 5-k_2 & -2-k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -12 & -16 & -7 \end{bmatrix}$$

解得

$$\begin{cases} k_1 = 18 \\ k_2 = 21 \\ k_3 = 5 \end{cases}$$

配置极点后出现零极点对消, 系统不可观。但传递函数只描述外部特性, 故可达到目的。

其状态变量图见图解 9.4.32。



图解 9.4.32

9.4.33 已知系统动态方程各矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [-1 \quad 1 \quad 1]$$

试检查可观性,设计 $(n-p)$ 维观测器,并使所有极点配置在 $-4$ 。

解 检查可观性:

$$P_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 7 & -1 \end{bmatrix}$$

$\text{rank} P_o = 3 = n$ , 可观性。

设计  $n-q=3-1=2$  维降维观测器:

构造  $Q$  阵, 求  $Q^{-1}$ 。

$$Q = \begin{bmatrix} D \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

经  $Q^{-1}$  变换后系统方程为:

$$\dot{\bar{X}} = \bar{A}\bar{X} + \bar{B}u, \quad y = \bar{y} = \bar{C}\bar{X}$$

$$\text{其中: } \bar{A} = QAQ^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \vdots & 0 \\ 4 & -2 & \vdots & 1 \\ \dots & \dots & \vdots & \dots \\ 3 & -2 & \vdots & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = QB = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = CQ^{-1} = [0 \quad 0 \quad \vdots \quad 1]$$

即

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \\ \dot{\bar{x}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \vdots & 0 \\ 4 & -2 & \vdots & 1 \\ \dots & \dots & \vdots & \dots \\ 3 & -2 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$\bar{y} = [0 \quad 0 \quad \vdots \quad 1] \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix} = \bar{x}_3$$

降维观测器方程为:

$$\dot{\bar{w}} = (\bar{A}_{11} - H\bar{A}_{21})\bar{w} + (\bar{B}_1 - H\bar{B}_2)u + [(\bar{A}_{11} - H\bar{A}_{21})H + \bar{A}_{12} - H\bar{A}_{22}]\bar{y}$$

$$\bar{A}_{11} - H\bar{A}_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-3h_0 & 2+2h_0 \\ 4-3h_1 & -2+2h_1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{B}_1 - H\bar{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \end{bmatrix} \times 1 = \begin{bmatrix} -h_0 \\ -h_1 \end{bmatrix}$$

$$[(\bar{A}_{11} - H\bar{A}_{21})H + \bar{A}_{12} - H\bar{A}_{22}] = \begin{bmatrix} -3h_0^2 + 2h_0h_1 + 2h_1 \\ 2h_1^2 - 3h_0h_1 + 4h_0 - 3h_1 + 1 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\bar{w}} = \begin{bmatrix} 1-3h_0 & 2+2h_0 \\ 4-3h_1 & -2+2h_1 \end{bmatrix} \bar{w} + \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} -3h_0^2 + 2h_0h_1 + 2h_1 \\ 2h_1^2 - 3h_0h_1 + 4h_0 - 3h_1 + 1 \end{bmatrix} \bar{y}$$

由观测器特征方程, 令

$$|sI - (\bar{A} - H\bar{A}_{21})| = (s+4)^2$$

即

$$\begin{vmatrix} s-1+3h_0 & -2-2h_0 \\ -4+3h_1 & s+2-2h_1 \end{vmatrix} = s^2 + 8s + 16$$

解得

$$\begin{cases} h_0 = 5.4 \\ h_1 = 4.6 \end{cases}$$

所以

$$\dot{\bar{w}} = \begin{bmatrix} -15.2 & 12.8 \\ -9.8 & 7.2 \end{bmatrix} \bar{w} + \begin{bmatrix} -5.4 \\ -4.6 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} -28.6 \\ -23.4 \end{bmatrix} \bar{y}$$

$$\hat{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \hat{\bar{x}}_1 \\ \hat{\bar{x}}_2 \\ \dots \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \dots \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix}$$

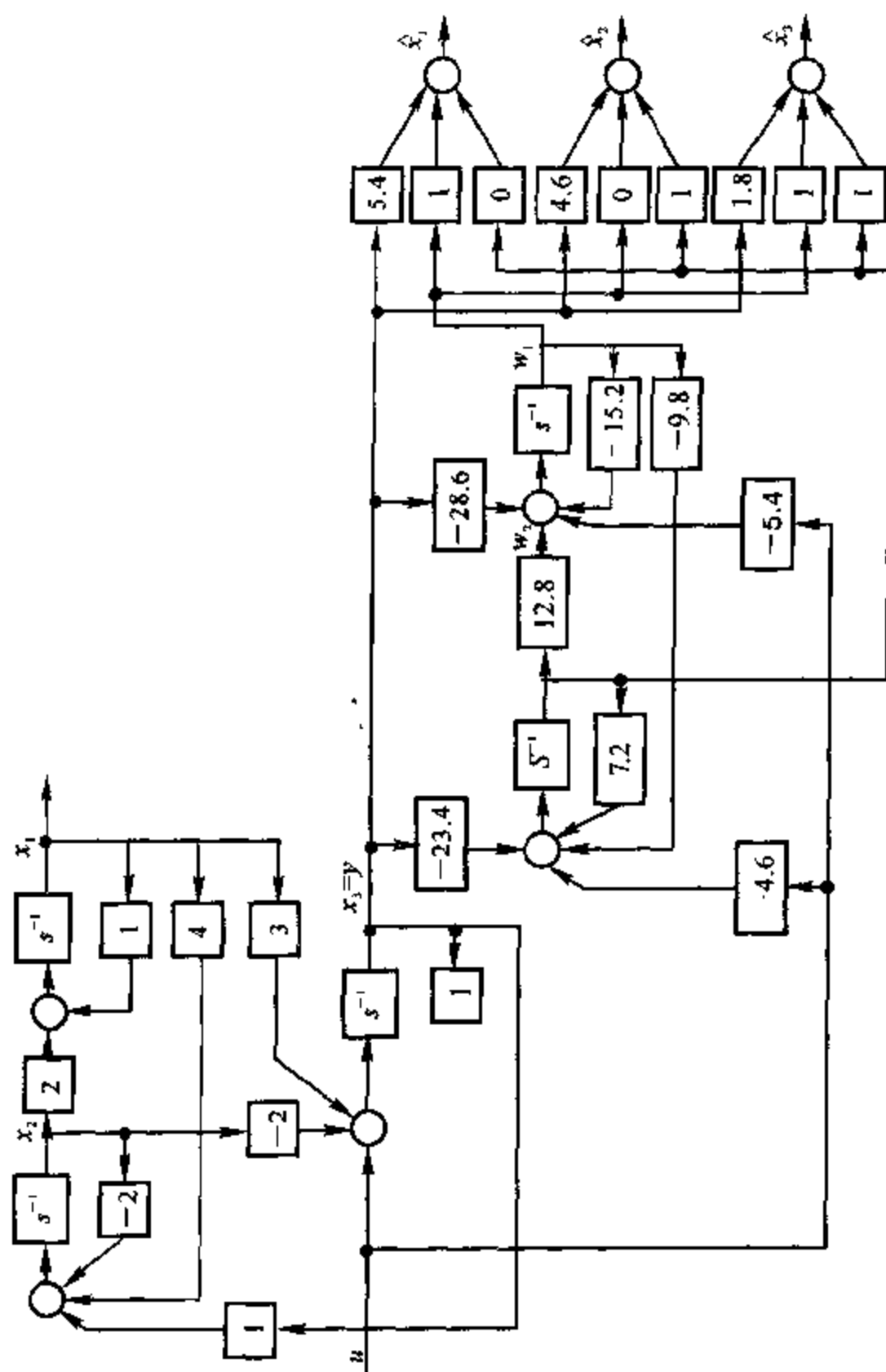
将  $\hat{\bar{x}}$  变换回原状态空间:

$$\hat{\bar{x}} = \begin{bmatrix} w_1 + 5.4\bar{y} \\ w_2 + 4.6\bar{y} \\ y \end{bmatrix}$$

$$\hat{x} = Q^{-1}\hat{\bar{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\bar{x}}_1 \\ \hat{\bar{x}}_2 \\ \hat{\bar{x}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 + 5.4\bar{y} \\ w_2 + 4.6\bar{y} \\ w_1 - w_2 + 1.8\bar{y} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \bar{y} = \bar{x}_3 \\ \begin{bmatrix} \hat{\bar{x}}_1 \\ \hat{\bar{x}}_2 \end{bmatrix} = w + H\bar{y} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5.4 \\ 4.6 \end{bmatrix} \bar{x}_3 = \begin{bmatrix} w_1 + 5.4\bar{x}_3 \\ w_2 + 4.6\bar{x}_3 \end{bmatrix} \end{cases}$$

其状态变量图见图 9.4.33。



图解 9.4.33

9.4.34 试用李雅普诺夫第二法判断下列线性系统平衡状态的稳定性。

$$(1) \dot{x}_1 = -x_1 + x_2, \dot{x}_2 = 2x_1 - 3x_2$$

$$(2) \dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = 2x_1 - x_2$$

解 (1) 平衡点:  $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$

构造  $V(x) = x_1^2 + x_2^2$ , 则

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = 2x_1(-x_1 + x_2) + 2x_2(2x_1 - 3x_2) = \\ &= -2x_1^2 + 6x_1x_2 - 6x_2^2 = [x_1 \quad x_2] \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

判定  $\dot{V}(x)$  性质:  $\begin{cases} -2 < 0 \\ \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 12 - 9 = 3 > 0 \end{cases}$

$\dot{V}(x)$  负定, 因此平衡状态是大范围一致渐近稳定的。

(2) 平衡点:  $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$

用特征值判据

$$|sI - A| = \begin{vmatrix} s & -1 \\ -2 & s+1 \end{vmatrix} = s^2 + s - 2 = (s-1)(s+2)$$

特征值为 -2, 1, 故系统不稳定。

令  $A^T P + PA = -Q = -I$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

解得

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$P_{11} = -\frac{3}{4} < 0, \quad \begin{vmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} < 0$$

所以  $P$  不定, 系统非渐近稳定, 用特征值判据可知, 系统不稳定。

9.4.35 已知系统状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

当  $Q=I$  时,  $P=?$  若选  $Q$  为正半定矩阵,  $Q=?$  对应  $P=?$  判断系统稳定性。

解 当  $Q=I$  时,  $A^T P + PA = -Q = -I$ 。令

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{12} & P_{22} & P_{23} \\ P_{13} & P_{23} & P_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{12} & P_{22} & P_{23} \\ P_{13} & P_{23} & P_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

解得

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{12} & P_{22} & P_{23} \\ P_{13} & P_{23} & P_{33} \end{bmatrix} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} -4 & 8 & -12 \\ 8 & 6 & -13 \\ -12 & -13 & 44 \end{bmatrix}$$

古氏行列式

$$-4 < 0$$

$$\begin{vmatrix} -4 & 8 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} = -24 - 64 = -88 < 0$$

$$\begin{vmatrix} -4 & 8 & -12 \\ 8 & 6 & -13 \\ -12 & -13 & 44 \end{vmatrix} = -1564 < 0$$

因此  $P$  不定。

选当  $Q$  为正半定矩阵时,

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

则  $V(X) = -X^T Q X = -x_2^2$ , 为负半定。

由等式  $A^T P + P A = -Q$  解得

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{12} & P_{22} & P_{23} \\ P_{13} & P_{23} & P_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

正半定。

判定系统稳定性:

$$|sI - A| = \begin{vmatrix} s-2 & -\frac{1}{2} & 3 \\ 0 & s+1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & s+1 \end{vmatrix} = (s+2)(s+1)^2$$

三个特征值分别为:  $-2, -1, -1$ 。因此系统不稳定。

**9.4.36** 设线性定常离散系统状态方程为

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{k}{2} & 0 \end{bmatrix} x(k), k > 0, \text{试求使系统渐近稳定的 } k \text{ 值范围。}$$

**解** 令  $\Phi^T P \Phi - P = -Q = -I$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{k}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{12} & P_{22} & P_{23} \\ P_{13} & P_{23} & P_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{k}{2} & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{12} & P_{22} & P_{23} \\ P_{13} & P_{23} & P_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$



解得

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{12} & P_{22} & P_{23} \\ P_{13} & P_{23} & P_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8+k^2}{4-k^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12}{4-k^2} \end{bmatrix}$$

若要满足题意,需令: $4 > k^2$ ,即

$$\begin{cases} k > 0 \\ 4 - k^2 > 0 \end{cases}$$

因此,渐近稳定的条件为: $0 < k < 2$ 。

## 第 10 章 动态系统的最优控制方法

### 10.1 重点内容提要

#### 10.1.1 基本概念

##### 1. 最优控制问题的提法

在满足系统方程

$$\dot{x}(t) = f[x(t), u(t), t], x(t_0) = x_0$$

的约束条件下, 在容许控制域  $\Omega$  中确定一个最优控制律  $u^*(t)$ , 使系统状态从已知初态  $x_0$  转移到要求的目标集

$$\phi[x(t_f), t_f] = 0$$

并使性能指标

$$J = \varphi[x(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} L[x(t), u(t), t]$$

达到极值。

##### 2. 性能指标的形式及意义

###### (1) 积分型性能指标:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} L[x(t), u(t), t] dt$$

表示在整个控制过程中, 系统的状态及控制应满足的要求。

###### (2) 末值型性能指标:

$$J = \varphi[x(t_f), t_f]$$

表示控制结束后, 系统末态应满足的要求。

###### (3) 复合型性能指标:

$$J = \varphi[x(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} L[x(t), u(t), t] dt$$

表示对整个控制过程和末态的要求。

### 3. 泛函及其变分

(1) 泛函 设对于自变量  $t$ , 存在一类函数  $\{x(t)\}$ , 如果对于每个函数  $x(t)$ , 有一个  $J$  值与之对应, 则变量  $J$  称为依赖于函数  $x(t)$  的泛函数, 简称泛函, 记作  $J[x(t)]$ 。

(2) 变分 设  $J[x(t)]$  是线性赋范空间  $R^n$  上的连续泛函, 若其增量可表示为

$$\Delta J[x(t)] = J[x + \delta x] - J[x] = L[x, \delta x] + r[x, \delta x]$$

式中,  $L[x, \delta x]$  是关于  $\delta x$  的线性连续泛函,  $r[x, \delta x]$  是关于  $\delta x$  的高阶无穷小, 则  $\delta J = L[x, \delta x]$  称为泛函  $J[x, \delta x]$  的变分。

### 4. 最小时间问题

一种最优控制问题, 其性能指标为

$$J = \int_0^{t_f} dt$$

### 5. 最小燃料问题

是性能指标为  $J = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n c_i |u_i| dt$ ,  $c_i > 0$  的最优控制问题。

### 6. 最小能量控制

要求在有限时间的控制过程中, 系统的能量消耗为最小。对应的性能指标

$$J = \int_{t_0}^{t_f} u^T(t) u(t) dt = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \sum_{j=1}^n u_j^2(t) \right\} dt$$

### 7. 线性调节器, 跟踪器问题

(1) 跟踪器问题: 对于线性时变系统

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(t_0) = x_0$$

$$y(t) = C(t)x(t)$$

要求确定最优控制, 使性能指标

$$J = \frac{1}{2} e^T(t_f) F e(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [e^T(t) Q(t) e(t) + u^T(t) R(t) u(t)] dt$$

极小。

式中:  $x(t) \in R^n$ ,  $u(t) \in R^m$ , 无约束,  $y(t) \in R^l$ ,  $0 < l \leq m \leq n$ ; 输出误差向量  $e(t) = z(t) - y(t)$ ;  $z(t) \in R^l$  为理想输出向量;  $A(t)$ ,  $B(t)$  和  $C(t)$  为适当维数的时变矩阵, 其各元连续且有界; 权阵  $F = F^T \geq 0$ ,  $Q(t) = Q^T(t) \geq 0$ ,  $R(t) = R^T(t) > 0$ ;  $t_0$  及  $t_f$  固定。

(2) 状态调节器问题:当上述跟踪器问题中的  $C(t) = I, z(t) = 0$  时,即变为状态调节器问题。此时  $e(t) = -y(t) = -x(t)$ , 且

$$J = \frac{1}{2} x^T(t_f) F x(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [x^T(t) Q(t) x(t) + u^T(t) R(t) u(t)] dt$$

即要求当系统受扰偏离原零平衡状态时产生一控制向量,使系统状态  $x(t)$  恢复到原平衡状态附近,并使指标  $J$  极小。

(3) 输出调节器问题:若跟踪器问题中  $z(t) = 0$ , 则  $e(t) = -y(t)$ , 且

$$J = \frac{1}{2} y^T(t_f) F y(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [y^T(t) Q(t) y(t) + u^T(t) R(t) u(t)] dt$$

此即为输出调节器问题。它要求在系统偏离原输出平衡状态时产生一控制量,使系统输出  $y(t)$  保持在原零平衡状态附近,并使性能指标  $J$  极小。

## 8. 动态规划

动态规划实际上是多级决策问题。

### 10.1.2 基本原理

#### 1. 泛函极值的必要条件

若可微泛函  $J[x(t)]$  在  $x_0(t)$  上达到极大(小)值,则在  $x = x_0$  上有

$$\delta J[x, \delta x] = 0$$

#### 2. 欧拉方程

设有泛函极值问题

$$\min_{x(t)} J[x(t)] = \int_{t_0}^{t_f} L[x, \dot{x}, t] dt$$

式中,  $L(x, \dot{x}, t)$  及  $x(t)$  在  $[t_0, t_f]$  上连续可微,  $t_0$  及  $t_f$  给定。已知  $x(t_0) = x_0$ ,  $x(t_f) = x_f$ ,  $x(t) \in R^n$ , 则极值轨线  $x^*(t)$  满足如下欧拉方程

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0$$

及横截条件

$$\left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right)^T \Big|_{t_f} \delta x(t_f) - \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right)^T \Big|_{t_0} \delta x(t_0) = 0$$

在求解欧拉方程时,需由横截条件确定两点边界值。表 10.1.1 给出不同边界情况下的横截条件。

表 10.1.1 不同边界情况下的横截条件

$J[x] = \int_{t_0}^{t_f} L(x, \dot{x}, t) dt$		横截条件与边界条件
$t_f$ 固定 ( $x(t_0)$ 固定)	$x(t_f)$ 固定	$x(t_0) = x_0, \quad x(t_f) = x_f$
	$x(t_f)$ 自由	$x(t_0) = x_0, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \Big _{t_f} = 0$
$t_f$ 固定 ( $x(t_0)$ 固定)	$x(t_f)$ 自由	$x(t_0) = x_0, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \Big _{t_f} = 0$ $\left[ L - \dot{x}^T \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right] \Big _{t_f} = 0$
	$x(t_f)$ 约束	$x(t_0) = x_0, \quad x(t_f) = c(t_f)$ $\left[ L + (\dot{c} - \dot{x})^T \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right] \Big _{t_f} = 0$

### 3. 最优控制的必要条件——极小值原理

表 10.1.2 给出连续系统末端自由, 固定或受约束等各种情况下, 极小值原理的必要条件。

应该指出, 在 10.1.1 基本概念中提到的最小时间问题, 最小燃料问题, 最小能量问题以及线性调节器、跟踪器问题实际上均是不同指标函数下极小值原理的具体应用。

表 10.1.2 连续系统极小值原理的必要条件

末端时刻	性能指标	末端状态	正则方程	极小值条件	边界条件与横截条件	H变化律
$t_f$ 自由	$J = \phi[x(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} L(x, u, t) dt$	末端约束	$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda}$ $\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x}$	$H^* = \min_{u \in \Omega} H$	$x(t_0) = x_0, \phi[x(t_f), t_f] = 0$	$H^*(t_f^*) = -[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \gamma^T \frac{\partial \phi}{\partial x}]_{t_f}$
		末端自由	其中 $H = L + \lambda^T f$		$x(t_0) = x_0$ $\lambda(t_f) = \frac{\partial \phi}{\partial x(t_f)}$	$H^*(t_f^*) = -\frac{\partial \phi}{\partial t_f}$
		末端约束			$x(t_0) = x_0, \phi[x(t_f), t_f] = 0$ $\lambda(t_f) = \frac{\partial \phi}{\partial x(t_f)} \gamma$	$H^*(t_f^*) = -\gamma^T \frac{\partial \phi}{\partial t_f}$
	$J = \int_{t_0}^{t_f} L(x, u, t) dt$	末端自由			$x(t_0) = x_0, \lambda(t_f) = 0$	$H^*(t_f^*) = 0$
		末端固定			$x(t_0) = x_0, x(t_f) = x_f$	$H^*(t_f^*) = 0$
		末端约束			$x(t_0) = x_0, \phi[x(t_f), t_f] = 0$ $\lambda(t_f) = [\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \gamma^T]_{t_f}$ $x(t_0) = x_0$	$H^*(t_f^*) = -[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \gamma^T \frac{\partial \phi}{\partial x}]_{t_f}$
$t_f$ 自由	$J = \phi[x(t_f), t_f]$	末端自由	其中 $H = L + \lambda^T f$		$\lambda(t_f) = \frac{\partial \phi}{\partial x(t_f)}$	$H^*(t_f^*) = -\frac{\partial \phi}{\partial t_f}$

续表

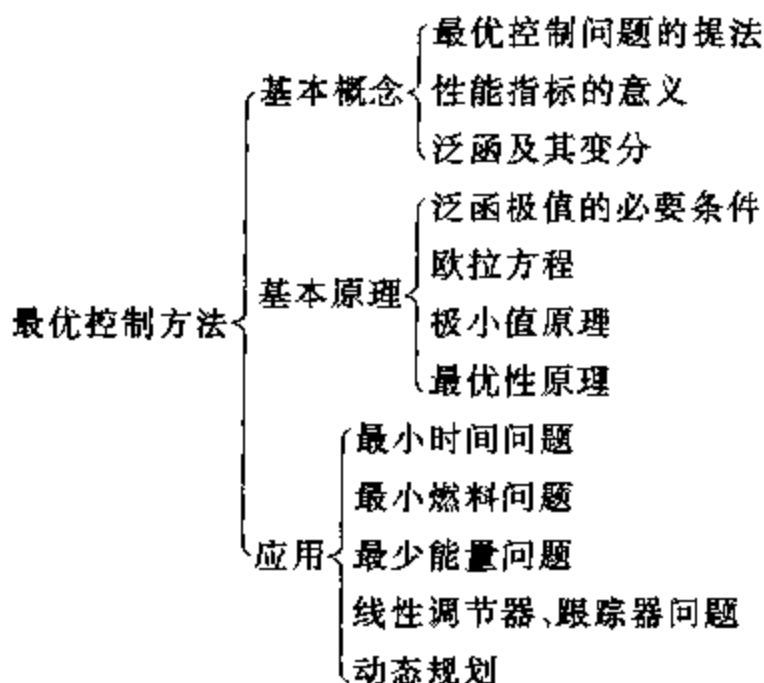
末端时刻	性能指标	末端状态	正则方程	极小值条件	边界条件与横截条件	H变化律
$t_f$ 固定	$J = \varphi[x(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} L(x, u, t) dt$	末端约束	$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda}$ $\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x}$	$H^* = \min_{u \in \Omega} H$	$x(t_0) = x_0, \varphi[x(t_f), t_f] = 0$ $\lambda(t_f) = [\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi^T}{\partial x} \gamma]_{t_f}$	
		末端自由	其中 $H = L + \lambda^T f$		$x(t_0) = x_0$ $\lambda(t_f) = \frac{\partial \varphi}{\partial x(t_f)}$	
		末端固定			$x(t_0) = x_0, \varphi[x(t_f), t_f] = 0$ $\lambda(t_f) = \frac{\partial \psi^T}{\partial x(t_f)}$	
	$J = \varphi[x(t_f), t_f]$	末端约束	$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda}$ $\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x}$		$x(t_0) = x_0, \lambda(t_f) = x_f$ $\lambda(t_f) = [\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi^T}{\partial x} \gamma]_{t_f}$	
		末端自由	其中 $H = L + \lambda^T f$		$x(t_0) = x_0$ $\lambda(t_f) = \frac{\partial \varphi}{\partial x(t_f)}$	
		末端固定			$x(t_0) = x_0, \lambda(t_f) = x_f$ $\lambda(t_f) = [\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi^T}{\partial x} \gamma]_{t_f}$	

注:对于定常系统,当 $t_f$ 固定时,最优解的必要条件同本表中 $t_f$ 的固定情况;当 $t_f$ 自由时,除H变化律均为 $H^*(t_f^*) = 0$ 外,其余同本表中 $t_f$ 的自由情况。

## 4. 最优化原理

若有一个初态为  $x(0)$  的  $N$  级决策过程, 其最优策略为  $\{u(0), u(1), \dots, u(N-1)\}$ , 那么, 对于以  $x(1)$  为初态的  $N-1$  级决策过程来说, 决策集合  $\{u(1), u(2), \dots, u(N-1)\}$  必定是最优的。

## 10.2 知识结构图



## 10.3 考点及典型题选解

本章主要考点有求解泛函极值问题, 利用变分法和极小值原理求解控制不受约束或控制受约束的最优控制问题, 以及利用动态规划法求解连续或离散系统的最优控制问题等。

## 10.3.1 典型题

## 1. 求性能指标

$$J = \int_0^1 \left( \frac{1}{2} \dot{x}^2 + x\dot{x} + \dot{x} + x \right) dt$$

的极值曲线, 已知边界条件  $x(0) = \frac{1}{2}$ ,  $x(1)$  自由。



## 2. 已知被控系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 2x_2, & x_1(0) &= 1 \\ \dot{x}_2 &= u, & x_2(0) &= 0\end{aligned}$$

性能指标为

$$J = t_f + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} u^2 dt$$

由上述初态转移到  $x_1(t_f) = 0, x_2(t_f)$  任意,  $t_f$  不固定。求最优控制, 最优轨线和最优终时  $t_f^*$ 。

## 3. 已知被控系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, & x_1(0) &= 1 \\ \dot{x}_2 &= u, & x_2(0) &= 1\end{aligned}$$

求最优控制  $u^*(t)$ , 使下列性能指标分别最小。

$$(a) J = \int_0^1 u^2 dt, \quad x_1(1) = 0$$

$$(b) J = \int_0^{t_f} u^2 dt, \quad x_1(t_f) = c(t_f) = -t_f^2(t_f \text{ 自由})$$

$$(c) J = \int_0^{t_f} u^2 dt, \quad x_1(t_f) = c(t_f) = -t_f^2, x_2(t_f) = 0 \quad (t_f \text{ 固定})$$

## 4. 控制系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= u_1, & x_1(0) &= 0, x_1(1) = 1 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + u_2, & x_2(0) &= 0, x_2(1) = 1\end{aligned}$$

其中  $u_1$  无约束,  $u_2 \leq \frac{1}{4}$ , 求最优控制  $u_1^*, u_2^*$  和最优轨线  $x_1^*(t), x_2^*(t)$  使系统从  $t=0$  的初始状态转移到  $t=1$  的终态, 并使性能指标

$$J = \int_0^1 (x_1 + u_1^2 + u_2^2) dt$$

为最小。

## 5. 被控系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x_1 + u \\ \dot{x}_2 &= x_1\end{aligned}$$

其中控制受约束  $|u| \leq 1$ , 求系统最快地由初态  $x(0) = x_0$  转移到原点的开关曲线。

## 6. 给定系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= u \\ \dot{x}_2 &= x\end{aligned}$$

其中  $|u(t)| \leq 1$ , 要求将系统从初态  $x_1(0) = x_2(0) = 2$  到  $t_f = 8$  时转移到状

态平面原点,并使性能指标  $J = \int_0^{t_f} |u(t)| dt$  最小的最优控制  $u^*(t)$ 。

### 7. 设某离散系统

$$x(k+1) = x(k) + 0.1[x^2(k) + u(k)], x(0) = 3$$

求使性能指标

$$J = \sum_{k=0}^1 |x(k) - 3u(k)|$$

极小的最优控制  $u^*(0), u^*(1)$  和最优轨线  $x^*(1), x^*(2)$ 。

### 8. 设有可控系统

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = u$$

性能指标为

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [x_1^2(t) + 2bx_1(t)x_2(t) + ax_2^2(t) + u^2(t)] dt$$

式中  $a - b^2 > 0$ , 求使  $J$  最小的最优控制  $u^*(t)$ 。

## 10.3.2 典型题解析

$$1. x^*(t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{2}t + \frac{1}{2}$$

提示:由  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) = 0$ , 得  $\ddot{x} = 1$ 。故

$$x = \frac{1}{2}t^2 + c_1 t + c_2$$

由边界条件  $x(0) = \frac{1}{2}$ , 得  $c_2 = \frac{1}{2}$

由于  $t_f$  固定,  $x(t_f)$  自由, 故有  $\left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \right)_{t=t_f} = 0$  确定  $c_1 = -\frac{3}{2}$

$$2. u^*(t) = 1.373t - 1.414$$

$$x_1^*(t) = 0.458t^3 - 1.414t^2 + 1$$

$$x_2^*(t) = 0.687t^2 - 1.414t$$

$$t_f^* = 1.03$$

提示:取 Hamilton 函数  $H = \frac{1}{2}u^2 + 2\lambda_1 x_2 + \lambda_2 u$

由协态方程  $\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x}$ , 有

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0 \\ \dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = 0 \end{cases}$$

得  $\lambda_1 = c_1, \quad \lambda_2 = -2c_1 t + c_2$

由  $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$ , 得  $u + \lambda_2 = 0$ , 即

$$u = +2c_1 t - c_2$$

代入状态方程并积分得

$$x_2(t) = c_1 t^2 - c_2 t + c_3$$

$$x_1(t) = \frac{2}{3}c_1 t^3 - c_2 t^2 + c_3 t + c_4$$

由初始条件  $x_1(0) = 1, x_2(0) = 0$  确定  $c_3 = 0, c_4 = 1$

由横截条件  $H(t_f) + \frac{\partial \varphi}{\partial t_f} + \left[ \frac{\partial \psi}{\partial t_f} \right] \cdot \gamma = 0$ , 得

$$\left( \frac{1}{2}u^2 + 2\lambda_1 x_2 + \lambda_2 u \right) \Big|_{t_f} + 1 = 0$$

$$\lambda_2(t_f) = \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \gamma_2 \right] \Big|_{t_f}$$

得  $\lambda_2(t_f) = 0$

确定出  $c_1 = 0.687, c_2 = 1.414, t_f = 1.03$

3. (a)  $u^*(t) = 6t - 6$

(b)  $u^*(t) = \frac{-2(2 + \sqrt{13})}{7 + \sqrt{13}}(1 + \sqrt{13} - 2t)$

(c)  $u^*(t) = \frac{6}{t_f^2}(t_f + 2t_f^2 + 2)t - \frac{2}{t_f^2}(3t_f^2 + 2t_f + 3)$

提示: 哈密尔顿函数  $H = u^2 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u$

由  $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$ , 有

$$u = -\frac{1}{2}\lambda_2 \quad (1)$$

由  $\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x}$ , 有

$$\dot{\lambda}_1 = 0 \quad (2)$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\lambda_1 \quad (3)$$

$$\text{状态方程} \quad \dot{x}_1 = x_2 \quad (4)$$

$$\dot{x}_2 = u \quad (5)$$

(a) 因  $x_2(1)$  自由,  $\lambda_2(1) = 0$

(b)  $t_f$  变化,  $x_1(t_f)$  受约束,  $x_2(t_f)$  自由

$$\text{由} \quad \begin{cases} \lambda(t_f) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi^T}{\partial x} \gamma = 0 \\ \left[ H + \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi^T}{\partial x} \gamma \right]_{t=t_f} = 0 \end{cases}$$

$$(c) \text{ 由题意, 此题目标集为 } \varphi(x(t_f), t_f) = \begin{bmatrix} x_1(t_f) + t_f^2 \\ x_2(t_f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

其他提示同(b)。

$$4. \quad u_1^*(t) = -3t + \frac{5}{2}, \quad u_2^* = \frac{1}{4}$$

$$x_1^*(t) = -\frac{3}{2}t^2 + \frac{5}{2}t, \quad x_2^*(t) = -\frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{4}t$$

提示:  $H = x_1 + u_1^2 + u_2^2 + \lambda_1 u_1 + \lambda_2 (x_1 + u_2) =$

$$x_1 + u_1^2 + \lambda_1 u_1 + \lambda_2 x_1 + \left(u_2 + \frac{1}{2}\lambda_2\right)^2 - \frac{1}{4}\lambda_2^2$$

因  $u_1$  无约束, 故  $\frac{\partial H}{\partial u_1} = 2u_1 + \lambda_1 = 0$ , 得  $u_1 = -\frac{\lambda_1}{2}$ 。

因  $u_2 \leq \frac{1}{4}$ , 使  $H$  最小的  $u_2$  的可能取值为

$$u_2(t) = \begin{cases} -\frac{\lambda_2}{2}, & \frac{1}{2}\lambda_2(t) \geq -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4}, & \frac{1}{2}\lambda_2(t) < -\frac{1}{4} \end{cases}$$

协态方程

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

得

$$\dot{\lambda}_1 = -(1 + \lambda_2), \quad \dot{\lambda}_2 = 0$$

积分得

$$\lambda_2 = c_2$$

$$\lambda_1 = -(1 + c_2)t + c_1$$

则

$$u_1 = -\frac{1}{2}[(1 + c_2)t - c_1]$$

$$\dot{x}_1 = u_1 = \frac{1 + c_2}{2}t - \frac{c_1}{2}$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1+c_2}{4}t^2 - \frac{c_1}{2}t + u_2$$

由初始条件确定常数  $c_1, c_2$  即可求出  $u_1^*, u_2^*$  和  $x_1^*, x_2^*$

$$5. \gamma = \gamma_- \cup \gamma_+$$

$$\gamma_- = \{(x_1, x_2) \mid x_2 = -x_1 + \ln(1+x_1), x_1 > 0\}$$

$$\gamma_+ = \{(x_1, x_2) \mid x_2 = -x_1 + \ln(1-x_1), x_1 < 0\}$$

提示:  $H = 1 + \lambda_1(-x_1 + u) + \lambda_2 x_1$

由  $\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x}$ , 有  $\dot{\lambda}_1 = \lambda_1 - \lambda_2, \dot{\lambda}_2 = 0$ . 则

$$\lambda_2(t) = c_2, \lambda_1(t) = c_1 e^t + c_2$$

$$u^*(t) = \begin{cases} 1, & \lambda_1(t) < 0 \\ -1, & \lambda_1(t) > 0 \end{cases}$$

由  $\lambda_1(t)$  知,  $u(t)$  最多有一次切换, 令  $u = \Delta = \pm 1$

由状态方程和初始条件可得

$$x_2(t) = (x_{20} - \Delta + x_{10}) + (\Delta - x_{10})e^{-t} + \Delta t$$

$$x_1(t) = \Delta + (x_{10} - \Delta)e^{-t}$$

消去中间变量  $t$ , 有

$$x_2 = -x_1 - \Delta \ln |\Delta - x_1| + x_{10} + x_{20} + \Delta \ln |\Delta - x_{10}|$$

由此可确定  $\Delta = \pm 1$  时过原点的开关线  $\gamma_+ \cup \gamma_-$

$$6. u^* = (-1, 0, +1)$$

提示, 取哈密尔顿函数  $H = |u| + \lambda_1 u + \lambda_2 x_1$ .

由协态方程有

$$\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -\lambda_2, \quad \dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = 0$$

$$\text{故} \quad \lambda_1 = c_1 - c_2 t, \quad \lambda_2 = c_2$$

$$\text{故} \quad u^*(t) = \begin{cases} 0, & \text{当 } |\lambda_1| < 1 \\ -\text{sgn}\{\lambda_1(t)\}, & \text{当 } |\lambda_1| > 1 \end{cases}$$

因  $x_1(0) = x_2(0) = 2$ , 故  $u^* = (-1, 0, 1)$ , 设切换时间为  $t_1$  和  $t_2$ , 则

(1)  $0 \leq t \leq t_1$  时  $u^* = -1$ , 则  $\dot{x}_1 = -1, \dot{x}_2 = x_1$ , 初态

$$x_1(0) = x_{10}, \quad x_2(0) = x_{20}$$

$$\text{积分得} \quad x_1(t) = -t + x_{10}, \quad x_2(t) = -\frac{1}{2}t^2 + x_{10}t + x_{20}$$

(2)  $t_1 \leq t \leq t_2$  时,  $u^* = 0$ , 则  $\dot{x}_1 = 0, \dot{x}_2 = -x_1$ ,

此区间的初态为

$$x_1(t_1) = -t_1 + x_{10}, x_2(t_1) = -\frac{1}{2}t_1^2 + x_{10}t_1 + x_{20}$$

由状态方程和初值得

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_1(t_1) = -t_1 + x_{10} \\ x_2(t) &= x_1(t_1)(t-t_1) + x_2(t_1) = (-t_1 + x_{10})(t-t_1) - \\ &\quad \frac{1}{2}t_1^2 + x_{10}t + x_{20} \end{aligned}$$

(3)  $t_2 \leq t < t_f, u^* = +1$ , 则状态方程  $\dot{x}_1 = 1, \dot{x}_2 = x_1$ 。

初态  $x_1(t_2) = -t_1 + x_{10}$

$$x_2(t_2) = (-t_1 + x_{10})(t_2 - t_1) - \frac{1}{2}t_1^2 + x_{10}t_1 + x_{20}$$

由状态方程和初态, 得

$$\begin{aligned} x_1(t) &= (t - t_2) + x_1(t_2) = (t - t_2) + (-t_1 + x_{10}) \\ x_2(t) &= \frac{1}{2}(t - t_2)^2 + (-t_1 + x_{10})(t - t_2) - \frac{1}{2}t_1^2 + x_{10}t_1 + x_{20} \end{aligned}$$

代入终值条件  $x_1(t_f) = x_2(t_f) = 0$ , 可得

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{1}{2}[t_f + x_{10} - \sqrt{t_f^2 - x_{10}^2 - 2x_{10}t_f - 4x_{20}}] \\ t_2 &= \frac{1}{2}[t_f + x_{10} + \sqrt{t_f^2 - x_{10}^2 - 2x_{10}t_f - 4x_{20}}] \end{aligned}$$

代入已知条件  $t_f = 8, x_{10} = x_{20} = 2$ , 得

$$t_1 = 5 - \sqrt{5}, t_2 = 5 + \sqrt{5}$$

因此最优控制为

$$u^*(t) = \begin{cases} -1, & \text{当 } 0 \leq t < 5 - \sqrt{5} \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } 5 - \sqrt{5} \leq t < 5 + \sqrt{5} \text{ 时} \\ +1, & \text{当 } 5 + \sqrt{5} \leq t < 8 \text{ 时} \end{cases}$$

$$7. u^*(0) = 1, u^*(1) = \frac{4}{3}, x^*(1) = 4, x^*(2) = \frac{86}{15}$$

提示: 利用动态规划法求解

因  $J[x(2), 2] = 0$ ,

$$J[x(1), 1] = |x(1) - 3u(1)| + J[x(2), 2] = |x(1) - 3u(1)|$$

当  $u(1) = x(1)/3$  时,  $J[x(1), 1]$  最小, 值为零

$$J[x(0), 0] = |x(0) - 3u(0)| + 0$$

显然  $u(0) = x(0)/3 = 1$  时,  $J[x(0), 0]$  最小

由状态方程有  $x(1) = x(0) + 0.1[x^2(0) + u(0)] = 4$

则  $u(1) = \frac{1}{3}x(1) = \frac{4}{3}$ , 则得结果

$$8. u^*(t) = -x_1(t) - \sqrt{a+2}x_2(t)$$

提示: 由题知  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $Q = \begin{bmatrix} 1 & b \\ b & a \end{bmatrix} > 0$ ,  $R = 1$

最优控制

$$u^*(t) = -R^{-1}B^TKx(t)$$

其中  $K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix}$  是下列 Riccati 方程的正定解

$$A^TK + KA = KBB^TK + Q = 0$$

整理得

$$\begin{cases} k_{12}^2 = 1 \\ -k_{11} + k_{12}k_{22} - b = 0 \\ -2k_{12} + k_{22}^2 - a = 0 \end{cases}$$

解得  $k_{12} = \pm 1$ ,  $k_{11} = k_{12}k_{22} - b$ ,  $k_{22} = \pm \sqrt{a+2k_{12}}$

利用矩阵  $K$  的正定性可确定出  $k_{12} = 1$ , 则

$$k_{22} = \sqrt{a+2}, \quad k_{11} = \sqrt{a+2} - b.$$

因而最优控制  $u(t) = -x_1(t) - \sqrt{a+2}x_2(t)$ .

## 10.4 课后习题全解

10.4.1 求通过  $x(0) = 1, x(1) = 2$ , 使下列性能指标为极值的曲线:

$$J = \int_{t_0}^t (\dot{x}^2 + 1) dt$$

解 本题为两端固定的无约束泛函极值问题。

$$L = \dot{x}^2 + 1$$

由欧拉方程

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0 - \frac{d}{dt}(2\dot{x}) = 0$$

得

$$\ddot{x} = 0$$

故

$$x(t) = c_1 t + c_2$$

由边界条件  $x(0) = 1$  和  $x(1) = 2$  确定积分常数  $c_1$  和  $c_2$ , 得极值曲线

$$x^*(t) = t + 1$$

10.4.2 设  $\dot{x} = x(t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , 求从  $x(0) = 0$  到  $x(1) = 1$  间的最短曲线。

解 直角坐标系中, 弧线元长度为

$$ds = \sqrt{(dt)^2 + (dx)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2} dt = \sqrt{1 + \dot{x}^2} dt$$

曲线长度为

$$J = \int_{t_0}^{t_f} ds = \int_{t_0}^{t_f} \sqrt{1 + \dot{x}^2} dt$$

本例是求使  $J$  最小的曲线。

$$L = (1 + \dot{x}^2)^{\frac{1}{2}}$$

由欧拉方程

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0 - \frac{d}{dt} \frac{\dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}} = 0$$

则

$$\dot{x}^2 = \frac{c^2}{1 - c^2}$$

则

$$\dot{x} = \pm \sqrt{\frac{c^2}{1 - c^2}} = a$$

积分得

$$x(t) = at + b$$

由初始条件  $x(0) = 0$  和终止条件  $x(1) = 1$ , 得最短曲线为

$$x^*(t) = t$$

10.4.3 求性能指标

$$J = \int_0^1 (\dot{x}^2 + 1) dt$$

在边界条件  $x(0) = 0, x(1)$  是自由情况下的极值曲线。

解 本题为始端固定, 终端变化的无约束泛函极值问题。由题意

$$L = \dot{x}^2 + 1$$

同题 10.4.1, 得

$$x(t) = c_1 t + c_2$$

由  $x(0) = 0$ , 得  $c_2 = 0$ 。

由  $x(1)$  自由, 有横截条件

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \Big|_{t_f} = 2\dot{x} \Big|_{t_f} = 0$$

则

$$c_1 = 0$$



因而极值曲线为

$$x^*(t) = 0$$

#### 10.4.4 求性能指标

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 2x_1x_2) dt$$

在边界条件  $x_1(0) = x_2(0) = 0, x_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = x_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$  下的极值曲线。

解 由题意  $L = \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 2x_1x_2$

由欧拉方程

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial x_1} \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} \end{bmatrix} - \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_2 \\ 2x_1 \end{bmatrix} - \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} 2\dot{x}_1 \\ 2\dot{x}_2 \end{bmatrix} = 0$$

有

$$x_2 - \ddot{x}_1 = 0, x_1 - \ddot{x}_2 = 0$$

其解为

$$x_1(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 \cos t + c_4 \sin t$$

$$x_2(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} - c_3 \cos t - c_4 \sin t$$

代入边界条件,得

$$c_1 = \frac{1}{e^{\pi/2} - e^{-\pi/2}} = \frac{1}{2\sinh\left(\frac{\pi}{2}\right)}, \quad c_2 = -\frac{1}{2\sinh\left(\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$c_3 = c_4 = 0$$

故极值曲线为

$$x_1^*(t) = x_2^*(t) = \frac{\sinh t}{\sinh\left(\frac{\pi}{2}\right)}$$

#### 10.4.5 已知性能指标函数为

$$J = \int_0^1 [x^2(t) + tx(t)] dt$$

试求:

(1)  $\delta J$  的表达式;

(2) 当  $x(t) = t^2, \delta x = 0.1t$  和  $\delta x = 0.2t$  时的变分  $\delta J$  的值。

解  $\delta J = \int_0^1 \delta[x^2(t) + tx(t)] dt = \int_0^1 (2x\delta x + t\delta x) dt$

当  $x(t) = t^2, \delta x = 0.1t$  时

$$\delta J_1 = \int_0^1 (2t^2 \times 0.1t + t \times 0.1t) dt = \frac{1}{12}$$

当  $x(t) = t^2$ ,  $\delta x = 0.2t$  时

$$\delta J_2 = \int_0^1 (2t^2 \times 0.2t + t \times 0.2t) dt = \frac{1}{5}$$

10.4.6 试求下列性能指标的变分  $\delta J$

$$J = \int_{t_0}^{t_f} (t^2 + x^2 + \dot{x}^2) dt$$

解 
$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \delta(t^2 + x^2 + \dot{x}^2) dt = \int_{t_0}^{t_f} (2x\delta x + 2\dot{x}\delta\dot{x}) dt$$

10.4.7 已知性能指标为

$$J = \int_0^R \sqrt{1 + \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2} dt$$

求  $J$  在约束条件  $t^2 + x_1^2 = R^2$  和边界条件  $x_1(0) = -R$ ,  $x_2(0) = 0$ ;  $x_1(R) = 0$ ,  $x_2(R) = \pi$  下的极值。

解 本题为端点固定的有约束的泛函极值问题。

构造广义泛函

$$J_0 = \int_0^R [\sqrt{1 + \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2} + \lambda(t^2 + x_1^2 - R^2)] dt$$

拉格朗日函数为

$$L(x, \dot{x}, \lambda, t) = \sqrt{1 + \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2} + \lambda(t^2 + x_1^2 - R^2)$$

由欧拉方程

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = 2\lambda x_1 - \frac{d}{dt} \frac{2\dot{x}_1}{2\sqrt{1 + \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = 0 - \frac{d}{dt} \frac{2\dot{x}_2}{2\sqrt{1 + \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}} = 0 \quad (2)$$

$$\text{约束条件} \quad t^2 + x_1^2 = R^2 \quad (3)$$

$$\text{由式(2)得} \quad \dot{x}_2^2 = \frac{c_1}{1 - c_1} (1 + \dot{x}_1^2) = c_2 (1 + \dot{x}_1^2) \quad (4)$$

对式(3)求导,有

$$2x_1 \cdot \dot{x}_1 = -2t$$

则  $\dot{x}_1^2 = \frac{t^2}{R^2 - t^2}$  代入式(4)得

$$\dot{x}_2^2 = c_2 \left( \frac{R^2}{R^2 - t^2} \right)$$

积分得 
$$x_2 = c_3 \arcsin \frac{t}{R} + c_4$$

其中,  $c_3 = R\sqrt{c_2}$ , 代入边界条件, 得

$$c_3 = 2, \quad c_4 = 0$$

故 
$$x_2^*(t) = 2 \arcsin \frac{t}{R}$$

根据式(4) 和  $x_1$  边界条件, 有

$$x_1^*(t) = -\sqrt{R^2 - t^2}$$

将  $x_1^*(t), x_2^*(t)$  代入性能指标, 得

$$J^* = \int_0^R \left( 1 + \frac{t^2}{R^2 - t^2} + \frac{4}{R^2 - t^2} \right)^{\frac{1}{2}} dt = \frac{\pi}{2} \sqrt{R^2 + 4}$$

10.4.8 已知系统的状态方程为

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad \dot{x}_2(t) = u(t)$$

边界条件为  $x_1(0) = x_2(0) = 1, x_1(3) = x_2(3) = 0$ , 试求使性能指标

$$J = \int_0^3 \frac{1}{2} u^2(t) dt$$

取极小值的最优控制  $u^*(t)$  以及最优轨线  $x^*(t)$ 。

解 本题控制无约束, 采用变分法求解

构造哈密顿函数

$$H = \frac{1}{2} u^2 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u$$

协态方程

$$\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\lambda_1$$

有

$$\lambda_1(t) = c_1$$

$$\lambda_2(t) = -c_1 t + c_2$$

由极值条件

$$\frac{\partial H}{\partial u} = u + \lambda_2 = 0$$

有

$$u = -\lambda_2 = c_1 t - c_2$$

代入状态方程

$$\dot{x}_2 = u = c_1 t - c_2$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

积分得

$$x_2(t) = \frac{1}{2}c_1 t^2 - c_2 t + c_3$$

$$x_1(t) = \frac{1}{6}c_1 t^3 - \frac{1}{2}c_2 t^2 + c_3 t + c_4$$

由边界条件  $x_1(0) = x_2(0) = 1$  和  $x_1(3) = x_2(3) = 0$ , 确定各积分常数  $c_1, c_2, c_3$  和  $c_4$ , 则

最优控制 
$$u^*(t) = \frac{10}{9}t - 2$$

最优轨线 
$$x_1^*(t) = \frac{5}{27}t^3 - t^2 + t + 1$$

$$x_2^*(t) = \frac{5}{9}t^2 - 2t + 1$$

10.4.9 已知系统状态方程及初始条件为

$$\dot{x} = u, \quad x(0) = 1$$

试确定最优控制使下列性能指标取极小值。

$$J = \int_0^1 (x^2 + u^2) e^{2t} dt$$

解 本题控制无约束,  $t_f$  给定, 末端自由。构造哈密顿函数

$$H = (x^2 + u^2) e^{2t} + \lambda u$$

协态方程

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -2xe^{2t}$$

极值条件

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 2ue^{2t} + \lambda = 0$$

状态方程

$$\dot{x} = u$$

则有

$$\ddot{x} + 2\dot{x} - x = 0$$

解之, 得

$$x^*(t) = c_1 e^{-(1+\sqrt{2})t} + c_2 e^{-(1-\sqrt{2})t}$$

由边界条件  $x(0) = 1$  和横截条件  $\lambda(1) = \frac{\partial \varphi}{\partial x(t_f)} = 0$ , 得

$$c_1 = \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{2}+1)e^{-2\sqrt{2}}}, \quad c_2 = \frac{(\sqrt{2}+1)e^{-2\sqrt{2}}}{(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{2}+1)e^{-2\sqrt{2}}}$$

则最优控制

$$u^*(t) = \dot{x}^*(t) = \frac{-1}{(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{2}+1)} e^{2\sqrt{2}} [e^{-(1+\sqrt{2})t} - e^{-2\sqrt{2}} e^{-(1-\sqrt{2})t}] =$$

$$-1.7957(e^{2.4142t} - 0.0591e^{3.4142t})$$

#### 10.4.10 求使系统

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u$$

由初始状态  $x_1(0) = x_2(0) = 0$  出发, 在  $t_f = 1$  时转移到目标集  $x_1(1) + x_2(1) = 1$ , 并使性能指标

$$J = \frac{1}{2} \int_0^1 u^2(t) dt$$

为最小值的最优控制  $u^*(t)$  及相应的最优轨线  $x^*(t)$ 。

解 本题控制无约束,  $t_f$  固定, 末端约束。

根据题意

$$\varphi[x(t_f)] = 0,$$

$$\psi[x(t_f)] = x_1(1) + x_2(1) - 1$$

构造哈密顿函数

$$H = \frac{1}{2}u^2 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u$$

协态方程

$$\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0, \quad \text{则 } \lambda_1(t) = c_1$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\lambda_1, \quad \text{则 } \lambda_2(t) = -c_1 t + c_2$$

由极值条件

$$\frac{\partial H}{\partial u} = u + \lambda_2 = 0$$

则

$$u(t) = -\lambda_2 = c_1 t - c_2$$

由状态方程, 可得

$$x_2(t) = \frac{1}{2}c_1 t^2 - c_2 t + c_3$$

$$x_1(t) = \frac{1}{6}c_1 t^3 - \frac{1}{2}c_2 t + c_3 t + c_4$$

由初态  $x_1(0) = x_2(0) = 0$ , 得

$$c_3 = c_4 = 0$$

再由目标集条件  $x_1(1) + x_2(1) - 1 = 0$ , 有

$$4c_3 - 9c_2 = 6$$

根据横截条件  $\lambda_1(1) = \frac{\partial \psi}{\partial x_1(1)} \gamma$ ,  $\lambda_2(1) = \frac{\partial \psi}{\partial x_2(1)} \gamma = \gamma$ , 有

$$\lambda_1(1) = \lambda_2(1),$$

即

$$c_1 = \frac{1}{2}c_2$$

则

$$c_1 = -\frac{3}{7}, \quad c_2 = -\frac{6}{7}$$

因而, 最优解为

$$u^*(t) = -\frac{3}{7}(t-2)$$

$$x_1^*(t) = -\frac{1}{14}t^2(t-6)$$

$$x_2^*(t) = -\frac{3}{14}t(t-4)$$

#### 10.4.11 已知一阶系统

$$\dot{x}(t) = -x(t) + u(t), \quad x(0) = 3$$

(1) 试确定最优控制  $u^*(t)$ , 使系统在  $t_f = 2$  时转移到  $x(2) = 0$ , 并使性能泛函

$$J = \int_0^2 (1 + u^2) dt = \min$$

(2) 如果使系统转移到  $x(t_f) = 0$  的终端时间  $t_f$  自由, 问  $u^*(t)$  应如何确定?

解 (1) 构造哈密顿函数

$$H = 1 + u^2 + \lambda(-x + u)$$

协态方程

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = \lambda, \quad \text{则 } \lambda(t) = c_1 e^t \quad (1)$$

极值条件

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 2u + \lambda = 0, \quad \text{则 } u(t) = -\frac{1}{2}c_1 e^t \quad (2)$$

$$\text{则 } \dot{x} = -x - \frac{1}{2}c_1 e^t, \text{ 则 } x(t) = c_2 e^{-t} - \frac{1}{4}c_1 e^t \quad (3)$$

由边界条件  $x(0) = 3, x(2) = 0$  确定

$$c_1 = \frac{12}{e^4 - 1}, \quad c_2 = \frac{3e^4}{e^4 - 1}$$

因而,

$$u^*(t) = -\frac{6e^t}{e^4 - 1}$$

(2) 终端时间  $t_f$  自由, 前面式(1)~(3)仍成立, 积分常数  $c_1$  和  $c_2$  由初态  $x(0) = 3$ , 末态  $x(t_f) = 0$  和哈密顿函数末端变化律  $H(t_f) = -\frac{\partial \varphi}{\partial t_f} = 0$  确定, 有

$$c_1 = \sqrt{40} - 6, t_f = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{12}{c_1} + 1\right) = 1.818, \text{ 故}$$

$$u^*(t) = -\frac{1}{2}c_1 e^t = -0.1623e^t$$

**10.4.12** 设系统状态方程及初始条件为

$$\dot{x}(t) = u(t), \quad x(0) = 1$$

试确定最优控制  $u^*(t)$ , 使性能指标

$$J = t_f + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} u^2 dt$$

为极小, 其中终端时间  $t_f$  未定,  $x(t_f) = 0$ 。

**解** 控制无约束,  $t_f$  自由, 末端固定

构造哈密顿函数

$$H = \frac{1}{2}u^2 + \lambda u$$

协态方程

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0, \quad \text{则 } \lambda(t) = c_1$$

极值条件

$$\frac{\partial H}{\partial u} = u + \lambda = 0, \quad \text{则 } u(t) = -\lambda = -c_1$$

由状态方程  $\dot{x} = u$ , 则

$$x(t) = -c_1 t + c_2$$

由初态  $x(0) = 1$ , 得  $c_2 = 1$

$t_f$  自由, 末端  $H$  变化率为

$$H(t_f) = -\frac{\partial \varphi}{\partial t_f} = -1,$$

即 
$$\frac{1}{2}u^2(t_f) + \lambda(t_f)u(t_f) = -1$$

则 
$$c_1 = \sqrt{2}$$

则最优控制  $u^*(t) = -\sqrt{2}$

10.1.13 设二次积分模型为

$$\dot{\theta}(t) = \omega(t), \quad \dot{\omega}(t) = u(t)$$

性能指标为

$$J = \frac{1}{2} \int_0^1 u^2(t) dt$$

已知  $\theta(0) = \omega(0) = 1, \theta(1) = 0, \omega(1)$  自由, 试求最优控制  $u^*(t)$  和最优轨线  $\theta^*(t), \omega^*(t)$ 。

解 构造哈密顿函数

$$H = \frac{1}{2}u^2 - \lambda_1\omega - \lambda_2 u$$

协态方程

$$\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0, \quad \text{则 } \lambda_1(t) = c_1$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial \omega} = -\lambda_1, \quad \text{则 } \lambda_2(t) = -c_1 t + c_2$$

极值条件

$$\frac{\partial H}{\partial u} = u + \lambda_2 = 0, \quad \text{则 } u(t) = -\lambda_2(t) = c_1 t - c_2$$

由状态方程得

$$\omega(t) = \frac{1}{2}c_1 t^2 - c_2 t + c_3$$

$$\theta(t) = \frac{1}{6}c_1 t^3 - \frac{1}{2}c_2 t^2 + c_3 t + c_4$$

由初始  $\omega(0) = \theta(0) = 1$ , 终态  $\theta(1) = 0$  及  $\omega(1)$  自由时的横截条件

$$\lambda_2(t_f) = \frac{\partial \varphi}{\partial \omega(t_f)} = 0, \quad \text{得}$$

$$c_1 = c_2 = 6, \quad c_3 = c_4 = 1$$

则最优控制

$$u^*(t) = 6t - 6$$

最优轨线

$$\theta^*(t) = t^3 - 3t^2 + t + 1$$

$$\omega^*(t) = 3t^2 - 6t + 1$$



10.4.14 设系统状态方程及初始条件为

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad x_1(0) = 2$$

$$\dot{x}_2(t) = u(t), \quad x_2(0) = 1$$

性能指标为

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} u^2 dt$$

要求达到  $x(t_f) = 0$ , 试求:

(1)  $t_f = 5$  时的最优控制  $u^*(t)$ ;

(2)  $t_f$  自由时的最优控制  $u^*(t)$ 。

解 构造哈密顿函数

$$H = \frac{1}{2} u^2 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u$$

协态方程

$$\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0, \quad \text{则 } \lambda_1(t) = c_1$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\lambda_1, \quad \text{则 } \lambda_2(t) = -c_1 t + c_2$$

极值条件

$$\frac{\partial H}{\partial u} = u + \lambda_2 = 0, \quad \text{则 } u(t) = -\lambda_2(t) = c_1 t - c_2$$

代入状态方程得

$$\dot{x}_2(t) = \frac{1}{2} c_1 t^2 - c_2 t + c_3$$

$$\dot{x}_1(t) = \frac{1}{6} c_1 t^3 - \frac{1}{2} c_2 t^2 + c_3 t + c_4$$

由初始条件  $x_1(0) = 2, x_2(0) = 1$  得

$$c_3 = 1, \quad c_4 = 2$$

(1)  $t_f = 5$  固定, 由终态  $x_1(5) = x_2(5) = 0$ , 得

$$c_1 = 0.432, \quad c_2 = 1.28$$

因而最优控制

$$u^*(t) = 0.432t - 1.28$$

(2)  $t_f$  自由, 末端  $H$  变化律为

$$H(t_f) = -\frac{\partial \varphi}{\partial t_f} = 0$$

$$\text{即} \quad \frac{1}{2}u^2(t_f) + \lambda_1(t_f)x_2(t_f) + \lambda_2(t_f)u(t_f) = 0$$

$$\text{有} \quad c_1 = c_2^2 \quad (1)$$

并且  $x(t_f) = 0$ , 有

$$\frac{1}{2}c_1 t_f^2 - c_2 t_f + c_3 = 0 \quad (2)$$

$$\frac{1}{6}c_1 t_f^3 - \frac{1}{2}c_2 t_f^2 + c_3 t_f + c_4 = 0 \quad (3)$$

由式(1),(2)得

$$\frac{1}{2}c_2^2 t_f^2 - c_2 t_f + 1 = 0$$

可知  $t_f$  无实数解, 因而无最优解。

#### 10.4.15 设一阶系统方程

$$\dot{x}(t) = u(t), \quad x(0) = 1$$

性能指标

$$J = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 + u^2) dt$$

已知  $x(1) = 0$ , 某工程师认为从工程观点出发可取最优控制函数  $u^*(t) = -1$ , 试分析他的意见是否正确, 并说明理由。

解 他的意见不正确, 原因如下:

构造哈密顿函数

$$H = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}u^2 + \lambda u$$

协态方程

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -x$$

极值条件

$$\frac{\partial H}{\partial u} = u + \lambda = 0, \text{ 则}$$

$$u = -\lambda$$

状态方程

$$\dot{x} = u$$

则有  $\ddot{x} = x$ ,

解之得

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$$

由边界条件  $x(0) = 1$  和  $x(1) = 0$  确定

$$c_1 = \frac{1}{1-e^2}, c_2 = \frac{-e^2}{1-e^2}$$

则

$$x^*(t) = \frac{1}{1-e^2}e^t - \frac{e^2}{1-e^2}e^{-t}$$

$$u^*(t) = \dot{x}^*(t) = \frac{e^t}{1-e^2} + \frac{e^2}{1-e^2}e^{-t}$$

#### 10.4.16 给定二阶系统

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) + \frac{1}{4}, \quad x_1(0) = -\frac{1}{4}$$

$$\dot{x}_2(t) = u(t), \quad x_2(0) = -\frac{1}{4}$$

控制约束为  $|u(t)| \leq \frac{1}{2}$ , 要求最优控制  $u^*(t)$ , 使系统在  $t = t_f$  时转移到  $x(t_f) = 0$ , 并使

$$J = \int_0^{t_f} u^2(t) dt = \min$$

其中  $t_f$  自由。

**解** 本题控制受约束,  $t_f$  自由, 末端固定。

构造哈密顿函数

$$H = u^2 + \lambda_1(x_2 + \frac{1}{4}) + \lambda_2 u = (u + \frac{1}{2}\lambda_2)^2 - \frac{1}{4}\lambda_2^2 + \lambda_1(x_2 + \frac{1}{4})$$

协态方程

$$\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0, \quad \text{则 } \lambda_1(t) = c_1$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\lambda_1, \quad \text{则 } \lambda_2(t) = -c_1 t + c_2$$

极值条件  $H(x^*, u^*, \lambda) = \min_{u \in \Omega} H(x^*, u, \lambda)$ , 得

$$u^* = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \lambda_2(t) < -1 \\ -\frac{1}{2}\lambda_2(t), & |\lambda_2(t)| \leq 1 \\ -\frac{1}{2}, & \lambda_2(t) > 1 \end{cases}$$

试取  $u = \frac{1}{2}(c_1 t - c_2)$ , 由状态方程和初始条件解得

$$x_2(t) = \frac{1}{4}c_1 t^2 - \frac{1}{2}c_2 t - \frac{1}{4}$$

$$x_1(t) = \frac{1}{12}c_1 t^3 - \frac{1}{4}c_2 t^2 - \frac{1}{4}$$

由末态  $x_1(t_f) = x_2(t_f) = 0$  有

$$\frac{1}{12}c_1 t_f^3 - \frac{1}{4}c_2 t_f^2 - \frac{1}{4} = 0$$

$$\frac{1}{4}c_1 t_f^2 - \frac{1}{2}c_2 t_f - \frac{1}{4} = 0$$

又  $t_f$  自由, 末端  $H$  变化率

$$H(t_f) = -\frac{\partial \varphi}{\partial t_f} = 0$$

即 
$$-\frac{1}{4}(c_1 t_f - c_2)^2 + c_1 \left( \frac{1}{4}c_1 t_f^2 - \frac{1}{2}c_2 t_f \right) = 0$$

得 
$$c_2 = 0, \quad c_1 = \frac{1}{9}, \quad t_f = 3$$

最优控制为 
$$u^*(t) = \frac{t}{18}$$

验证: 在  $0 \sim t_f$  区间内,  $u^*(t) = \frac{t}{18} < \frac{1}{2}$  满足约束条件。

$$J^* = \int_0^3 \frac{t^2}{18^2} dt = \frac{1}{36} \approx 0.0278$$

10.4.17 设一阶系统方程为

$$\dot{x}(t) = x(t) - u(t), x(0) = 5$$

控制约束  $0.5 \leq u(t) \leq 1$ , 性能指标为

$$J = \int_0^1 (x + u) dt$$

终端状态自由, 试求  $u^*(t)$ ,  $x^*(t)$  和  $J^*$ 。

解 本题是控制受约束,  $t_f$  固定, 末端自由的最优控制问题。

哈密顿函数

$$H = x + u + \lambda(x - u) = x + \lambda x + u(1 - \lambda)$$

协态方程 
$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\lambda - 1$$

则 
$$\lambda(t) = ce^{-t} - 1$$

由极值条件 
$$u^*(t) = \begin{cases} 1, & \lambda > 1 \\ 0.5, & \lambda < 1 \end{cases}$$

由横截条件  $\lambda(1) = \frac{\partial \varphi}{\partial x(t_f)} = 0$ , 得  $c = e$ , 故

$$\lambda(t) = e^{1-t} - 1$$

当  $\lambda(t_s) = 1$  时,  $u^*(t)$  产生切换, 切换时间

$$t_s = 1 - \ln 2 = 0.307$$

故最优控制

$$u^*(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 0.307 \\ 0.5, & 0.307 \leq t < 1 \end{cases}$$

将  $u^*(t)$  代入状态方程

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} x(t) - 1, & 0 \leq t < 0.307 \\ x(t) - 0.5, & 0.307 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{解得 } x^*(t) = \begin{cases} c_1 e^t + 1, & 0 \leq t < 0.307 \\ c_2 e^t + 0.5, & 0.307 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

由  $x(0) = 5$ , 得  $c_1 = 4$ , 则

$$x^*(t) = 4e^t + 1$$

当  $t = t_s$  时,  $x^*(t_s) = 4e^{0.307} + 1 = 6.44$  应为  $0.307 \leq t \leq 1$  的  $x(t)$  的初态, 则

$$\begin{aligned} 6.44 &= c_2 e^{0.307} + 0.5 \\ c_2 &= 4.37 \end{aligned}$$

因而最优轨线为

$$x^*(t) = \begin{cases} 4e^t + 1, & 0 \leq t < 0.307 \\ 4.37e^t + 0.5, & 0.307 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{则 } J^* = \int_0^{0.307} (u^* + x^*) dt + \int_{0.307}^1 (u^* + x^*) dt = 8.683$$

#### 10.4.18 设二阶系统

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -x_1(t) + u(t), & x_1(0) &= 1 \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t), & x_2(0) &= 0 \end{aligned}$$

控制约束  $|u(t)| \leq 1$ , 当系统终端自由时, 求最优控制  $u^*(t)$ , 使性能指标

$$J = 2x_1(1) + x_2(1)$$

取极小值, 并求最优轨线  $x^*(t)$ 。

**解** 本题是定常系统、末值型性能指标,  $t_f$  固定, 末端自由, 控制受约束的最优控制问题。由题意

$$\varphi[x(t_f)] = 2x_1(1) + x_2(1)$$

构造哈密顿函数

$$H = \lambda_1(-x_1 + u) + \lambda_2 x_1$$

协态方程  $\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = \lambda_1 - \lambda_2$

$$\dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = 0$$

则  $\lambda_2(t) = c_2, \quad \lambda_1(t) = c_1 e^t + c_2$

由横截条件  $\lambda_1(1) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1(1)} = 2, \quad \lambda_2(1) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2(1)} = 1$ , 得

$$c_1 = e^{-1}, \quad c_2 = 1$$

故  $\lambda_1(t) = e^{t-1} + 1, \quad \lambda_2(t) = 1$

由极值条件

$$u^*(t) = -\operatorname{sgn}(\lambda_1) = \begin{cases} -1, & \lambda_1 > 0 \\ 1, & \lambda_1 < 0 \end{cases}$$

因为  $\lambda_1(t) = e^{t-1} + 1 > 0$ , 故最优控制

$$u^*(t) = -1 \quad (0 \leq t < 1)$$

代入状态方程

$$\dot{x}_1 = -x_1 - 1, \quad \text{则 } x_1(t) = c_3 e^{-t} - 1$$

$$\dot{x}_2 = x_1, \quad x_2(t) = -c_3 e^{-t} - t + c_4$$

由初态  $x_1(0) = 1, x_2(0) = 0$ , 确定  $c_3 = 2, c_4 = 2$

则最优轨迹

$$x_1^*(t) = 2e^{-t} - 1$$

$$x_2^*(t) = -2e^{-t} - t + 2$$

#### 10.4.19 已知二阶系统

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad \dot{x}_2(t) = u(t)$$

控制约束  $|u(t)| \leq 1$ , 试确定最小时间控制  $u^*(t)$ , 使系统由任意初态最快地转移到终端状态  $x_1(t_f) = 2, x_2(t_f) = 1$ , 要求写出开关曲线方程  $\gamma$  并画出  $\gamma$  曲线的图形。

解 本题是最小时间问题。

哈密顿函数

$$H = 1 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u$$

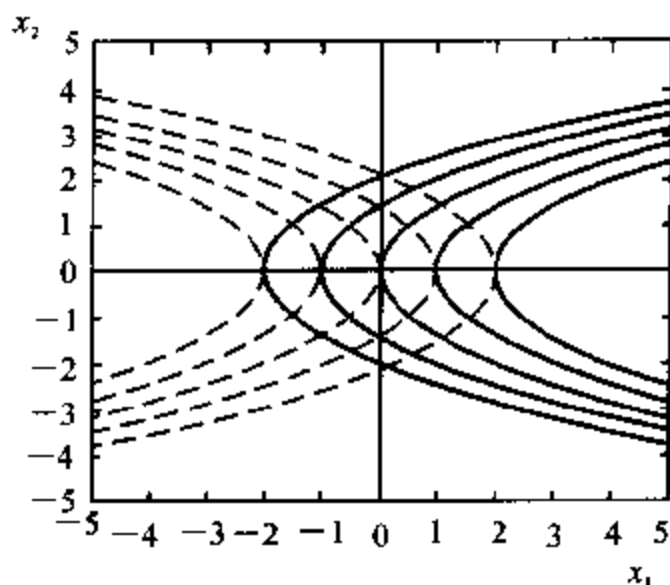
协态方程  $\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0, \lambda_1(t) = c_1$

$$\dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\lambda_1, \quad \lambda_2(t) = -c_1 t + c_2$$

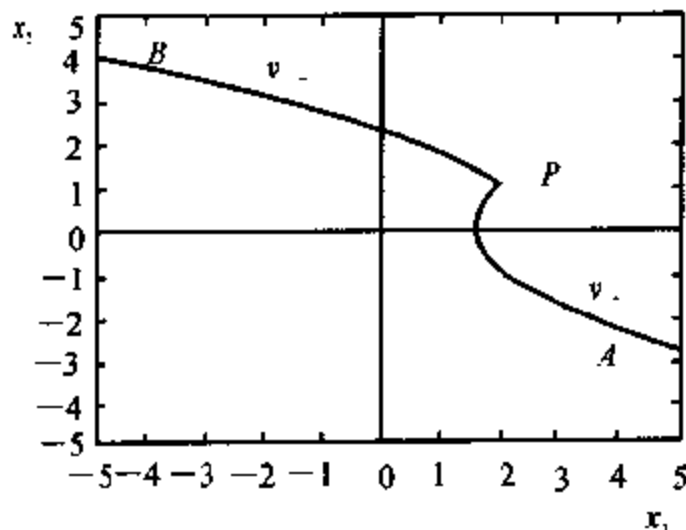
极值条件  $u^*(t) = -\operatorname{sgn}\{\lambda_2(t)\} = \begin{cases} 1, & \lambda_2 < 0 \\ -1, & \lambda_2 > 0 \end{cases}$

若令  $u^*(t) = 1$ , 状态方程为

$$\dot{x}_2(t) = 1, \quad \text{则 } x_2(t) = t + x_{20}$$



(a) 最优轨线



(b) 满足要求的开关曲线

图解 10.4.19 时间最优控制

$$\dot{x}_1(t) = x_2 = t + x_{20}, \quad \text{则 } x_1(t) = \frac{1}{2}t^2 + x_{20}t + x_{10}$$

在解  $\{x_1(t), x_2(t)\}$  中消去  $t$ , 有

$$x_1 = \frac{1}{2}x_2^2 + (x_{10} - \frac{1}{2}x_{20}^2)$$

表示一族抛物线, 如图解 10.4.19(a) 中实线所示, 图中曲线上的箭头表示时间  $t$  的增加方向。因  $x_2(t) = t + x_{20}$ , 故随  $t$  增加,  $x_2(t)$  增加。满足末态要求的最优轨线为  $\widehat{AP}$ , 可表示为

$$\gamma_+ = \{(x_1, x_2) \mid x_1 = \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{3}{2}, x_2 \leq 1\}$$

若令  $u^* = -1$ , 状态方程的解为

$$x_1(t) = -\frac{1}{2}t^2 + x_{20}t + x_{10}, \quad x_2(t) = -t + x_{20}$$

$$\text{相应最优轨线 } x_1 = -\frac{1}{2}x_2^2 + (x_{10} + \frac{1}{2}x_{20}^2)$$

亦表示一族抛物线, 如图解 10.4.19(a) 中虚线示。满足末态要求的最优轨线为  $\widehat{BP}$ , 表示为

$$\gamma_- = \{(x_1, x_2) \mid x_1 = -\frac{1}{2}x_2^2 + \frac{5}{2}, x_2 \geq 1\}$$

则开关曲线  $\gamma = \gamma_+ \cup \gamma_-$ , 见图解 10.4.19(b)。

**10.4.20** 设系统状态方程为

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

控制约束  $|u(t)| \leq 1$ , 目标集要求  $M = x_1(t_f) = 0$ , 试求使系统从初态  $[x_{10}, x_{20}]^T$  转移到目标集的最短时间  $t_f^*$ 。

**解** 题 10.4.19 已求出了最小时间控制的最优轨线, 见图解 10.4.19(a)。

若  $x_{10} > 0$ , 则采用  $u^* = -1$  策略能使最快到达终态  $x_1(t_f) = 0$ , 所需时间由  $x_1(t_f) = -\frac{1}{2}t_f^2 + x_{20}t_f + x_{10} = 0$  求出。

$$t_f = x_{20} + \sqrt{x_{20}^2 + 2x_{10}}$$

若  $x_{10} < 0$ , 则采用  $u^* = 1$  的策略, 转移到终态  $x(t_f) = 0$  所需的时间

$$t_f = -x_{20} + \sqrt{x_{20}^2 - 2x_{10}}$$

**10.4.21** 已知一阶系统



$$\dot{x}(t) = -\frac{1}{2}x(t) + u(t)$$

性能指标

$$J = \frac{1}{2}[10x^2(1)] + \frac{1}{2}\int_0^1 (2x^2 + u^2)dt$$

求最优控制  $u^*(t)$ 。

**解** 此题是有限时间状态调节器问题。

由题意

$$A = -\frac{1}{2}, \quad B = 1, \quad F = 10, \quad Q = 2, \quad R = 1$$

由黎卡堤方程

$$-\dot{P} = A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q, \quad P(t_f) = F$$

在此题中

$$\dot{P} = P^2 - P - 2 = (P-1)(P+2), \quad P(t_f) = 10$$

即

$$\frac{1}{3} \left( \frac{1}{P-1} - \frac{1}{P+2} \right) dP = dt$$

两边积分,得

$$\frac{P-1}{P+2} = e^{3(t-c)}$$

由  $P(t_f) = 10$ , 得  $c = 1.096$ 。故

$$\frac{P-1}{P+2} = e^{3t-3.288}$$

则

$$P = \frac{1 + 2e^{3t-3.288}}{1 - e^{3t-3.288}}$$

因而,最优控制

$$u^*(t) = -R^{-1}B^T Px = -\frac{1 + 2e^{3t-3.288}}{1 - e^{3t-3.288}}x(t) = -\frac{1 + 0.0746e^{3t}}{1 - 0.0373e^{3t}}x(t)$$

**10.4.22** 已知二阶系统

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad \dot{x}_2(t) = u(t)$$

试确定最优控制  $u^*(t)$ , 使下列性能指标取极小值:

$$J = \frac{1}{2}[x_1^2(3) + 2x_2^2(3)] + \frac{1}{2}\int_0^3 [2x_1^2(t) + 4x_2^2(t) + 2x_1(t)x_2(t) + \frac{1}{2}u^2(t)]dt$$

**解** 由题意  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $Q = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ ,  $R = \frac{1}{2}$ ,

$t_0 = 0, t_f = 3$ , 本题为有限时间状态调节器问题。最优控制为

$$u^*(t) = -R^{-1}B^T Px(t) = -2[0 \ 1] \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \\ -2P_{12}(t)x_1(t) - 2P_{22}(t)x_2(t)$$

矩阵  $P$  是下列黎卡堤方程的解

$$-\dot{P} = PA + A^T P - PBR^{-1}BP + Q$$

边界条件  $P(t_f) = F$  分解为下列三个微分方程及相应边界条件, 即

$$\dot{P}_{11}(t) = 2P_{12}^2(t) - 2, \quad P_{11}(3) = 1$$

$$\dot{P}_{12}(t) = -P_{11}(t) + 2P_{12}(t)P_{22}(t) - 1, \quad P_{12}(3) = 0$$

$$\dot{P}_{22}(t) = -2P_{12}(t) + 2P_{22}^2(t) - 4, \quad P_{22}(3) = 2$$

解此微分方程组, 将解  $P_{11}, P_{12}$  和  $P_{22}$  代入  $u^*(t)$ 。

#### 10.4.23 设有二次积分模型

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad x_1(0) = 0$$

$$\dot{x}_2(t) = u(t), \quad x_2(0) = 1$$

$$y(t) = x_1(t)$$

要求的性能指标为

$$J = \int_0^\infty [y^2(t) + 4u^2(t)]dt$$

试构造最优输出调节器, 并求最优性能指标  $J^*$ 。

解 无限时间定常输出调节器问题

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0], \quad Q = 2, \quad R = 8$$

$$Q - C^T Q C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} 2 [1 \ 0] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

由  $DD^T = Q$ , 得  $D^T = [\sqrt{2} \ 0]$ 。

$$\text{检验:} \quad \text{rank}[B \ AB] = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} D^T \\ D^T A \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} = 2$$

故  $(A, B)$  可控,  $(A, D)$  可观, 可以构造渐近稳定的最优输出调节器

$$\text{由黎卡堤方程求 } P = \begin{bmatrix} \bar{P}_{11} & \bar{P}_{12} \\ \bar{P}_{12} & \bar{P}_{22} \end{bmatrix}$$

$$\bar{P}A + A^T \bar{P} - \bar{P}B R^{-1} B^T \bar{P} + C^T Q C = 0$$

$$\text{有} \begin{cases} -\frac{1}{8}\bar{P}_{12}^2 + 2 = 0 \\ \bar{P}_{11} - \frac{1}{8}\bar{P}_{12}\bar{P}_{22} = 0 \\ 2\bar{P}_{12} - \frac{1}{8}\bar{P}_{22}^2 = 0 \end{cases} \quad \text{则} \begin{cases} \bar{P}_{11} = 4 \\ \bar{P}_{12} = 4 \\ \bar{P}_{22} = 8 \end{cases}$$

$$\text{则最优控制 } u^*(t) = -R^{-1}B^T P x(t) = -\frac{1}{2}x_1 - x_2 = -\frac{1}{2}y - \dot{y}$$

闭环系统

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{2}x_1 - x_2$$

对上式做拉氏变换,并代入  $x_1(0) = 0, x_2(0) = 1$ , 有

$$x_2(s) = \frac{s}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

则

$$x_2(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \left( \cos \frac{1}{2}t - \sin \frac{1}{2}t \right)$$

$$x_1(s) = \frac{1}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}, \text{ 则 } x_1(t) = 2e^{-\frac{1}{2}t} \sin \frac{1}{2}t$$

$$\begin{aligned} u^*(t) &= -\frac{1}{2}x_1 - x_2 = -e^{-\frac{1}{2}t} \sin \frac{t}{2} - e^{-\frac{1}{2}t} \cos \frac{t}{2} + e^{-\frac{1}{2}t} \sin \frac{1}{2}t = \\ &= -e^{-\frac{1}{2}t} \cos \frac{1}{2}t \end{aligned}$$

$$J^* = \int_0^\infty [y^2(t) + 4u^2(t)]dt = \int_0^\infty [4e^{-t} \sin^2 \frac{1}{2}t + 4e^{-t} \cos^2 \frac{1}{2}t]dt = 4$$

#### 10.4.24 已知二阶离散系统

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 1-e^{-T} \\ 0 & e^{-T} \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} e^{-T} + T - 1 \\ 1 - e^{-T} \end{bmatrix} u(k)$$

其中,  $u(k)$  无约束,  $T = 1$  s。求最优控制序列  $u^*(k)$ , 使系统在两个采样周期内由初态  $x(0)$  转移到状态空间原点。

$$\text{解 设 } u(k) = [a \quad b] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \quad (k = 0, 1)$$

$$x(1) = \begin{bmatrix} 1 & 1-e^{-T} \\ 0 & e^{-T} \end{bmatrix} x(0) + \begin{bmatrix} e^{-T} + T - 1 \\ 1 - e^{-T} \end{bmatrix} [a \quad b] \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

$$x(2) = \begin{bmatrix} 1 & 1-e^{-T} \\ 0 & e^{-T} \end{bmatrix} x(1) + \begin{bmatrix} e^{-T} + T - 1 \\ 1 - e^{-T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} [1 + a(e^{-T} + T - 1)]^2 + [1 - e^{-T} + b(e^{-T} + T - 1)]a(1 - e^{-T}) & A_{12} \\ a(1 - e^{-T})[1 + a(e^{-T} + T - 1)] + [e^{-T} + b(1 - e^{-T})]a(1 - e^{-T}) & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

式中,  $A_{12} = [1 + a(e^{-T} + T - 1)][1 - e^{-T} + b(e^{-T} + T - 1)] +$

$$[1 - e^{-T} + b(e^{-T} + T - 1)][e^{-T} + b(1 - e^{-T})]$$

$$A_{22} = [1 - e^{-T} + b(e^{-T} + T - 1)](1 - e^{-T})a + [e^{-T} + b(1 - e^{-T})]^2$$

当  $T = 1$  s 时,

$$x(2) = \begin{bmatrix} (1 + 0.368a)^2 + (0.4 + 0.2325b)a \\ 0.632a(1 + 0.368a) + (0.2325 + 0.4b)a \\ (0.632 + 0.368b)[(1 + 0.368a) + (0.368 + 0.632b)] \\ (0.4 + 0.2325b)a + (0.368 + 0.632b)^2 \end{bmatrix} x(0)$$

当  $a = -1.58, b = -1.24$  时,  $x(2) = 0$

故最优控制序列  $u^*(k) = -1.58x_1(k) - 1.24x_2(k)$

#### 10.4.25 给定一阶离散系统

$$x(k+1) = x(k) + u(k), \quad x(0) = 1$$

性能指标

$$J = \sum_{k=0}^3 [x^2(k) + u^2(k)]$$

试用动态规划和极小值原理求最优控制序列  $u^*(k), k=0, 1, 2, 3$  和最小性能指标  $J^*$ 。

解法一 动态规划法。

本题为  $N=4$  级最优控制问题。

1) 令  $k=3$

$$J^*(3) = \min\{x^2(3) + u^2(3) + 0\}$$

$$\frac{\partial J^*(3)}{\partial u(3)} = 2u(3) = 0$$

故

$$u^*(3) = 0$$

$$J^* = x^2(3) = (x(2) + u(2))^2$$

2)  $k=2$

$$J^*(2) = \min\{x^2(2) + u^2(2) + (x(2) + u(2))^2\}$$

$$\frac{\partial J^*(2)}{\partial u(2)} = 2u(2) + 2(x(2) + u(2)) = 0$$

则

$$u^*(2) = -\frac{1}{2}x(2)$$

$$J^*(2) = \frac{3}{2}x^2(2) = \frac{3}{2}(x(1) + u(1))^2$$

3) 令  $k = 1$

$$J^*(1) = \min\{x^2(1) + u^2(1) + \frac{3}{2}(x(1) + u(1))^2\}$$

$$\frac{\partial J^*(1)}{\partial u(1)} = 2u(1) + 3(x(1) + u(1)) = 0$$

则

$$u^*(1) = -\frac{3}{5}x(1)$$

$$J^*(1) = \frac{8}{5}x^2(1) = \frac{8}{5}(x(0) + u(0))^2$$

4) 令  $k = 0$

$$J^*(0) = \min\{x^2(0) + u^2(0) + \frac{8}{5}(x(0) + u(0))^2\}$$

$$\frac{\partial J^*(0)}{\partial u(0)} = 2u(0) + \frac{16}{5}(x(0) + u(0)) = 0$$

则

$$u^*(0) = -\frac{8}{13}x(0)$$

代入已知的  $x(0) = 1$  得

$$u^*(0) = -\frac{8}{13}, J = J^*(0) = \frac{21}{13}x^2(0) = \frac{21}{13}$$

$$x(1) = x(0) + u(0) = \frac{5}{13}$$

则

$$u^*(1) = -\frac{3}{13}$$

$$x(2) = x(1) + u(1) = \frac{2}{13}$$

则

$$u^*(2) = -\frac{1}{13}$$

则最优控制序列为  $u^*(k) = \{-\frac{8}{13}, -\frac{3}{13}, -\frac{1}{13}, 0\}$

$$\text{最小性能指标 } J^* = \frac{21}{13}$$

解法二 极小值原理法, 由题意

$$x(k+1) = x(k) + u(k)$$

$$H(k) = x^2(k) + u^2(k) + \lambda(k+1)(x(k) + u(k))$$

$$\text{协态方程} \quad \lambda(k) = \frac{\partial H(k)}{\partial x(k)} = 2x(k) + \lambda(k+1)$$

$$\text{极值条件} \quad \frac{\partial H(k)}{\partial u(k)} = 0$$

$$\text{有} \quad 2u(k) + \lambda(k+1) = 0$$

$$\text{及初始条件} \quad x(0) = 1$$

$$\text{横截条件} \quad \lambda(4) = 0$$

联立上述各方程, 可递推求得  $u^*$  序列及最小性能指标  $J^*$  同上。

10.4.26 设系统状态方程为

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad x_1(0) = x_{10}$$

$$\dot{x}_2(t) = u(t), \quad x_2(0) = x_{20}$$

性能指标为

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty (4x_1^2 + u^2) dt$$

试分别用连续动态规划和调节器方法确定最优控制  $u^*(t)$ 。

解法一 动态规划法

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R = 1$$

(1) 求  $u^*(x, \frac{\partial J^*}{\partial x})$  隐式解, 令

$$H(x, u, \frac{\partial J^*}{\partial x}) = \frac{1}{2} x^T Q x + \frac{1}{2} R u^2 + \left( \frac{\partial J^*}{\partial x} \right)^T A x + \left( \frac{\partial J^*}{\partial x} \right)^T B u$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = R u + B^T \frac{\partial J^*}{\partial x} = 0$$

故

$$u^*(x, \frac{\partial J^*}{\partial x}) = -R^{-1} B^T \frac{\partial J^*}{\partial x}$$

(2) 求  $J^*[x(t)]$ , 将  $u^*(x, \frac{\partial J^*}{\partial x})$  代入  $H$  中, 有

$$H^* = \frac{1}{2} x^T Q x + \left( \frac{\partial J^*}{\partial x} \right)^T A x - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial J^*}{\partial x} \right)^T B R^{-1} B^T \frac{\partial J^*}{\partial x}$$

由于为线性定常二次型问题,可设

$$J^*[x(t)] = \frac{1}{2} x^T(t) \bar{P} x(t), \frac{\partial J^*}{\partial x} = 0$$

则哈密顿-雅可比方程为

$$\frac{1}{2} x^T Q x + \left( \frac{\partial J^*}{\partial x} \right)^T A x - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial J^*}{\partial x} \right)^T B R^{-1} B^T \frac{\partial J^*}{\partial x} = 0$$

因  $\frac{\partial J^*}{\partial x} = \bar{P}x$ , 则

$$\frac{1}{2} x^T [\bar{P}A - A^T \bar{P} - \bar{P}B R^{-1} B^T \bar{P} + Q] x = 0$$

该式对任意非零  $x(t)$  均成立, 故而

$$\bar{P}A + A^T \bar{P} - \bar{P}B R^{-1} B^T \bar{P} + Q = 0$$

令  $\bar{P} = \begin{bmatrix} \bar{P}_{11} & \bar{P}_{12} \\ \bar{P}_{12} & \bar{P}_{22} \end{bmatrix}$ , 则

$$\begin{cases} -\bar{P}_{12}^2 + 4 = 0 \\ \bar{P}_{11} - \bar{P}_{12} \bar{P}_{22} = 0 \\ 2\bar{P}_{12} - \bar{P}_{12}^2 = 0 \end{cases} \quad \text{则} \quad \begin{cases} \bar{P}_{11} = 4 \\ \bar{P}_{12} = 2 \\ \bar{P}_{22} = 2 \end{cases}$$

故

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} > 0$$

(3) 求  $u^*(t)$  显示解

$$u^*(t) = -R^{-1} B^T \bar{P} x(t) = -[0 \quad 1] \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = -2x_1(t) - 2x_2(t)$$

解法二 状态调节器方法, 由题意

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^*, \quad R = 1$$

最优控制  $u^*(t) = -R^{-1} B^T \bar{P} x$

而  $\bar{P}$  是下列黎长堤方程

$$A^T \bar{P} + \bar{P} A - \bar{P} B R^{-1} B^T \bar{P} + Q = 0$$

的解, 可求出  $\bar{P} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ , 则

$$u^*(t) = -2x_1(t) - 2x_2(t)$$

## 附录 I 考研真题

### 一、2001 年西北工业大学硕士研究生入学考试 自动控制原理试题

1. (10 分) 已知系统结构图如图 A.1 所示。

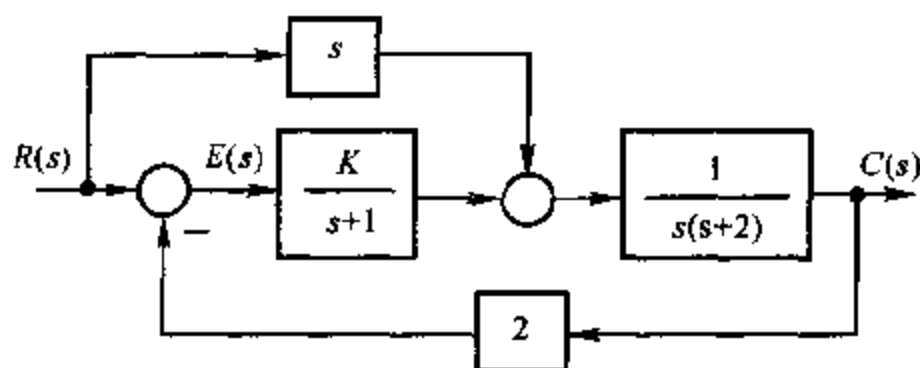


图 A.1 系统结构图

(1) 求引起闭环系统临界稳定的  $K$  值和对应的振荡频率  $\omega$ ;

(2)  $r(t) = t^2$  时, 要使系统稳态误差  $e_{ss} \leq 0.5$ , 试确定满足要求的  $K$  值范围。

2. (15 分) 统考生作此题

已知正反馈系统结构图如图 A.2 所示。

(1) 绘出  $K^* = 0 \rightarrow \infty$  变化时的闭环根轨迹(求出与虚轴交点, 分离点);

(2) 确定使系统稳定且为过阻尼状态的开环增益  $K$  的范围;

(3) 确定使系统阻尼比  $\zeta = 0.707$  的开环增益  $K$  值和闭环极点坐标, 并计算系统的动态性能(超调量  $\sigma(\%)$ , 调节

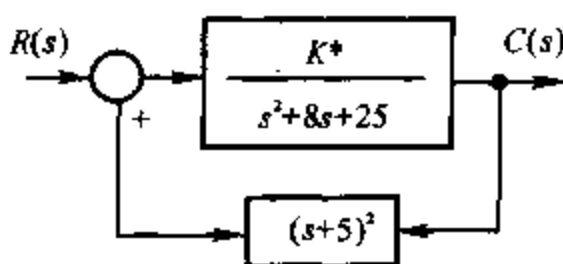


图 A.2 系统结构图



时间  $t_s$ )。

3. (15 分) 单独命题考生作此题

某单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{10}{s(s+1+10K_t)}$$

(1) 绘出  $K_t = 0 \rightarrow \infty$  变化时的闭环根轨迹；

(2) 确定闭环极点  $s_{1,2} = -1.58 \pm j2.74$  时的  $K_t$  值, 并计算系统的动态性能 (超调量  $\sigma(\%)$ , 调节时间  $t_s$ )。

注 所有考生在 4, 5 两大题中任选一题

4. (20 分)

某单位反馈的二阶系统 (无闭环零点), 其单位阶跃响应如图 A. 3(a) 所示; 当  $r(t) = 3\sin 4t$  时, 系统的稳态输出响应如图 A. 3(b) 所示。

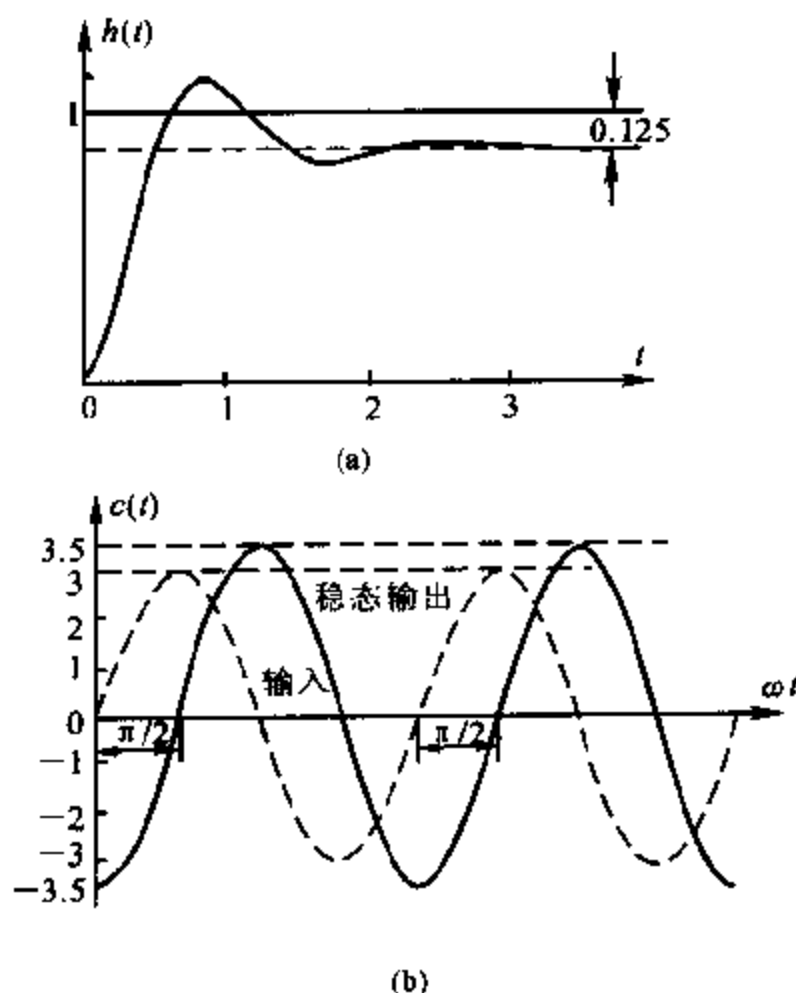


图 A.3 系统的单位阶跃响应和稳态正弦响应

- (1) 求系统的闭环传递函数;
- (2) 计算系统的动态性能(超调量  $\sigma(\%)$ , 调节时间  $t_s$ );
- (3) 求系统的截止频率  $\omega_c$  和相角裕度  $\gamma$ 。

5. (20 分)

单位反馈系统的开环幅相特性曲线如图附 A. 4 所示。当  $r(t) = 2t$  时, 系统的稳态误差  $e_{ss} = 0.2$ , 试求:

- (1) 系统的截止频率  $\omega_c$ 、相角裕度  $\gamma$  和幅值裕度  $h$ ;
- (2) 系统闭环传递函数  $\Phi(s)$ ;
- (3) 在  $r(t) = 2\sin\omega t$  作用下, 系统稳态输出的最大幅值和对应的频率。

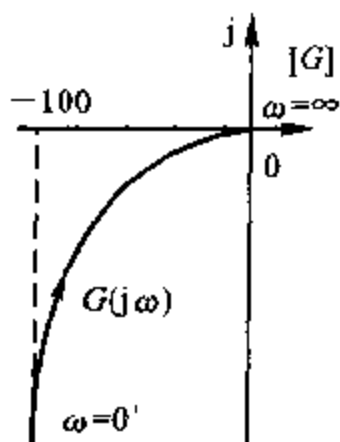


图 A. 4 开环幅相特性

6. (20 分) 某单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K \cdot e^{-0.03s}}{s(s+1)(0.2s+1)}$$

要求系统的开环增益  $K = 30$ , 截止频率  $\omega_c \geq 2.5$ , 相角裕度  $\gamma = 40^\circ \pm 5^\circ$

(1) 判断采用何种串联校正方式(超前校正、迟后校正、迟后-超前校正)能达到系统要求, 并说明理由;

(2) 若采用迟后-超前校正, 校正装置的传递函数取为

$$G_c(s) = \frac{(2s+1)(s+1)}{(20s+1)(0.01s+1)}$$

求校正后系统的截止频率  $\omega_c^*$  和相角裕度  $\gamma^*$ , 检验能否满足系统要求。

7. (15 分)

采样系统结构图如图 A. 5 所示, 采样周期  $T = 0.1s$ 。要使  $r(t) = t$  作用下系统的稳态误差  $e_{ssv} \leq 0.2$ , 试确定满足要求的  $K$  值范围。

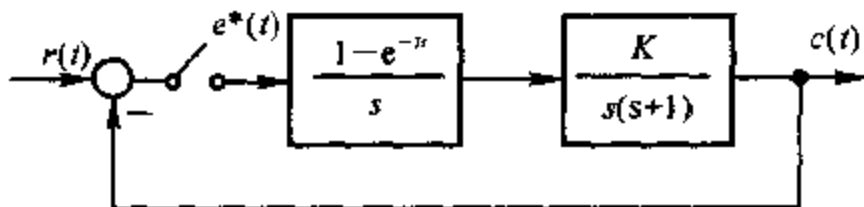


图 A. 5 采样系统结构图

附:  $z$  变换表

序号	$E(s)$	$e(s)$	$E(z)$
1	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
2	$\frac{1}{s^2}$	$t$	$\frac{T_s}{(z-1)^2}$
3	$\frac{1}{s+a}$	$e^{-at}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$

8. (20 分)

非线性系统结构图如图 A.6 所示, 图中  $b=1$ 。要使系统不产生自振, 试确定非线性特性参数  $a$  与线性环节增益  $K$  应满足的条件。

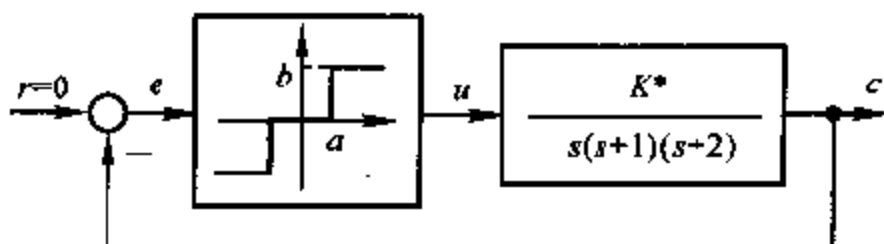


图 A.6 非线性系统结构图

[注: 有死区的继电特性的描述函数为  $N(A) = \frac{4b}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2}$ ,  $A \geq a$ ]

## 二、2002 年西北工业大学硕士研究生入学考试 自动控制原理试题

1. (10 分)

已知系统结构图如图 B.1 所示

(1) 求前向通道传递函数  $\frac{C(s)}{E(s)}$ ;

(2) 求系统闭环传递函数  $\frac{C(s)}{R(s)}$ ;

(3) 若  $G_1(s)G_2(s) = 1$ ,  $G_2(s) - G_1(s) = \frac{2K_1}{s(s+1)} - 2$ ,  $H(s) = \frac{1}{s+1}$

欲使系统在单位速度输入下的稳态误差  $e_{ss} < 2$ , 试确定  $K_1$  的取值范围。

2. (15 分)

某单位反馈的典型二阶系统,其闭环传递函数为  $\Phi(s) = \frac{100}{s^2 + 10s + 100}$ , 现拟采用 PD 控制器以改善系统动态性能, PD 控制器的传递函数为  $G_c(s) = 1 + K_D s$ , 试求

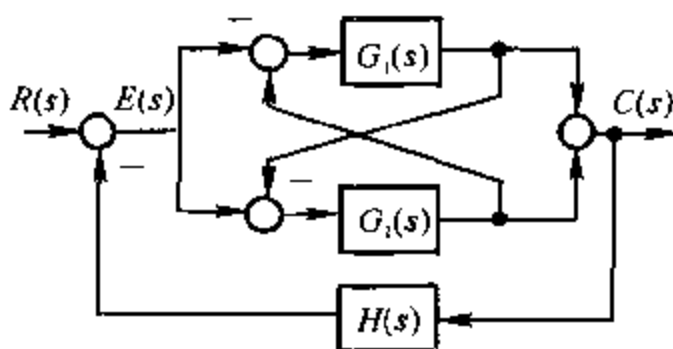


图 B.1 系统结构图

(1) 绘出  $K_D = 0 \rightarrow \infty$  变化时的根轨迹(确定出分离点, 出射角);

(2) 使系统稳定且为欠阻尼状态时的  $K_D$  范围;

(3) 系统具有最佳阻尼比( $\zeta = 0.707$ )的  $K_D$  值及此时的系统闭环传递函数。

3. (15 分)

已知单位反馈的最小相角系统, 其开环对数幅频特性如图 B.2 所示, 试确定

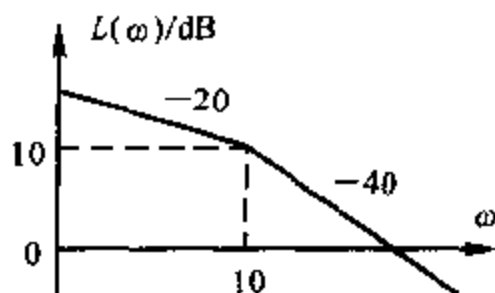


图 B.2 对数幅频特性

(1) 系统闭环传递函数;

(2) 系统的超调量  $\sigma(\%)$ , 调节时间  $t_s(\Delta = 5\%)$ ;

(3) 概略绘出系统开环幅相特性曲线(要求给出  $\omega \rightarrow 0$  时的渐近线)。

4. (15 分)

某单位反馈的最小相角系统, 其单位阶跃响应和开环对数幅频特性分别如图 B.3 中(a)和(b)所示。试确定系统的开环传递函数  $G(s)$ 。

5. (15 分)

某单位反馈系统的开环传递函数  $G(s) = \frac{1}{s^2}$ , 采用串联校正改善系统性能, 校正装置的传递函数为  $G_c(s) = \frac{K_c(10Ts + 1)}{(Ts + 1)}$ , 要求校正后系统的截止频率  $\omega_c^* = 1$ , 相角裕度  $\gamma^*$  达到最大, 试确定

(1) 校正装置传递函数中的参数  $K_c, T$ ;

(2) 校正后系统在  $r(t) = t^2$  作用下的稳态误差  $e_{ss}$ 。

6. (15 分)

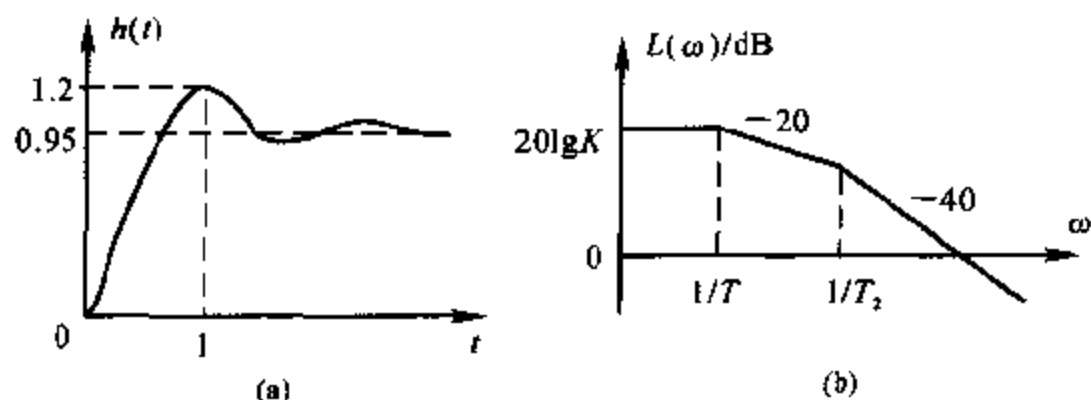


图 B.3 系统的单位阶跃响应和开环对数幅频特性

设有单位反馈的 I 型离散系统(存在一个  $z=1$  的开环极点)其闭环脉冲传递函数为

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{K(1+cz^{-1})z^{-1}}{1+az^{-1}+bz^{-2}}$$

(1) 写出开环脉冲传递函数  $G(z)$  的表达式;

(2) 证明该系统在单位斜坡作用下的稳态误差为  $e_{ss} = \frac{T}{K_v} = T \left[ \frac{2+a}{1+a+b} - \frac{1}{c+1} \right]$ , 式中  $T$  为采样周期,  $K_v$  为静态速度误差系数,  $a, b, c$  为大于 0 的常数。

7. (15 分) 请在第 7, 8 两大题中任选一题

非线性系统如图 B.4 所示。现要求输出端产生频率  $\omega=1$ , 幅值  $A=4$  的周期信号, 试确定系统参数  $K, \tau$ 。

[注: 图 B.4 中非线性环节的描述函数为  $N(A) = \frac{4M}{\pi A}$ 。]

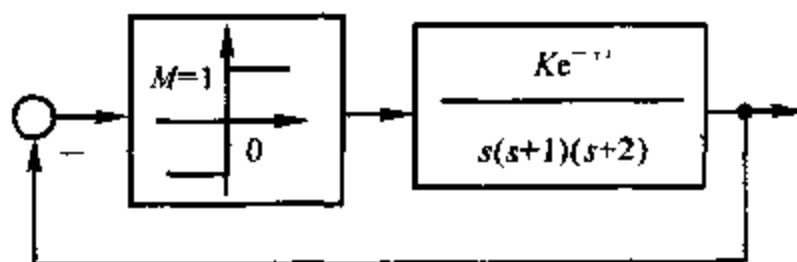


图 B.4 非线性系统结构图

8. (15 分) 请在第 7, 8 两大题中任选一题

某非线性系统结构图如图 B.5 所示。取  $(c, \dot{c})$  为坐标, 写出系统相轨迹方

程,并绘制出  $c(0) = 2, \dot{c}(0) = 0$  起始的相轨迹。

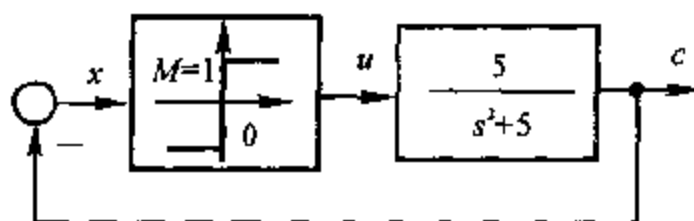


图 B.5 非线性系统结构图

### 三、2003 年西北工业大学硕士研究生入学考试 自动控制原理试题

1. (20 分)

系统结构图如图 C.1 所示

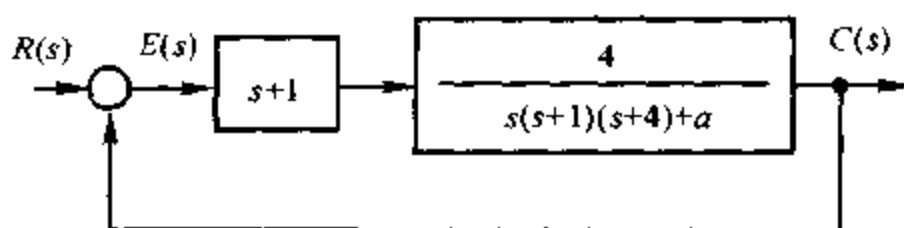


图 C.1 控制系统结构图

- (1) 确定使系统稳定的  $a$  值范围;
- (2) 在  $r(t) = 1(t)$  作用下,要求系统的稳态误差  $e_{ss} = 0$ ,确定相应的  $a$  值;
- (3) 在满足(2)的条件下,求系统的截止频率  $\omega_c$  和相角裕度  $\gamma$ 。

2. (25 分)

已知单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K^*}{(s-1)(s^2+6s+10)}$$

- (1) 画出  $K^* = 0 \rightarrow \infty$  变化时系统的根轨迹(求出渐近线、分离点、与虚轴交点);
- (2) 写出分离点处所对应的系统闭环传递函数;
- (3) 确定使系统稳定且阶跃响应不出现超调的开环增益  $K$  的取值范围。

## 3. (25 分)

某单位反馈的二阶系统, 当开环增益  $K = 1$  时, 开环幅相特性如图 C.2 所示。

(1) 写出系统的开环传递函数;

(2) 要求在某  $r(t) = \sin 4.848t$  作用下, 系统稳态输出幅值达到最大, 试确定对应的开环增益  $K$ ;

(3) 当开环增益  $K = 8$  时, 求系统的截止频率  $\omega_c$  和相角裕度  $\gamma$ 。

[注: 典型二阶系统的谐振频率

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}, \text{ 谐振峰值 } M_r = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}}.]$$

## 4. (30 分)

某单位反馈的典型二阶系统, 其单位阶跃响应如图 C.3 所示。

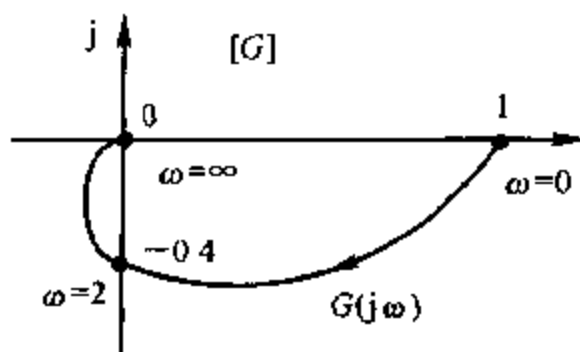


图 C.2 幅相特性

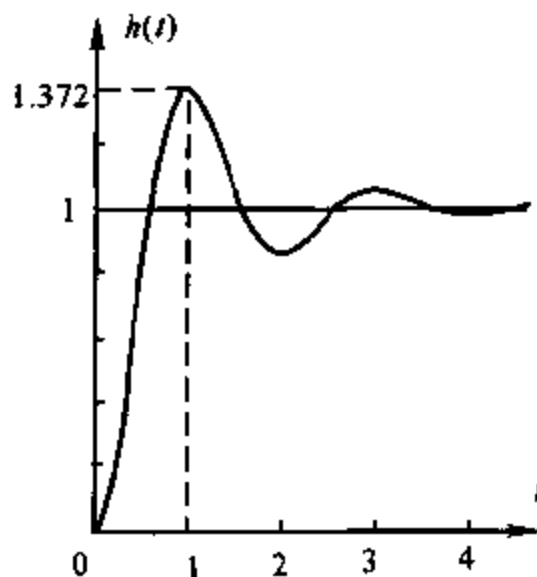


图 C.3 系统单位阶跃响应

(1) 确定系统的开环传递函数, 画出系统的结构图;

(2) 用适当的校正方式, 并调整开环增益, 使系统超调量  $\sigma\% = 16.3\%$ , 调节时间  $t_s = 1$  s, 试画出校正后系统的结构图, 确定校正装置的传递函数和系统的开环增益。

## 5. (25 分)

采样系统结构图如图 C.4 所示。采样周期  $T = 0.25 \text{ s}$ 。

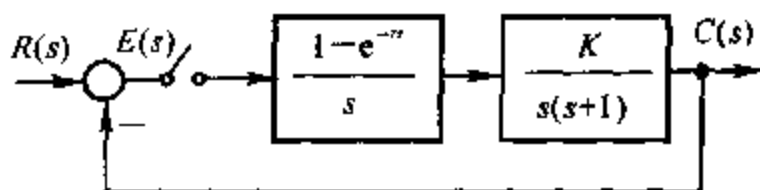


图 C.4 采样系统结构图

- (1) 确定使系统稳定的  $K$  值范围；
- (2) 在  $r(t) = t$  作用下，求  $K = 1$  时系统的稳态误差  $e_{ss}$ 。

[注：有关函数的  $z$  变换： $Z\left[\frac{1}{s}\right] = \frac{z}{z-1}$ ,  $Z\left[\frac{1}{s^2}\right] = \frac{Tz}{(z-1)^2}$ ,  
 $Z\left[\frac{1}{s+a}\right] = \frac{z}{z - e^{-aT}}$ 。]

6. (25 分)

非线性系统结构图如图 C.5 所示，其中非线性特性参数  $M = 2, h = 1$ ，非线性

特性的描述函数  $N(A) = \frac{4M}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{h}{A}\right)^2}$  ( $A \geq h$ )。

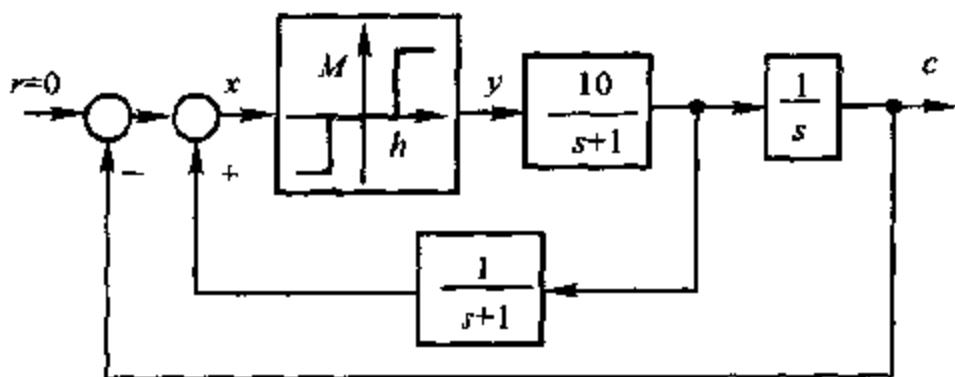


图 C.5 非线性系统结构图

- (1) 试分析系统的稳定性，判定系统是否自振；
- (2) 确定系统输出端信号的幅值和频率。



## 附录 II 考研真题简要解答

### 一、2001 年西北工业大学硕士研究生入学考试 自动控制原理试题简要解答

1. (1)  $K = 3, \omega = \sqrt{2}$

(2)  $2 \leq K < 3$

2. (1)  $d = 5, \begin{cases} \omega = 0 \\ K^* = 1 \end{cases}, \begin{cases} \omega = 5 \\ K^* = \frac{4}{5} \end{cases}$

(2)  $1 < K = K^* < \infty$

(3)  $\lambda_{1,2} = -\frac{5\sqrt{2}}{2} \pm z \frac{5\sqrt{2}}{2}, K = 0.317$

$\sigma = 4.32\%, t_s = 0.99 \text{ s}$

3. (1)  $d = \sqrt{10}$

(2)  $K_t = 0.216, \sigma = 16\%, t_s = 2.216 \text{ s}$

4. (1)  $\Phi(s) = \frac{K_p \omega_n^2}{s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2} = \frac{0.875 \times 4^2}{s^2 + 2 \times 0.375 \times 4s + 4^2} =$   
 $\frac{14}{s^2 + 3s + 16}$

(2)  $\sigma = 28\%, t_s = 2.3 \text{ s}$

(3)  $\omega_c = 3.74, \gamma = 43.1^\circ$

5. (1)  $\omega_c = 1, \gamma = 5.71^\circ, h = \infty$

(2)  $\Phi(s) = \frac{1}{s^2 + 0.1s + 1}$

(3)  $\omega_c = 0.9975, M_r = 10$

6. (1)  $\omega_c = 5.3133, \gamma(5.3133) = -46^\circ$

若用一级超前校正, 则  $\varphi_m = \gamma^* - \gamma + 5^\circ = 40^\circ + 46^\circ + 5^\circ = 91^\circ$  (不可能达到)。若用滞后, 则校正后系统在  $\omega'_c = 2.5$  处的相角裕度为  $\gamma(2.5) = -9.06^\circ$  (不满足要求)。

故只能采用滞后-超前校正。

(2)  $\omega_c^* = 3$ ,  $\gamma^* = 43.65^\circ$ , 满足要求

7.  $5 \leq K < 20.343$

8.  $K = \frac{K^*}{2} < \frac{3\pi a}{2}$

## 二、2002 年西北工业大学硕士研究生入学考试 自动控制原理试题简要解答

$$1. (1) \frac{C(s)}{E(s)} = \frac{2G_1G_2 + G_2 - G_1}{1 + G_1G_2}$$

$$(2) \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2G_1G_1 + G_2 - G_1}{1 + G_1G_2 + (2G_1G_2 + G_2 - G_1)H}$$

$$(3) 0.5 < K_1 < 2$$

$$2. (1) d = -10, \theta_{p_1} = -150^\circ, \theta_{p_2} = 150^\circ$$

$$(2) 0 < K_D < 0.1$$

$$(3) K_E = 0.0414$$

$$\Phi(s) = \frac{100(1 + 0.0414s)}{s^2 + 14.14s + 100}$$

$$3. (1) \Phi(s) = \frac{316.2}{s^2 + 10s + 316.2}$$

$$(2) \sigma = 40\%, t_r = 0.7 \text{ s}$$

$$(3) G(s) = \frac{316.2}{s\left(\frac{s}{10} + 1\right)}$$

渐近线  $\lim_{\omega \rightarrow 0^+} \text{Re}[G(j\omega)] = -3.162$ , 开环幅相曲线(略)。

$$4. G(s) = \frac{K}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)} = \frac{19}{(4.17s + 1)(0.4116s + 1)}$$

$$5. (1) K_c = 0.316, T = 0.316$$

$$(2) e_{ss} = 6.33$$

$$6. (1) G(z) = \frac{K(1+cz^{-1})z}{1+(a-K)z^{-1}+(b-Kc)z^{-2}}$$

(2) 略

$$7. K = \sqrt{10}\pi, \quad r = 0.322$$

$$8. \begin{cases} \frac{\dot{c}^2}{45} + \frac{(c+1)^2}{9} = 1 \\ \frac{\dot{c}^2}{45} + \frac{(c-1)^2}{9} = 1 \end{cases}$$

### 三、2003 年西北工业大学硕士研究生入学考试 自动控制原理试题简要解答

$$1. (1) -4 < a < 36$$

$$(2) a = 0$$

$$(3) \omega_c = 1, \quad \gamma = 76^\circ$$

$$2. (1) \begin{cases} \sigma_s = -\frac{5}{3} \\ \varphi_s = \pm 60^\circ, 180^\circ \end{cases}, \quad \begin{cases} d_1 = -2.87 \\ d_2 = -0.46 \end{cases}, \quad \begin{cases} \omega = 0, K^* = 10 \\ \omega = 2, K^* = 30 \end{cases}$$

$$(2) \Phi_1(s) = \frac{3.936}{(s+2.87)^2(s-0.74)}, \quad \Phi_2(s) = \frac{10.88}{(s+0.46)^2(s+4.07)}$$

$$(3) 1 < K = \frac{K^*}{10} < 1.09$$

$$3. (1) G(s) = \frac{4K}{s^2 + 5s + 4}$$

$$(2) K = 8$$

$$(3) \omega_c = 5.657, \quad \gamma = 45.3^\circ$$

$$4. (1) G(s) = \frac{10.89}{s(s+1.98)}$$

(2) 解法一 用串联校正

$$G_c(s) = \frac{4.5(s+1.98)}{s+7}, \quad K = 7$$

解法二 用测速反馈

$$G_c(s) = \frac{49}{s(s+7)}, \quad K = 7$$

5. (1)  $0 < K < 8.35$

(2)  $\rho_{ss} = 1$

6. (1) 系统会自振

(2)  $|c| = 17.95, \omega = 1$

## 参考文献

- 1 胡寿松主编. 自动控制原理. 第四版. 北京: 科学出版社, 2001
- 2 卢京潮, 刘慧英编. 自动控制原理典型题解析及自测题. 西安: 西北工业大学出版社, 2001
- 3 史忠科, 卢京潮编. 自动控制原理常见题型解析及模拟题. 第2版. 西安: 西北工业大学出版社, 1998
- 4 王敏等编. 自动控制原理试题精选题解. 武汉: 华中科技大学出版社, 2002
- 5 高国, 俞文杰编. 自动控制原理. 广州: 华南理工大学出版社, 2001
- 6 王诗宓, 杜继宏, 窦曰轩编. 自动控制原理例题习题集. 北京: 清华大学出版社, 2002
- 7 陈小琳编. 自动控制原理. 北京: 清华大学出版社, 1992
- 8 戴忠达编. 自动控制理论基础. 北京: 清华大学出版社, 1991
- 9 秦寿康, 张正方编. 最优控制. 北京: 电子工业出版社, 1984
- 10 徐湘元编. 最优控制的要点·例题·习题. 广州: 华南理工大学出版社, 1997
- 11 吴寿章编. 应用最优控制. 西安: 西安交通大学出版社, 1987

[ G e n e r a l   I n f o r m a t i o n ]

书名 = 自动控制原理      ( 第四版 )      导教 · 导学 · 导考

作者 =

页数 = 4 1 0

S S 号 = 0

出版日期 =

V s s 号 = 7 4 9 8 8 4 5 5